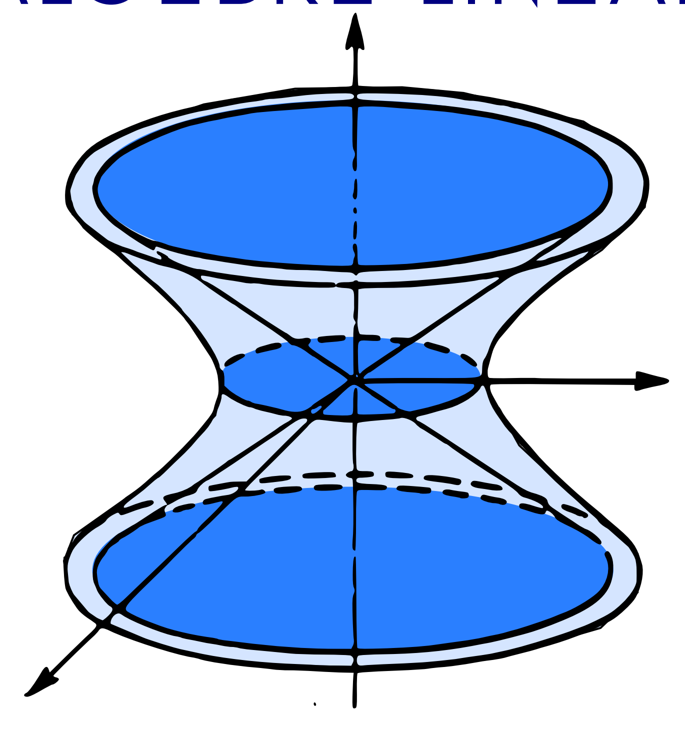
L. Beklémichéva, A. Pétrovitch,
I. Tchoubarov

RECUEIL DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET D'ALGÈBRE LINÉAIRE



Éditions Mir Moscou

Л. А. БЕКЛЕМИШЕВА, А. Ю. ПЕТРОВИЧ, И. А. ЧУБАРОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

L. BEKLEMICHEVA, A. PETROVITCH,
I. TCHOUBAROV

RECUEIL DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET D'ALGÈBRE LINÉAIRE



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par OLEG PARTCHEVSKI

На французском языке

Imprimé en Union Soviétique

ISBN 5-03-001896-4

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est destiné aux étudiants des établissements d'enseignement supérieur ayant des programmes de mathématiques de niveaux différents. Nous nous sommes fixé pour objectif de créer un recueil de problèmes qui embrasse l'ensemble des matières du cours de géométrie analytique et d'algèbre linéaire et qui matérialise en même temps notre expérience de l'enseignement des mathématiques à l'Institut physico-technique de Moscou. L'agencement de la matière ainsi que les définitions et notations sont calqués pour l'essentiel sur ceux du Cours de géométrie analytique et d'algèbre linéaire de D. Beklémichev.

Arrêtons-nous sur quelques particularités pédagogiques du recueil. Tout d'abord nous voulons attirer l'attention du lecteur sur les matières non traditionnelles qu'il contient. Par exemple: le chapitre « Transformations du plan. Groupes » traite des notions générales sur les applications; le chapitre « Fonctions sur l'espace vectoriel » contient un paragraphe consacré entièrement aux fonctions linéaires; un chapitre est spécialement consacré aux espaces affines et aux espaces euclidiens ponctuels; enfin, le chapitre « Tenseurs », qui traite en détail les notions fondamentales liées aux tenseurs, contient un grand nombre d'exercices sur les matrices multidimensionnelles.

Tous les chapitres ainsi que certains paragraphes sont précédés d'un rappel théorique qui comprend une liste des nouvelles notions nécessaires dont la définition est partiellement donnée par la suite, les notations, un résumé des plus importantes formules et un exposé détaillé de certains algorithmes.

Le choix des problèmes permet à notre avis d'utiliser ce recueil dans différents systèmes d'organisation du cours. C'est ainsi que nous avons inséré les problèmes sur la multiplication des matrices dans le § 14 (« Déterminants ») et dans les chapitres X et XI, où ces problèmes sont énoncés pour les espaces euclidiens et hermitiens, etc.

Pour faciliter le travail du professeur, nous donnons les problèmes standard par grandes séries. Mais pour ne pas augmenter le volume

du recueil, nous avons dû composer une liste de matrices (pp. 405-427). Les références à la liste sont notées c_k pour les matrices-colonnes, et A_k pour les autres matrices, où k représente le numéro dans la liste. Cependant, nous n'utilisons pas les matrices de la liste dans tous les problèmes numériques et gardons en partie un exposé traditionnel.

Les problèmes les plus compliqués et certains problèmes types sont résolus. Nous les avons marqués par la lettre (s) et groupé leurs solutions dans une division en fin du livre.

Certains collègues ont bien voulu nous faire part de leurs critiques et de leurs suggestions. Nous tenons à remercier B. Paltsev, D. Beklémichev, V. Lidski, V. Potchouev et A. Bolibrouch, tant pour leurs encouragements que pour l'aide qu'ils nous ont ainsi apportée. Nous remercions particulièrement l'académicien L. Koudriavtsev pour ses conseils si judicieux.

Les Auteurs

CHAPITRE PREMIER

VECTEURS ET COORDONNÉES

Dans ce chapitre on utilise les notions de base suivantes: *vecteur, vecteur nul, égalité des vecteurs, vecteurs colinéaires et coplanaires, produit du vecteur par un nombre réel, somme des vecteurs, vecteur opposé, différence des vecteurs, combinaison linéaire de vecteurs, vecteurs linéairement dépendants (système de vecteurs linéairement dépendants ou système lié de vecteurs), base d'un plan et base d'un espace, coordonnées d'un vecteur par rapport à une base, rayon vecteur d'un point, système de coordonnées cartésiennes (repère cartésien), coordonnées d'un point, longueur d'un vecteur, angle de deux vecteurs, produit scalaire de deux vecteurs, projection du vecteur sur une droite, bases orthogonale et orthonormée dans le plan et dans l'espace, système de coordonnées rectangulaires (repère orthonormé), orientation d'un triplet de vecteurs dans l'espace, orientation d'un couple de vecteurs dans le plan, orientation d'une base, produit vectoriel de deux vecteurs, produit mixte de trois vecteurs, déterminants d'ordre 2 et 3*. On utilise de même les propriétés principales des opérations linéaires et des produits scalaire, vectoriel et mixte.

Soient **a**, **b**, **c** des vecteurs dont les coordonnées dans une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

La condition nécessaire et suffisante de colinéarité des vecteurs est la proportionnalité de leurs coordonnées correspondantes.

Les vecteurs **a**, **b**, **c** sont coplanaires si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

est nul.

Si la base est orthonormée, la longueur du vecteur **a** est

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2};$$

le produit scalaire des vecteurs **a**, **b** vaut

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3;$$

le produit vectoriel des vecteurs **a**, **b** vaut

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

où $\varepsilon = +1$ si la base est d'une orientation directe, et $\varepsilon = -1$ si la base est d'une orientation rétrograde. Le déterminant est interprété symboliquement:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Le produit mixte des vecteurs **a**, **b**, **c** s'exprime dans toute base par la formule

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Si la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est orthonormée, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \varepsilon$ (le nombre ε est défini plus haut).

Le triplet des vecteurs **a**, **b**, **c** est direct si le signe du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

coïncide avec celui de ε, et rétrograde dans le cas contraire. L'affirmation est juste pour toute base.

Le cosinus de l'angle φ des vecteurs **a**, **b** définis par leurs coordonnées peut être calculé d'après la formule

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs **a**, **b** vaut

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|.$$

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs **a**, **b**, **c** vaut

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Tout vecteur **b** du plan ou de l'espace peut être représenté sous la forme d'une somme de deux vecteurs **x** et **y** tels que le vecteur **x** soit colinéaire au vecteur donné non nul **a**, et le vecteur **y** soit orthogonal au vecteur **a**. Le vecteur **x** s'appelle projection orthogonale du vecteur **b** sur la droite qui porte le vecteur **a**; le vecteur **y** est la composante orthogonale du vecteur **b** par rapport à cette droite.

Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux bases données dans l'espace, les vecteurs de la seconde base s'exprimant au moyen des vecteurs de la première base par les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \qquad (1) \\ \mathbf{e}'_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Les coordonnées α_1, α_2, α_3 d'un vecteur dans la première base s'expriment par ses coordonnées α'_1, α'_2, α'_3 dans la seconde base de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + a_{13}\alpha'_3, \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + a_{23}\alpha'_3, \qquad (2) \\ \alpha_3 &= a_{31}\alpha'_1 + a_{32}\alpha'_2 + a_{33}\alpha'_3 \end{aligned}$$

(les coefficients qui figurent dans les lignes des formules (1) se transforment en coefficients intervenant dans les colonnes des formules (2)).

Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux repères donnés dans l'espace. On admet que l'origine du second repère possède dans le premier les coordonnées a_{10}, a_{20}, a_{30} et que les vecteurs de la seconde base s'expriment en fonction des vecteurs de la première base d'après les formules (1). Dans ce cas les coordonnées x, y, z d'un point dans le premier repère s'expriment en fonction de ses coordon-

nées x', y', z' dans le second repère d'après les formules:

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10},$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20},$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}.$$

Dans les problèmes du § 1, on donne un repère cartésien quelconque qui n'est soumis à aucune condition supplémentaire. Dans les problèmes du § 2, si rien d'autre n'est spécifié, les coordonnées des vecteurs sont définies par rapport à une base orthonormée et celles des points, par rapport à un repère orthonormé. Dans les problèmes du § 3, sauf mention du contraire, les coordonnées des vecteurs sont exprimées par rapport à une base orthonormée directe et celles des points sont définies dans un repère orthonormé dont la base est d'une orientation directe.

§ 1. Relations linéaires

1.1. Démontrer les assertions:

1) un système fini de vecteurs contenant un vecteur nul est lié;

2) un système fini de vecteurs contenant deux vecteurs égaux est lié.

1.2. Est-ce qu'un système composé d'un seul vecteur peut être lié?

1.3. Démontrer que les vecteurs $\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$, $\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ sont linéairement dépendants quels que soient les vecteurs **a**, **b**, **c** et les nombres α, β, γ.

1.4. Etant donné trois vecteurs **a** (1, 2), **b** (—5, —1), **c** (—1, 3), trouver les coordonnées des vecteurs $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $16\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.

1.5. Soient trois vecteurs **a** (1, 3), **b** (2, —1), **c** (—4, 1). Trouver les nombres α et β tels que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

1.6. Vérifier que les vecteurs **a** (—5, —1) et **b** (—1, 3) constituent une base dans le plan. Déterminer les coordonnées des vecteurs **c** (—1, 2) et **d** (2, —6) par rapport à cette base.

1.7. Soient quatre vecteurs **a** (3, 0, —2), **b** (1, 2, —5), **c** (—1, 1, 1), **d** (8, 4, 1). Déterminer les coordonnées des vecteurs $-5\mathbf{a} + \mathbf{b} - 6\mathbf{c} + \mathbf{d}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$.

1.8. Soient quatre vecteurs **a** (4, 1, —1), **b** (3, —1, 0), **c** (—1, 1, 1), **d** (—1, 3, 4). Trouver les nombres α, β, γ tels que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

1.9. Vérifier que les vecteurs **a** (4, 1, —1), **b** (1, 2, —5) et **c** (—1, 1, 1) constituent une base dans l'espace. Trouver les coordonnées des vecteurs **l** (4, 4, —5), **m** (1, 4, —10), **n** (0, 3, —4) dans cette base.

1.10. Vérifier si les vecteurs **l**, **m** et **n** sont coplanaires; en cas de réponse positive indiquer la dépendance linéaire qui les relie (les vecteurs **a**, **b**, **c** sont ici trois vecteurs non coplanaires):

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

1.11. A partir d'un point de l'espace on porte trois vecteurs **a**, **b**, **c**. Démontrer que l'extrémité du vecteur **c** appartient au segment reliant les extrémités des vecteurs **a** et **b** si et seulement si $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, où $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. Dans quel rapport l'extrémité du vecteur **c** partage-t-elle ce segment?

1.12. Dans un parallélogramme $ABCD$ le point K est le milieu du segment BC et le point O, le point d'intersection des diagonales. En adoptant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ pour vecteurs de base, trouver dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$.

1.13. Dans un triangle ABC le point M est le milieu du segment AB et le point O, le point d'intersection des médianes. En adoptant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour vecteurs de base, déterminer dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$.

1.14. Dans un trapèze $ABCD$ les longueurs des bases AD et BC sont dans le rapport $3:2$. En adoptant $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ pour vecteurs de base, trouver dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.15. Les points E et F sont les milieux des côtés AB et CD d'un quadrilatère $ABCD$. Démontrer que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$.

1.16. Soit un hexagone régulier $ABCDEF$. En adoptant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ pour vecteurs de base, trouver dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

1.17. Dans un tétraèdre $OABC$ les points K, L, M, N, P, Q sont les milieux respectifs des arêtes OA, OB, OC, AB, AC, BC, et S est le point d'intersection des médianes du triangle ABC. En adoptant $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ pour vecteurs de base, déterminer dans cette base les coordonnées:

1) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$;

2) des vecteurs $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{KQ}$;

3) des vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{KS}$.

1.18. Soient trois points O, A, B non alignés. En adoptant $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour vecteurs de base, trouver:

1) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ si le point M appartient au segment AB et $|AM|:|BM|=m:n$;

2) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ON}$ si le point N est situé sur la droite AB à l'extérieur du segment AB et $|AN|:|BN|=m:n$.

1.19. On mène la bissectrice AD dans un triangle ABC. Trouver

les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ dans la base formée par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.20. Soit donné un hexagone régulier $ABCDEF$. En adoptant le sommet A pour origine du repère et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ pour vecteurs de base, déterminer les coordonnées des sommets de l'hexagone et de son centre.

1.21. Dans un trapèze $ABCD$ le rapport des longueurs des bases AD et BC vaut 4. En adoptant pour origine des coordonnées le sommet A et pour vecteurs de base les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, trouver les coordonnées des sommets du trapèze, ainsi que les coordonnées du point M d'intersection de ses diagonales et celles du point S d'intersection des côtés latéraux.

1.22. Soit un parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$. En adoptant pour origine des coordonnées le sommet A et pour vecteurs de base les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AA_1}$, trouver les coordonnées:

1) des sommets C, B_1 et C_1;

2) des points K et L, milieux respectifs des arêtes A_1B_1 et CC_1;

3) des points M et N d'intersection des diagonales des faces $A_1B_1C_1D_1$ et ABB_1A_1 respectivement;

4) du point O d'intersection des diagonales du parallélépipède.

1.23. Trois points non alignés A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) sont les sommets consécutifs d'un parallélogramme. Trouver les coordonnées du quatrième sommet D de ce parallélogramme.

1.24. Soient deux points distincts A (x_1, y_1, z_1) et B (x_2, y_2, z_2). Trouver les coordonnées:

1) du point M appartenant au segment AB et tel que $|AM| : |BM| = m : n$;

2) du point N situé sur la droite AB à l'extérieur du segment AB et tel que $|AN| : |BN| = m : n$.

1.25. Soient deux points A (3, —2) et B (1, 4). Le point M est porté par la droite AB, et de plus $|AM| = 3\,|AB|$. Trouver les coordonnées du point M si:

1) M se trouve du même côté du point A que le point B;

2) si M et B sont de part et d'autre du point A.

1.26. Soient trois points non alignés A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3). Trouver les coordonnées du point d'intersection des médianes du triangle ABC.

1.27. Connaissant les rayons vecteurs $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ des sommets A, B, D, A_1 d'un parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$, exprimer en fonction d'eux les rayons vecteurs des quatre autres sommets.

1.28. Le rapport des longueurs des bases AD et BC d'un trapèze $ABCD$ est $m : n$. Exprimer les rayons vecteurs du sommet D, du point M d'intersection des diagonales du trapèze, et du point S d'intersection des côtés latéraux en fonction des rayons vecteurs $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ des sommets A, B, C.

1.29. Démontrer que le rayon vecteur du centre d'un polygone régulier est la moyenne arithmétique des rayons vecteurs de ses sommets.

1.30. Connaissant les rayons vecteurs $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ des sommets d'un triangle, trouver le rayon vecteur du centre du cercle inscrit dans ce triangle.

1.31. Trouver dans le plan du triangle ABC un point O tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$. Existe-t-il de tels points en dehors du plan du triangle ?

1.32. Des masses $m_1, \ldots, m_n$ se concentrent aux points de rayons vecteurs $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$. Trouver le rayon vecteur du centre de gravité de ce système matériel.

1.33. Un fil homogène est ployé sous forme d'un angle AOB de côtés $|OA| = a$ et $|OB| = b$. Trouver les coordonnées du centre de gravité du fil dans le repère O, $\overrightarrow{OA}/a$, $\overrightarrow{OB}/b$.

1.34. Calculer les coordonnées du centre de gravité d'une plaque quadrilatère homogène $ABCD$ de sommets au points A (3, 1), B (7, 3), C (0, 4), D (—1, 2).

1.35. Démontrer que, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

1.36. Les points K et L sont les milieux des côtés AB et BC d'un parallélogramme $OABC$. Démontrer que le point d'intersection des diagonales de $OABC$ coïncide avec le point d'intersection des médianes du triangle OKL.

1.37. On considère sur les côtés AB et AC d'un triangle ABC les points respectifs M et N tels que $|AM| : |BM| = m_1 : n_1$, $|AN| : |CN| = m_2 : n_2$. Soit O le point d'intersection des segments BN et CM. Trouver les rapports $|BO| : |ON|$ et $|CO| : |OM|$.

1.38. En se servant du résultat du problème 1.37 et en posant $m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 1$, démontrer que les médianes du triangle se coupent en un point.

1.39 (s). Le sommet D d'un parallélogramme $ABCD$ est joint à un point K situé sur le côté BC et tel que $|BK| : |KC| = 2 : 3$. Le sommet B est joint à un point L situé sur le côté CD et tel que $|CL| : |LD| = 5 : 3$. Dans quel rapport le point M d'intersection des droites DK et BL partage-t-il les segments DK et BL?

1.40. Les côtés latéraux AB et BC d'un triangle isocèle ABC portent respectivement les points M et N tels que $|AM| : |BM| = m : 1$, $|CN| : |BN| = n : 1$. La droite MN coupe la hauteur BD du triangle au point O. Trouver le rapport $|DO| : |BO|$.

1.41. 1) Démontrer que le segment qui joint les milieux des côtés latéraux d'un trapèze est parallèle aux bases et que sa longueur est égale à la demi-somme des longueurs des bases.

2) Les points E et F sont les milieux des côtés AB et CD d'un

quadrilatère $ABCD$ (dans le plan ou dans l'espace). Démontrer que si $|EF| = (|BC| + |AD|)/2$, $ABCD$ est un trapèze.

1.42. Soient trois points M, N, P situés respectivement sur les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC et soit $|AM| = |AB|/n$, $|BN| = |BC|/n$, $|CP| = |CA|/n$. L'aire du triangle ABC est S. Calculer l'aire d'un triangle obtenu par l'intersection des droites AN, BP et CM. En déduire que les médianes du triangle se coupent en un point.

1.43. Démontrer que quatre segments qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se coupent en un point dans le rapport 3 : 1 en comptant à partir du sommet.

1.44. Démontrer que trois segments qui joignent les milieux des arêtes non coplanaires d'un tétraèdre se coupent en leur milieu.

1.45. Deux points E et F situés sur les diagonales respectives AB_1 et CA_1 des faces latérales d'un prisme triangulaire $ABCA_1B_1C_1$ sont tels que les droites EF et BC_1 soient parallèles. Trouver le rapport $|EF| : |BC_1|$.

1.46. Soit un prisme triangulaire $ABCA_1B_1C_1$ et soient M et N des points qui appartiennent respectivement aux diagonales BC_1 et CA_1 de ses faces latérales. La droite MN est parallèle au plan ABB_1A_1. Trouver le rapport $|CN| : |CA_1|$ si $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$.

§ 2. Produit scalaire des vecteurs

2.1. Calculer le produit scalaire des vecteurs **a** et **b** si:

1) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 45°$;

2) $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 7$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 120°$;

3) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 90°$;

4) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 1$, **a** et **b** sont colinéaires de même sens;

5) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, **a** et **b** sont colinéaires de sens opposés.

2.2. Calculer l'expression $|\mathbf{a}|^2 - \sqrt{3}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 5\,|\mathbf{b}|^2$ si:

1) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 30°$;

2) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 150°$.

2.3. Trouver le produit scalaire des vecteurs **a** et **b** définis par leurs coordonnées:

1) $\mathbf{a}(4, -1)$, $\mathbf{b}(-1, -7)$;

2) $\mathbf{a}(2, 1)$, $\mathbf{b}(1, -3)$;

3) $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(-4, 2)$.

2.4. Trouver l'angle des vecteurs **a** et **b** définis par leurs coordonnées:

1) **a** (1, 2), **b** (2, 4);
2) **a** (1, 2), **b** (4, 2);
3) **a** (1, 2), **b** (—2, 1);
4) **a** (1, —1), **b** (—4, 2);
5) **a** (2, —1), **b** (—4, 2).

2.5. Trouver la distance de A à B, ces points étant définis par leurs coordonnées:

1) A (—1, 2), B (5, 10);
2) A (3, —2), B (3, 3);
3) A (1, 2), B (1, 2).

2.6. Trouver le produit scalaire des vecteurs **a** et **b** définis par leurs coordonnées:

1) **a** (3, 2, —5), **b** (10, 1, 2);
2) **a** (1, 0, 3), **b** (—4, 15, 1);
3) **a** (2, 1, 5), **b** (7, —9, —1).

2.7. Trouver l'angle des vecteurs **a** et **b** définis par leurs coordonnées:

1) **a** (1, —1, 1), **b** (5, 1, 1);
2) **a** (1, —1, 1), **b** (—2, 2, —2);
3) **a** (1, —1, 1), **b** (3, —3, 3);
4) **a** (1, —1, 1), **b** (3, 1, —2);
5) **a** (1, —1, 1), **b** (4, 4, —4).

2.8. Trouver la distance de A à B, ces points étant définis par leurs coordonnées:

1) A (4, —2, 3), B (4, 5, 2);
2) A (—3, 1, —1), B (—1, 1, —1);
3) A (3, —3, —7), B (1, —4, —5).

2.9. Soient trois vecteurs: **a** (—1, 2), **b** (5, 1), **c** (4, —2). Calculer:

1) **b** (**a**, **c**) — **c** (**a**, **b**);
2) | **a** $|^2$ — (**b**, **c**);
3) | **b** $|^2$ + (**b**, **a** + 3**c**).

2.10. Soient trois vecteurs: **a** (1, —1, 1), **b** (5, 1, 1), **c** (0, 3, —2). Calculer:

1) **b** (**a**, **c**) — **c** (**a**, **b**);
2) | **a** $|^2$ + | **c** $|^2$ — (**a**, **b**)·(**b**, **c**);
3) (**a**, **c**)·(**a**, **b**) — | **a** $|^2$ (**b**, **c**).

2.11. Démontrer que les vecteurs **a** et **b** (**a**, **c**) — **c** (**a**, **b**) sont orthogonaux.

2.12. Est-il vrai que la relation (**a**, **b**)·(**c**, **d**) = (**a**, **c**)·(**b**, **d**) a lieu pour tous vecteurs **a**, **b**, **c**, **d**?

2.13. Soient trois vecteurs **a**, **b**, **c** tels que $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Calculer $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

2.14. On connaît la longueur de chaque côté du triangle ABC. Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$ si:

1) $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$;
2) $|AB| = 7$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$;
3) $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AC| = 3$.

2.15. Soit un triangle ABC. Exprimer en fonction de $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

1) la longueur du côté BC;
2) la longueur de la médiane AM;
3) l'aire du triangle.

2.16. Dans un triangle ABC on trace la hauteur AH. Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AH}$ par rapport à la base engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2.17. Démontrer que pour un rectangle quelconque $ABCD$ et un point arbitraire M (appartenant ou n'appartenant pas au plan du rectangle) on a les égalités:

1) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$;
2) $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

2.18. Dans un trapèze $ABCD$ le rapport des longueurs des bases $|AD| : |BC|$ vaut 3. Exprimer en fonction de $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

1) les longueurs des côtés et les angles du trapèze;
2) la longueur du segment SM, où S est le point d'intersection des côtés latéraux du trapèze, M le point d'intersection des diagonales.

2.19 (s). Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ d'un repère cartésien dans le plan sont respectivement égales à $\sqrt{2}$ et 1, et l'angle de ces vecteurs vaut 45°. Calculer les longueurs des diagonales et les angles du parallélogramme construit sur les vecteurs dont les coordonnées dans cette base sont (2, 2) et (—1, 4).

2.20. Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ d'un repère cartésien dans le plan sont 4 et 2 respectivement, et l'angle de ces vecteurs vaut 120°. On considère par rapport à ce repère trois points A (—2, 2), B (—2, —1), C (—1, 0). Trouver les longueurs des côtés et les angles du triangle ABC.

2.21. Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sont respectivement égales à 3, $\sqrt{2}$, 4, et les angles de ces vecteurs sont: $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} =$

$= \widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 45°$, $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)} = 60°$. Calculer les longueurs des côtés et les angles du parallélogramme construit sur les vecteurs dont les coordonnées dans cette base sont (1, —3, 0) et (—1, 2, 1).

2.22. Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont respectivement égales à 1, 1, 2; les angles de ces vecteurs sont: $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = 90°$; $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)} = \widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 60°$. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs **a** (—1, 0, 2) et **b** (2, —1, 1).

2.23. On porte à partir d'un point trois vecteurs **a** (0, —3, 4), **b** (4, 1, —8) et **c**. Le vecteur **c** est de longueur 1 et partage l'angle de **a** et **b** en deux angles égaux. Calculer les coordonnées du vecteur **c**.

2.24 (s). Soient deux vecteurs **a** et **b**, avec $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Exprimer en fonction de **a** et **b** la projection orthogonale du vecteur **b** sur la droite dont la direction est définie par le vecteur **a**.

2.25. Trouver la somme des projections orthogonales du vecteur **a** sur les côtés d'un triangle équilatéral.

2.26. Soit le vecteur **a** (1, 1). Calculer la projection orthogonale du vecteur **b** sur la droite dont la direction est définie par le vecteur **a**, ainsi que la composante orthogonale du vecteur **b** par rapport à cette droite, si le vecteur **b** possède les coordonnées:

1) (1, —3); 2) (1, —1); 3) (3, 3); 4) (—2, —2).

2.27. Soit le vecteur **a** (1, —1, 2). Calculer la projection orthogonale du vecteur **b** sur la droite dont la direction est définie par le vecteur **a**, ainsi que la composante orthogonale du vecteur **b** par rapport à cette droite, si le vecteur **b** a les coordonnées:

1) (2, —2, 4); 2) (1, 1, 2); 3) (4, 0, —2).

2.28. Soient deux vecteurs **a** (3, —1) et **b** (—1, 1). Trouver le vecteur **x** qui vérifie le système des équations $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 13$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = -3$.

2.29. Soient trois vecteurs **a** (4, 1, 5), **b** (0, 5, 2) et **c** (—6, 2, 3). Trouver le vecteur **x** qui vérifie le système des équations $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 18$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 1$.

2.30. Soient un vecteur **a** non nul et un scalaire p. Exprimer en fonction de **a** et p un vecteur **x** qui vérifie l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$.

2.31. Donner une interprétation géométrique de toutes les solutions de l'équation vectorielle $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, ainsi que de sa solution particulière qui est colinéaire au vecteur **a**:

1) dans le cas du plan;

2) dans le cas de l'espace.

2.32. Donner une interprétation géométrique:

1) de la solution du système des équations vectorielles $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = q$ dans le plan (les vecteurs **a** et **b** ne sont pas colinéaires);

2) de la solution du système des équations vectorielles $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = q$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = s$ dans l'espace (les vecteurs **a**, **b**, **c** ne sont pas coplanaires).

2.33 (s). Soient deux vecteurs **a** (1, —1, 1) et **b** (5, 1, 1). Calculer les coordonnées du vecteur **c** dont la longueur est 1 et qui est orthogonal aux vecteurs **a** et **b**. Combien de solutions possède le problème?

2.34. Soient deux vecteurs **a** (1, —1, 1) et **b** (5, 1, 1). Le vecteur **c** de longueur 1 est orthogonal au vecteur **a** et forme avec le vecteur **b** un angle égal à Arccos $(\sqrt{2/27})$. Calculer les coordonnées du vecteur **c**. Combien de solutions possède le problème?

2.35. Dans un triangle isocèle les médianes relatives aux côtés latéraux sont perpendiculaires. Déterminer les angles du triangle.

2.36. Les longueurs des côtés d'un parallélogramme sont dans le rapport $m : n$, et l'angle de ces côtés est α. Déterminer l'angle des diagonales du parallélogramme.

2.37. Dans un quadrilatère convexe la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés de deux autres côtés. Déterminer l'angle des diagonales du quadrilatère.

2.38. Dans un trapèze rectangle les diagonales sont perpendiculaires et le rapport des longueurs des bases est $m : n$ $(m > n)$. Trouver: 1) le rapport des longueurs des côtés latéraux; 2) le rapport des longueurs des diagonales; 3) l'angle aigu du trapèze.

2.39. Démontrer que si dans un triangle les longueurs de deux médianes, de deux hauteurs ou de deux bissectrices sont égales, ce triangle est isocèle.

2.40. Les longueurs des arêtes AA_1, AB et AD d'un parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sont respectivement égales à a, b, c. Les angles BAD, A_1AD et A_1AB sont respectivement égaux à α, β, γ. Calculer la longueur de la diagonale AC_1.

2.41. Soit un tétraèdre $ABCD$. Démontrer que les arêtes BC et AD sont perpendiculaires s'il en est de même des arêtes AB et CD et des arêtes AC et BD.

2.42. Dans un tétraèdre régulier $ABCD$, les points M et P sont les milieux des arêtes AD et CD respectivement, les points N et Q les centres des faces BCD et ABC respectivement. Déterminer l'angle des droites MN et PQ.

2.43. La longueur de l'arête d'un cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$ vaut a. Le point P est le milieu de l'arête CC_1, le point Q le centre de la face AA_1B_1B. Le segment MN dont les extrémités appartiennent aux droites AD et A_1B_1 coupe la droite PQ et est perpendiculaire à cette dernière. Calculer la longueur de ce segment.

2.44. Dans un tétraèdre régulier $ABCD$ les points E et F sont les milieux respectifs des arêtes AD et BC. On choisit un point N sur l'arête CD et un point M sur le segment EF de telle sorte que

$\widehat{MNC}=45°$, $\widehat{NME}=$Arccos (2/3). Dans quel rapport les points M et N partagent-ils les segments EF et CD ?

2.45. Dans une pyramide hexagonale régulière $SABCDEF$ (S est le sommet) la longueur du côté de la base vaut 2. Les sommets K et M d'un losange $KLMF$ appartiennent aux arêtes AB et SD respectivement, $|KM| = 3$ et le segment KL coupe l'arête SB. Calculer le volume de la pyramide.

§ 3. Produits vectoriel et mixte des vecteurs

3.1. Calculer le produit vectoriel des vecteurs **a** et **b** définis par leurs coordonnées:

1) **a** (3, —1, 2), **b** (2, —3, —5);

2) **a** (2, —1, 1), **b** (—4, 2, —2);

3) **a** (6, 1, 0), **b** (3, —2, 0).

3.2. Simplifier les expressions:

1) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]$;

2) $\left[\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}, \quad -\mathbf{a}+2\mathbf{b}-5\mathbf{c}\right]$.

3.3. Démontrer que le produit vectoriel ne varie pas si l'on ajoute à l'un des facteurs un vecteur colinéaire à l'autre facteur.

3.4. Les vecteurs **a** et **b** ne sont pas colinéaires. Pour quelles valeurs du scalaire λ les vecteurs $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}$ et $3\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ sont-ils colinéaires ?

3.5. Les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ forment:

1) une base orthonormée directe;

2) une base orthonormée rétrograde;

3) une base orthogonale directe.

Exprimer les produits vectoriels $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ en fonction des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3.6. Soit $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Déterminer les longueurs des vecteurs **a**, **b**, **c**, ainsi que les angles de ces vecteurs.

3.7. Résoudre les problèmes: 1) 2.33; 2) 2.34 en exigeant de plus que l'orientation du triplet des vecteurs **a**, **b**, **c** coïncide avec celle de la base orthonormée dans laquelle sont définies les coordonnées des vecteurs.

3.8. Sur les vecteurs **a** (2, 3, 1) et **b** (—1, 1, 2) issus d'un même point on construit un triangle. Calculer:

1) l'aire de ce triangle;

2) les longueurs de ses trois hauteurs.

3.9 (s). Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ d'un repère cartésien dans le plan sont respectivement égales à 3 et 2, l'angle de ces vecteurs étant de 30°. Soient (1, 3), (1, 0) et (—1, 2) les coordonnées des trois sommets consécutifs d'un parallélogramme rapporté à ce repère. Calculer l'aire du parallélogramme.

3.10. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère convexe $ABCD$ est égale à la moitié de la longueur du produit vectoriel $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$.

3.11. Démontrer que la somme des vecteurs perpendiculaires aux faces d'un tétraèdre et dirigés vers les sommets opposés à ces faces est nulle si la longueur de chaque vecteur est égale à l'aire de la face correspondante.

3.12. Démontrer que trois vecteurs non colinéaires **a**, **b**, **c** vérifient les égalités $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ si et seulement si $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

3.13. Démontrer les identités:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$;

2) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

2) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}$.

3.14. Soient α, β, γ les angles plans d'un trièdre. Calculer ses angles dièdres.

3.15. Soient deux vecteurs **a** et **b** tels que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Exprimer en fonction de **a** et **b** l'un quelconque des vecteurs vérifiant l'équation $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3.16. Donner une interprétation géométrique de toutes les solutions de l'équation vectorielle $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, ainsi que de sa solution particulière qui est colinéaire au vecteur $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

3.17. Soient **a**, **b**, **c**, **d** quatre vecteurs issus d'un même point. Le vecteur **d** est de longueur 1 et fait avec les vecteurs non coplanaires **a**, **b**, **c**:

1) des angles aigus égaux;
2) des angles obtus égaux.

Exprimer le vecteur **d** en fonction des vecteurs **a**, **b**, **c**.

3.18. A partir d'un même point on porte quatre vecteurs $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$, $\mathbf{b}(-1, 1, 1)$, $\mathbf{c}(5, -1, -1)$ et **d**. Le vecteur **d** est de longueur 1 et forme des angles aigus égaux avec les vecteurs **a**, **b**, **c**. Calculer les coordonnées du vecteur **d**.

3.19. Calculer le produit mixte des vecteurs **a**, **b**, **c** définis par leurs coordonnées:

1) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(7, 3, -5)$, $\mathbf{c}(-2, 2, -2)$;
2) $\mathbf{a}(3, 5, 1)$, $\mathbf{b}(4, 0, -1)$, $\mathbf{c}(2, 1, 1)$;
3) $\mathbf{a}(2, 1, 0)$, $\mathbf{b}(3, 4, -1)$, $\mathbf{c}(-1, -3, 1)$;
4) $\mathbf{a}(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}(5, -2, 1)$, $\mathbf{c}(2, 1, 2)$.

3.20. Vérifier si les vecteurs définis par leurs coordonnées dans une base arbitraire sont coplanaires:

1) $\mathbf{a}(2, 3, 5)$, $\mathbf{b}(7, 1, -1)$, $\mathbf{c}(3, -5, -11)$;
2) $\mathbf{a}(2, 0, 1)$, $\mathbf{b}(5, 3, -3)$, $\mathbf{c}(3, 3, 10)$.

3.21. Les vecteurs **a**, **b**, **c** ne sont pas coplanaires. Pour quelles valeurs du scalaire λ les vecteurs $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$, $7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \lambda^2\mathbf{c}$ sont-ils coplanaires?

3.22. Trois vecteurs non coplanaires **a**, **b**, **c** sont issus d'un même point. Calculer:

1) le volume d'un prisme triangulaire dont la base est construite sur les vecteurs **a** et **b**, l'arête latérale coïncidant avec le vecteur **c**;

2) le volume d'un tétraèdre construit sur les vecteurs **a**, **b**, **c**.

3.23. Soient A (2, 1, —1), B (3, 0, 2), C (5, 1, 1), D (0, —1, 3) les sommets d'un tétraèdre. Calculer:

1) le volume du tétraèdre;

2) la longueur de la hauteur abaissée du sommet C.

3.24. Les longueurs des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ dans l'espace sont respectivement égales à 1, 2, $\sqrt{2}$, et les angles qu'ils forment sont: $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = 120°$, $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)} = 45°$, $\widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = 135°$. Calculer le volume d'un parallélépipède construit sur les vecteurs possédant dans cette base les coordonnées (—1, 0, 2), (1, 1, 3) et (2, —1, 1).

3.25. Soient des vecteurs non colinéaires **a**, **b** et un scalaire p.

1) Trouver l'un quelconque des vecteurs **x** vérifiant l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$.

2) Donner une interprétation géométrique de toutes les solutions de l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$, ainsi que de sa solution particulière qui est orthogonale aux vecteurs **a**, **b**.

3.26. Démontrer les identités:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 + |[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]|^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \cdot |\mathbf{c}|^2$;

2) $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$;

4) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$;

5) $$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix};$$

6) $$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z}) & (\mathbf{b}, \mathbf{z}) & (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \end{vmatrix}.$$

3.27. Démontrer que:

1) si les vecteurs $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ sont coplanaires, il en est de même des vecteurs **a**, **b**, **c**;

2) si les vecteurs $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ sont coplanaires, ils sont aussi colinéaires.

3.28 (s). Deux triplets de vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ sont dits duaux si $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ avec $i \neq j$, et $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = 1$.

1) Démontrer que le triplet $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ dual à $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ existe si et seulement si les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ sont non coplanaires;

2) exprimer dans ce cas les vecteurs $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ en fonction des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

3) Démontrer que si les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ forment une base, les vecteurs du triplet dual engendrent une base de même orientation (base duale à la base $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$).

3.29. Trouver le triplet dual au triplet $\mathbf{a}_1$ (3, 0, 1), $\mathbf{a}_2$ (−1, 1, 2), $\mathbf{a}_3$ (1, 2, 1) (voir problème 3.28).

3.30. Résoudre le systéme d'équations vectorielles dans l'espace: $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = q$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = s$ (les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ne sont pas coplanaires). L'interprétation géométrique de la solution est donnée dans le problème 2.32.

3.31. Le point M appartient à l'arête BB_1 d'un cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Sachant que $|BM| : |MB_1| = 2 : 1$ et que la longueur de l'arête du cube vaut a, calculer la distance entre les droites CD_1 et MD.

3.32. Démontrer que l'aire d'un triangle construit sur les médianes du triangle ABC est égale au 3/4 de l'aire du triangle ABC.

3.33. Soient un triangle ABC et un point H situé sur le côté AC. On mène par H la droite parallèle à BC, qui coupe AB en M. Etant donné que l'aire du triangle BHM est de 4,5 fois inférieure à celle du triangle ABC, calculer le rapport $|AM| : |MB|$.

3.34. Les diagonales d'un trapèze isocèle sont perpendiculaires. Calculer l'aire du trapèze si la longueur de sa hauteur est h.

3.35. L'aire du trapèze $ABCD$ vaut S, le rapport des longueurs de ses bases est $|AD| : |BC| = 3 : 1$. Le segment MN est parallèle au côté CD et couple le côté AB. On a de plus $|AM| : |BN| = 3 : 2$, $|MN| : |CD| = 1 : 3$; le segment AM est parallèle au segment BN. Calculer l'aire du triangle BNC.

3.36. Le point M est le milieu de l'arête latérale AA_1 du parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Les droites BD, MD_1 et A_1C sont perpendiculaires deux à deux. On connaît les longueurs des segments $|BD| = 2a$, $|A_1C| = 4a$, $|BC| = 3a/2$. Trouver la longueur de la hauteur du parallélépipède.

3.37. Démontrer que tout plan qui passe par les milieux de deux arêtes non coplanaires d'un tétraèdre partage celui-ci en deux parties de volumes égaux.

3.38. Soient un tétraèdre régulier $ABCD$ et ses deux sections parallèles aux arêtes AC et BD. Calculer la longueur de l'arête du tétraèdre si les aires des sections sont S_1 et S_2, la distance entre les plans sécants étant d.

3.39. Démontrer que les quatre faces d'un tétraèdre sont de même aire si et seulement si elles sont congruentes.

§ 4. Changement de base et de repère

4.1. Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ deux bases du plan. Les vecteurs de la seconde base possèdent dans la première les coordonnées $(-1, 3)$ et $(2, -7)$ respectivement.

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans la première base si on connaît ses coordonnées α'_1, α'_2 dans la seconde.

2) Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans la seconde base si on connaît ses coordonnées α_1, α_2 dans la première.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans la seconde base.

4.2. Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux bases dans l'espace. Les vecteurs de la seconde base possèdent dans la première les coordonnées $(1, 1, 1)$, $(-1, -2, -3)$, $(1, 3, 6)$ respectivement.

1) Trouver les coordonnées d'un vecteur donné dans la première base si sont connues ses coordonnées α'_1, α'_2, α'_3 dans la seconde.

2) Trouver les coordonnées d'un vecteur donné dans la seconde base si sont connues ses coordonnées α_1, α_2, α_3 dans la première.

3) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ par rapport à la seconde base?

4.3. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ deux repères du plan. L'origine du second repère possède dans le premier les coordonnées $(-1, 3)$, et les vecteurs de base du second repère possèdent dans la base du premier repère les coordonnées $(2, 3)$ et $(1, 1)$ respectivement.

1) Calculer les coordonnées d'un point donné dans le premier repère si on connaît ses coordonnées x', y' dans le second repère.

2) Calculer les coordonnées d'un point donné dans le second repère si on connaît ses coordonnées x, y dans le premier repère.

3) Calculer les coordonnées du point O dans le second repère et les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans la base du second repère.

4.4. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux repères donnés de l'espace. L'origine du second repère possède dans le premier les coordonnées $(1, 1, 2)$, tandis que les vecteurs de base du second repère possèdent dans la base du premier repère les coordonnées $(4, 2, 1)$, $(5, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$ respectivement.

1) Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le premier repère par ses coordonnées x', y', z' dans le second repère.

2) Exprimer les coordonnées x', y', z' d'un point dans le second repère par ses coordonnées x, y, z dans le premier repère.

3) Calculer les coordonnées du point O dans le second repère et les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ dans la base du second repère.

4.5. Les coordonnées x, y de chaque point du plan rapporté au repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ s'expriment en fonction des coordonnées x', y' de ce point dans le repère $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ par les formules $x = 2x' - y' + 5$, $y = 3x' + y' + 2$.

1) Exprimer les coordonnées x', y' en fonction de x et y.

2) Déterminer les coordonnées de l'origine O et des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ du premier repère par rapport au second.

3) Trouver les coordonnées de l'origine O' et des vecteurs de base $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ du second repère par rapport au premier.

4.6. Les coordonnées x, y, z de chaque point de l'espace rapporté au repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ s'expriment en fonction des coordonnées x', y', z' de ce point dans le repère $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ par les formules $x = x' + y' + z' - 1$, $y = -x' + z' + 3$, $z = -x' - y' - 2$.

1) Exprimer les coordonnées x', y', z' en fonction des coordonnées x, y, z.

2) Calculer les coordonnées de l'origine O et des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ du premier repère par rapport au second.

3) Calculer les coordonnées de l'origine O' et des vecteurs de base $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ du second repère par rapport au premier.

4.7. Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans la base $\{\mathbf{e}_1 (2, 3), \mathbf{e}_2 (3, 4)\}$ du plan si sont connues ses coordonnées α'_1, α'_2 par rapport à la base $\{\mathbf{e}'_1 (1, -1), \mathbf{e}'_2 (2, -3)\}$.

4.8. Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans la base $\{\mathbf{e}_1 (1, 3, 2), \mathbf{e}_2 (-1, 1, 0), \mathbf{e}_3 (2, -1, 1)\}$ de l'espace si on connaît ses coordonnées α'_1, α'_2, α'_3 par rapport à la base $\{\mathbf{e}'_1 (-1, 0, 2), \mathbf{e}'_2 (1, 1, 1), \mathbf{e}'_3 (4, 3, -1)\}$.

4.9. Chercher les coordonnées d'un point donné du plan rapporté au repère $\{O (2, -1), \mathbf{e}_1 (1, 5), \mathbf{e}_2 (-1, 4)\}$ si on connaît ses coordonnées x', y' dans le repère $\{O' (3, 2), \mathbf{e}'_1 (1, -1), \mathbf{e}'_2 (4, 2)\}$.

4.10. Calculer les coordonnées d'un point donné de l'espace rapporté au repère $\{O (1, 3, 3), \mathbf{e}_1 (3, 3, 1), \mathbf{e}_2 (3, 5, 2), \mathbf{e}_3 (1, 2, 1)\}$ si sont connues ses coordonnées x', y', z' par rapport au repère $\{O' (-1, 0, 2), \mathbf{e}'_1 (1, -2, 1), \mathbf{e}'_2 (4, 2, 1), \mathbf{e}'_3 (2, -1, 3)\}$.

4.11 (s). Le point E partage la diagonale BD d'un parallélogramme $ABCD$ dans le rapport $|BE| : |ED| = 1 : 2$. Calculer les coordonnées d'un point donné dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ si sont connues ses coordonnées x', y' dans le repère $\{E, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\}$.

4.12. Dans un parallélogramme $ABCD$ les points E et F partagent les côtés respectifs BC et AB dans les rapports $|BE| : |BC| = 1 : 4$, $|BF| : |AF| = 2 : 5$. Exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le repère $\{C, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\}$ en fonction de ses coordonnées x', y' dans le repère $\{E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}\}$.

4.13. Dans un triangle ABC le point D appartient au côté BC et le point E au prolongement du côté AC au-dela du point C. Sachant que $|BD| : |DC| = 1 : 2$ et $|AC| : |CE| = 3 : 1$, exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$

à l'aide de ses coordonnées x', y' dans le repère $\{D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}\}$.

4.14. Dans un triangle ABC le point D appartient au côté AC et le point E au segment BD. Sachant que $|AD| : |AC| = 1 : 3$; $|BE| : |ED| = 2 : 3$, déterminer les coordonnées d'un point donné dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ si on connaît ses coordonnées x', y' dans le repère $\{C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}\}$.

4.15. Soit un hexagone régulier $ABCDEF$. Exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$ par l'intermédiaire de ses coordonnées x', y' dans le repère $\{C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}\}$.

4.16. Les diagonales d'un trapèze $ABCD$ se coupent au point E et les longueurs de ses bases BC et AD sont dans le rapport $2 : 3$. Exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ en fonction de ses coordonnées x', y' dans le repère $\{E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$.

4.17. Dans un trapèze $ABCD$, les longueurs des bases BC et AD sont dans le rapport $3 : 4$, le point E est le milieu de la base AD, et les prolongements des côtés latéraux se coupent au point F. Trouver les coordonnées d'un point donné dans le repère $\{E, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\}$ si sont connues ses coordonnées x', y' dans le repère $\{F, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}\}$.

4.18. La base du prisme $ABCDA_1B_1C_1D_1$ est un losange dont l'angle aigu A est de 60°. Le point K appartient au prolongement de l'arête AB au-delà du point B, l'angle ADK étant droit. Calculer les coordonnées d'un point donné de l'espace rapporté au repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ si on connaît ses coordonnées x', y', z' dans le repère $\{K, \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KC_1}\}$.

4.19. On sait que M est le point d'intersection des médianes de la face $A_1B_1C_1$ d'un prisme triangulaire $ABCA_1B_1C_1$. Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}\}$ en fonction de ses coordonnées x', y', z' dans le repère $\{A_1, \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}\}$.

4.20. Les médianes de la face BCD d'un tétraèdre $ABCD$ se coupent au point M. Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ par l'intermédiaire de ses coordonnées x', y', z' dans le repère $\{M, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\}$.

4.21. Le point M est le centre de la base d'une pyramide hexagonale régulière $SABCDEF$ de sommet S. Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AS}\}$ à l'aide de ses coordonnées x', y', z' dans le repère $\{S, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SM}\}$.

4.22. Soit un parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Calculer les coordonnées d'un point donné de l'espace rapporté au repère $\{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AA_1}\}$ si on connaît ses coordonnées x', y', z' par rapport au repère $\{D_1, \overrightarrow{D_1D}, \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{D_1B}\}$.

4.23. Les coordonnées x, y de chaque point du plan rapporté au premier repère s'expriment dans le second repère en fonction des coordonnées x', y' du même point par les relations $x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}$, $y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}$. Le premier repère est orthonormé. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le second repère soit aussi orthonormé?

4.24. Les coordonnées x, y, z de tout point de l'espace rapporté au premier repère s'expriment en fonction des coordonnées x', y', z' du même point dans le second repère par les relations

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10},$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20},$$
$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}.$$

1) Posons que le premier repère est orthonormé. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le second repère soit aussi orthonormé?

2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'orientation des bases du premier et du second repère soit la même?

4.25. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ deux repères orthonormés du plan tels que l'origine du second repère possède dans le premier repère les coordonnées x_0, y_0, et les vecteurs $\mathbf{e}_2'$ et $\mathbf{e}_2'$ s'obtiennent des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ respectivement par une rotation d'angle φ effectuée dans le sens de la plus courte rotation appliquant $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$.

1) Trouver les coordonnées d'un point donné dans le premier repère si sont connues ses coordonnées x', y' dans le second repère.

2) Trouver les coordonnées d'un point donné dans le second repère si sont connues ses coordonnées x, y dans le premier repère.

3) Trouver les coordonnées du point O dans le second repère.

4.26. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ deux repères orthonormés du plan. L'origine du second repère a, dans le premier, les coordonnées 1, 3, et les vecteurs $\mathbf{e}_1'$ et $\mathbf{e}_2'$ s'obtiennent des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ respectivement par une rotation d'angle φ effectuée dans le sens de la plus courte rotation appliquant $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$. Calculer les coordonnées d'un point donné dans le premier repère si sont connues ses coordonnées x', y' dans le second repère, l'angle φ étant de:
1) 60°; 2) 135°; 3) 90°; 4) 180°.

4.27. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ deux repères orthonormés du plan. L'origine du second repère possède, dans le premier repère, les coordonnées x_0, y_0, et les vecteurs $\mathbf{e}_1'$ et $-\mathbf{e}_2'$ s'obtiennent des

vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ respectivement par une rotation d'angle φ effectuée dans le sens de la plus courte rotation appliquant $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$.

1) Exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le premier repère à l'aide de ses coordonnées x', y' dans le second repère.

2) Exprimer les coordonnées x', y' d'un point dans le second repère par ses coordonnées x, y dans le premier repère.

3) Calculer les coordonnées du point O dans le second repère.

4.28. Dans un triangle rectangle ABC, les longueurs des côtés de l'angle droit sont $|AB| = 3$ et $|BC| = 4$, et le point D est le pied de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit. Les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ sont de longueur 1 et ont respectivement mêmes sens et direction que $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$. Sachant que les coordonnées d'un point dans le repère $\{D, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3\}$ sont x' et y', calculer ses coordonnées dans le repère $\{B, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

4.29. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux repères orthonormés dans l'espace. L'origine du second repère possède dans le premier repère les coordonnées -1, 3, 5. Le vecteur $\mathbf{e}'_1$ forme des angles de 60° avec les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ et un angle aigu avec le vecteur $\mathbf{e}_3$. Le vecteur $\mathbf{e}'_2$ est coplanaire aux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ et forme avec le vecteur $\mathbf{e}_2$ un angle aigu. Les triplets $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ont même orientation. Calculer les coordonnées x, y, z d'un point donné dans le premier repère si on connaît ses coordonnées x', y', z' par rapport au second repère.

4.30. Soient $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ deux repères orthonormés de l'espace, tels que les points O et O' sont distincts et les extrémités des vecteurs $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}'_i$ issus des points respectifs O et O' coïncident ($i = 1, 2, 3$). Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le premier repère par l'intermédiaire de ses coordonnées x', y', z' dans le second repère.

CHAPITRE II

DROITES ET PLANS

Dans ce chapitre, les équations de la droite dans le plan, et les équations des droites et des plans dans l'espace sont utilisées sous les formes vectorielle et analytique. Les notions essentielles sont: *vecteur directeur de la droite*, *vecteurs directeurs du plan*, *vecteur normal à la droite dans le plan*, *vecteur normal au plan*, *faisceau de droites du plan*, *faisceau de plans*, ainsi que *parallélisme*, *perpendicularité*, *angles*, *distances* et *projections*. Partout, sauf dans les problèmes 6.31 et 6.32, on entend sous projection la projection orthogonale.

§ 5. Droite en géométrie plane

Une droite dans le plan peut être définie:

1) par une *équation vectorielle sous forme paramétrique*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \quad (\mathbf{a} \neq 0), \tag{1}$$

où $\mathbf{a}$ est un vecteur directeur de la droite, $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur d'un point fixé de la droite;

2) par une *équation vectorielle normale*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad (\mathbf{n} \neq 0), \tag{2}$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à la droite;

3) par une *équation générale* rapportée à un repère cartésien

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{3}$$

L'équation (2) peut être présentée sous la forme

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D.$$

Si l'équation (1) est écrite dans un repère cartésien, on obtient deux *équations paramétriques* de la droite du plan

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t.$$

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, ces équations se réduisent par élimination du paramètre t à la *forme canonique*:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

Si $\alpha = 0$, l'équation canonique de la droite prend la forme $x = x_0$, et la forme $y = y_0$ si $\beta = 0$.

L'équation de la droite passant par deux points différents s'écrit sous la forme vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\, t,$$

et sous la forme analytique

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

où $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ sont les rayons vecteurs des points donnés, et x_1, y_1, et x_2, y_2 leurs coordonnées cartésiennes. Si $x_1 = x_2$ ou $y_1 = y_2$, l'équation de la droite s'écrit $x = x_1$ ou $y = y_1$ respectivement.

Les vecteurs directeur et normal de la droite donnée sont définis à un facteur scalaire non nul près. Par exemple, le vecteur de coordonnées $-B$, A est un vecteur directeur de la droite définie par l'équation (3), et, si le repère est orthonormé, le vecteur de coordonnées A, B est un vecteur normal à cette droite.

Si la droite est définie par l'équation (3), les coordonnées de tous les points situés d'un côté de cette droite (« dans le demi-plan positif ») vérifient l'inéquation $Ax + By + C > 0$, et celles de tous les points situés de l'autre côté de la droite (« dans le demi-plan négatif ») l'inéquation $Ax + By + C < 0$.

La distance d'un point de rayon vecteur $\mathbf{r}_1$ à une droite définie par l'équation vectorielle (2) vaut $|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})|/|\mathbf{n}|$. La distance d'un point $M(x_1, y_1)$ à une droite définie dans un repère orthonormé par l'équation (3) vaut

$$|Ax_1 + By_1 + C|/\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Equations vectorielles des droites (problèmes 5.1 à 5.5)

5.1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que les droites $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$:

1) se coupent en un point unique;
2) soient parallèles mais ne coïncident pas;
3) coïncident?

5.2. Trouver l'angle de deux droites définies par leurs équations:

1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$;
2) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ et $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

5.3. Deux droites sont définies par les équations vectorielles $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, avec $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$. Quel est le rayon vecteur du point d'intersection des droites?

5.4. Soient le point M_0 de rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ et la droite $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Déterminer les rayons vecteurs:

1) de la projection du point M_0 sur la droite;
2) du point M_1 symétrique de M_0 par rapport à la droite donnée.

5.5. Trouver la distance du point $M_0(\mathbf{r}_0)$ à la droite définie par l'équation :

1) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$; 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

Dans les problèmes 5.6 à 5.20 on donne un repère cartésien quelconque

5.6. Indiquer au moins un vecteur directeur de la droite qui:

1) a le coefficient angulaire k;
2) est définie par l'équation $Ax + By + C = 0$.

5.7. 1) Ecrire les équations paramétriques de la droite $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$ sous la forme $Ax + By + C = 0$.

2) Ecrire l'équation de la droite $3x - 4y + 4 = 0$ sous les formes paramétrique et canonique.

3) Trouver le coefficient angulaire de la droite $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$.

5.8. Etablir l'équation de la droite passant par le point A $(-3, 4)$ et parallèle à la droite:

1) $x - 2y + 5 = 0$; 2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; 3) $x = 2$;

4) $y = -1$; 5) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

5.9. Etablir l'équation de la droite passant par deux points donnés:

1) A $(-3, 1)$ et B $(1, 2)$;
2) A $(0, 2)$ et B $(-1, 0)$;
3) A $(2, 1)$ et B $(2, -5)$;
4) A $(1, -3)$ et B $(3, -3)$.

5.10. Vérifier si deux droites données se coupent, sont parallèles ou coïncident; si les droites se coupent, calculer les coordonnées de leur point d'intersection:

1) $x - 3y - 2 = 0$ et $2x + y - 1 = 0$;
2) $x + 3y - 1 = 0$ et $2 - 2x - 6y = 0$;
3) $-x - y - 3 = 0$ et $3x + 3y + 1 = 0$;
4) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$ et $x = 2 - t$, $y = 2 + t$.

5.11. Pour quelles valeurs de a les droites $ax - 4y = 6$ et $x - ay = 3$:

1) se coupent-elles; 2) sont-elles parallèles; 3) coïncident-elles?

5.12. Pour quelles valeurs de a trois droites $ax + y = 1$, $x - y = a$, $x + y = a^2$ ont-elles un point commun?

5.13. Le point M appartient à la droite $Ax + By + C = 0$; le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ a les coordonnées A, B. Démontrer que le point M_1 se trouve dans le demi-plan positif par rapport à la droite d'équation $Ax + By + C = 0$.

5.14. Le point M $(3, 2)$ est le centre d'un parallélogramme dont les côtés appartiennent à quatre droites. Chacune de ces droites porte l'un des points: P $(2, 1)$, Q $(4, -1)$, R $(-2, 0)$, S $(1, 5)$. Ecrire les équations des droites.

5.15. Etant donné deux sommets $(3, -1)$ et $(1, 4)$ d'un triangle et le point $(0, 2)$ d'intersection de ses médianes, déterminer les coordonnées du troisième sommet et établir les équations de ses côtés.

5.16. Etablir l'équation de la droite qui passe par le point A $(1, 2)$ de telle façon que le segment porté par cette droite et compris entre les droites $3x + y + 2 = 0$ et $4x + y - 1 = 0$ soit partagé par A en deux parties égales.

5.17. Deux médianes d'un triangle appartiennent aux droites $x + y = 3$ et $2x + 3y = 1$, le point A (1, 1) est l'un de ses sommets. Etablir les équations des côtés du triangle.

5.18. Ecrire les équations des droites qui passent par le point A (—1, 5) et sont équidistantes de deux points B (3, 7) et C (1, —1).

5.19 (s). Etablir les équations des droites équidistantes de trois points A (3, —1), B (9, 1) et C (—5, 5).

5.20. On mène par le sommet C d'un parallélogramme $ABCD$ une droite qui coupe les prolongements des côtés AB et AD aux points respectifs K et L de telle sorte que $|AK| / |AB| = 5 |AL| / |AD|$. Trouver le rapport de l'aire du parallélogramme à celle du triangle AKL.

Dans les problèmes 5.21 à 5.52 on donne un repère orthonormé

5.21. Indiquer au moins un vecteur normal à la droite qui:
1) possède le coefficient angulaire k;
2) est définie par l'équation $Ax + By + C = 0$.

5.22. Etablir l'équation de la droite passant par le point A (—3, 4) et perpendiculaire à la droite:

1) $x-2y+5=0$; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$;

3) $x = 2$; 4) $y = -1$; 5) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

5.23. Le point A (3, —2) est le sommet d'un carré et le point M (1, 1) le point d'intersection de ses diagonales. Etablir les équations des côtés du carré.

5.24. La longueur du côté d'un losange d'angle aigu de 60° vaut 2. Les diagonales du losange se coupent au point M (1, 2), de plus la diagonale principale est parallèle à l'axe des abscisses. Former les équations des côtés du losange.

5.25. Trouver sur la droite $5x - y - 4 = 0$ un point équidistant des points A (1, 0) et B (—2, 1).

5.26. Calculer la distance du point A (1, —2) à la droite définie par son équation:

1) $2x - 3y + 5 = 0$; 2) $4x - 3y - 15 = 0$;
3) $4x = 3y$; 4) $4x - 3y - 10 = 0$;
5) $x = 7$; 6) $y = 9$.

5.27. Déterminer la distance séparant deux droites parallèles $Ax + By + C_1 = 0$ et $Ax + By + C_2 = 0$.

5.28. Etablir les équations des droites parallèles à la droite $-2x + y + 5 = 0$ et se trouvant à la distance $\sqrt{20}$ du point A (1, —2).

5.29. Le point A appartient à la droite $2x - 3y + 4 = 0$. La distance de A à la droite $3y = 4x$ vaut 2. Déterminer les coordonnées du point A.

5.30. Le point A appartient à la droite $x + y = 8$ et est équidistant du point B (2, 8) et de la droite $x - 3y + 2 = 0$. Calculer les coordonnées du point A.

5.31. Trouver l'ensemble des points du plan tels que le rapport de leurs distances à deux droites concourantes $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ soit une constante $k > 0$.

5.32 (s). Soient le point A (1, 2) et la droite $3x - y + 9 = 0$. Déterminer les coordonnées:

1) de la projection du point A sur la droite;

2) du point B symétrique de A par rapport à la droite.

5.33. Etablir l'équation de la droite symétrique de la droite $3x - y + 5 = 0$ par rapport à la droite $x + y = 1$.

5.34. Soient les équations des côtés d'un triangle: $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$. Etablir l'équation de la hauteur abaissée sur le troisième côté.

5.35. Le point H (—3, 2) est le point d'intersection des hauteurs du triangle dont deux côtés appartiennent aux droites $y = 2x$ et $y = -x + 3$. Etablir l'équation du troisième côté.

5.36. On donne les coordonnées de deux sommets A (—1, 3), B (2, 5) d'un triangle et celles du point H (1, 4) d'intersection de ses hauteurs. Calculer les coordonnées du troisième sommet du triangle et établir les équations de ses côtés.

5.37. Le point A (1, 2) est le milieu d'une des bases d'un trapèze rectangle et le point B (3, —1), celui du segment joignant les milieux des côtés latéraux. Le côté latéral perpendiculaire aux bases appartient à la droite $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$. Etablir les équations des autres côtés du trapèze.

5.38. Les points K (1, 3) et L (—1, 1) sont les milieux des bases d'un trapèze isocèle, tandis que les points P (3, 0) et Q (—3, 5) appartiennent à ses côtés latéraux. Ecrire les équations des côtés du trapèze.

5.39. Calculer l'angle de deux droites:

1) $2x + y - 1 = 0$ et $y - x = 2$;

2) $x = 4$ et $2x - y - 1 = 0$;

3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-4}$ et $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$;

4) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$ et $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-4}$;

5) $x = 3t$, $y = -1 + 2t$ et $x = 1 - 2t$, $y = -5 + t$.

5.40. Etablir les équations des droites qui passent par le point A (3, 1) et font un angle de 45° avec la droite $3x = y + 2$.

5.41. Le point A (2, 0) est le sommet d'un triangle équilatéral, tandis que le côté qui lui est opposé appartient à la droite $x + y - 1 = 0$. Etablir les équations de deux autres côtés.

5.42. La base d'un triangle isocèle appartient à la droite $x + 2y = 1$, et l'un de ses côtés latéraux, à la droite $y + 2x = 1$. Ecrire l'équation de l'autre côté latéral du triangle, sachant que sa distance au point d'intersection des droites données vaut $1/\sqrt{5}$.

5.43. On considère l'angle des droites $y = x + 1$ et $y = 7x + 1$ qui contient le point A (1, 3). Déterminer les coordonnées du point B situé à l'intérieur de cet angle et distant de $4\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ respectivement par rapport aux droites données.

5.44 (s). Etablir l'équation de la bissectrice de l'angle formé par les droites $x - 7y = 1$ et $x + y = -7$ et contenant le point A (1, 1).

5.45. Ecrire l'équation de la bissectrice de l'angle aigu des droites $x - 7y = 1$ et $x + y = -7$.

5.46. Etablir les équations des bissectrices des angles intérieurs du triangle dont les côtés sont définis par les équations $3y = 4x$, $4y = 3x$, $5x + 12y = 10$.

5.47. Les points A (20, 15), B (−16, 0), C (−8, −6) sont les sommets d'un triangle. Déterminer les longueurs des rayons des cercles inscrit et circonscrit et les coordonnées de leurs centres.

5.48. On donne les coordonnées de deux sommets A (2, −1) et B (1, 5) d'un triangle et celles du point L (3, 0) d'intersection de ses bissectrices. Former les équations des côtés du triangle.

5.49. Les points A (1, 2) et B (−3, 0) sont les sommets d'un triangle isocèle ABC, les angles égaux A et B valent Arc cos $(1/\sqrt{5})$. Déterminer les coordonnées du sommet C, sachant qu'il se trouve du même côté de la droite AB que le point M (2, 3).

5.50. Le côté AB du triangle ABC est défini par l'équation $x - y + 1 = 0$, le côté BC par l'équation $2x - 3y + 5 = 0$, le côté AC par l'équation $3x - 4y + 2 = 0$. Etablir l'équation de la droite qui passe par le sommet C de telle sorte que le point d'intersection de cette droite avec le côté AB soit à la distance 1/5 du côté AC.

5.51. Calculer le rayon et les coordonnées du centre d'un cercle passant par le point A (−1, 3) et tangent aux droites $7x + y = 0$ et $x - y + 8 = 0$.

5.52. L'hypoténuse d'un triangle rectangle appartient à la droite $2x + y - 2 = 0$, le point C (3, −1) étant le sommet de l'angle droit. L'aire du triangle vaut 9/4. Etablir les équations des droites portant les côtés de l'angle droit.

Changement de repère
(problèmes 5.53 à 5.57)

5.53. Soient deux repères $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. L'origine du second repère a, dans le premier repère, les coordonnées a_{10}, a_{20}, et les vecteurs de base du second repère ont, dans le premier, les

coordonnées a_{11}, a_{21} et a_{12}, a_{22} respectivement. Dans le premier repère la droite est définie par l'équation $Ax + By + C = 0$. Etablir l'équation de cette droite dans le second repère.

5.54. Soient dans le plan trois points A (2, 3), B (1, 4), $C(-1, 2)$ et la droite $x - 5y + 7 = 0$. Ecrire l'équation de cette droite dans le nouveau repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$.

5.55. Les droites $3y = x + 2$ et $3x + 2y - 5 = 0$ sont respectivement les axes $O'x'$ et $O'y'$ d'un nouveau repère dans lequel le point A $(-1, 2)$ possède les coordonnées (1, 1).

1) Exprimer les coordonnées x, y d'un point dans le repère initial par l'intermédiaire de ses coordonnées x', y' dans le nouveau repère.

2) Etablir, dans le nouveau repère, l'équation de la droite qui dans le repère initial est définie par l'équation $5x - 4y + 7 = 0$.

5.56. Dans le repère orthonormé $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, la droite est définie par l'équation $\sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$. L'origine du nouveau repère orthonormé se trouve au point O' $(-2, 3)$, et les vecteurs de base $\mathbf{e}_1'$ et $\mathbf{e}_2'$ s'obtiennent à partir des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ respectivement lorsqu'on les fait tourner d'un angle de 30° dans la direction de la plus courte rotation appliquant $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$. Etablir l'équation de la droite considérée dans le repère $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$.

5.57. Deux droites perpendiculaires définies dans un repère orthonormé par les équations $2x - y + 1 = 0$ et $x + 2y - 7 = 0$ sont respectivement les axes $O'x'$ et $O'y'$ d'un nouveau repère orthonormé, et le point A (2, 0) a dans ce repère des coordonnées strictement positives.

1) Déterminer, dans le repère initial, les coordonnées du point dont on connaît les coordonnées x', y' dans le nouveau repère.

2) Etablir, dans le nouveau repère, l'équation de la droite qui, dans le repère initial, est définie par l'équation $4x + y - 1 = 0$.

§ 6. Plan et droite dans l'espace

Un plan peut être défini :

1) par une *équation paramétrique vectorielle*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v \quad ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0), \tag{1}$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs directeurs du plan, $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du point fixé dans le plan ;

2) par une *équation vectorielle normale*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad (\mathbf{n} \neq 0), \tag{2}$$

où $\mathbf{n}$ est un vecteur normal au plan

3) par une *équation générale* rapportée à un repère cartésien

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \tag{3}$$

L'équation (2) peut être écrite sous la forme

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D,$$

et l'équation (1) sous la forme

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})=0. \quad (4)$$

Si l'équation (1) est écrite dans un repère cartésien quelconque, on obtient les équations paramétriques du plan

$$x=x_0+\alpha_1 u+\alpha_2 v,\ y=y_0+\beta_1 u+\beta_2 v,\ z=z_0+\gamma_1 u+\gamma_2 v.$$

L'équation (4) présentée sous la forme analytique est équivalente à l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0.$$

L'équation du plan passant par trois points non alignés peut être écrite sous la forme vectorielle

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)=0$$

ou bien sous la forme analytique

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0,$$

où x_i, y_i, z_i, $i=0, 1, 2$, sont les coordonnées cartésiennes des points donnés et $\mathbf{r}_i$ les rayons vecteurs correspondants.

Tout vecteur $\mathbf{a}$ (α, β, γ) coplanaire à un plan défini dans le repère cartésien par l'équation (3) satisfait à l'équation $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$. Si le repère est orthonormé, le vecteur de coordonnées A, B, C par exemple est un vecteur normal au plan (3).

Si le plan est défini par l'équation (3), les coordonnées de tous les points situés d'un côté du plan (dans le « demi-espace positif ») vérifient l'inéquation $Ax+By+Cz+D>0$, et les coordonnées de tous les points situés de l'autre côté (dans le « demi-espace négatif ») l'inéquation $Ax+By+Cz+D<0$.

La distance d'un point de rayon vecteur $\mathbf{r}_1$ à un plan défini par l'équation (2) vaut $|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})|/|\mathbf{n}|$. La distance d'un point $M(x_1, y_1, z_1)$ à un plan défini dans un repère orthonormé par l'équation (3) est

$$|Ax_1+By_1+Cz_1+D|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

La droite peut être définie dans l'espace:

1) par une *équation paramétrique vectorielle*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t \quad (\mathbf{a}\neq 0), \quad (5)$$

où $\mathbf{a}$ est un vecteur directeur de la droite, $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur du point fixé de la droite;

2) par des *équations vectorielles*

$$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]=0 \quad (\mathbf{a}\neq 0)$$

ou

$$[\mathbf{r},\ \mathbf{a}]=\mathbf{b} \quad (\mathbf{a}\neq 0,\ (\mathbf{a},\ \mathbf{b})=0).$$

Si l'équation (5) est écrite dans un repère cartésien, on obtient les *équations paramétriques* de la droite

$$x=x_0+\alpha t,\ y=y_0+\beta t,\ z=z_0+\gamma t.$$

En éliminant le paramètre t, on aboutit à la *forme canonique*

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Si $\gamma = 0$, les équations canoniques deviennent

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}, \quad z=z_0.$$

On écrit de façon analogue les équations canoniques de la droite si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Si $\beta = \gamma = 0$, ces équations prennent la forme $y = y_0$, $z = z_0$. De façon analogue s'écrivent les équations canoniques si un autre couple de composantes du vecteur directeur est nul.

L'équation de la droite passant par deux points distincts peut être définie sous la forme vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\, t$$

ainsi que sous la forme analytique

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ sont ici les rayons vecteurs des points donnés, et (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), leurs coordonnées cartésiennes. Si $x_1 = x_2$, l'équation de la droite prend la forme $x = x_1$, $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, l'équation de la droite s'écrit sous la forme $x = x_1$, $y = y_1$. De façon analogue sont étudiés les autres cas de coïncidence d'une ou de deux coordonnées des points.

Une droite peut également être définie comme intersection de deux plans non parallèles donnés par leurs équations.

Equations vectorielles de droites et de plans (problèmes 6.1 à 6.12)

6.1. Ecrire l'équation:
1) du plan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ sous la forme $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;
2) de la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ sous la forme $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;
3) de la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ sous la forme $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$;
4) de la droite $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, sous la forme $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;
5) de la droite $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, sous la forme $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

6.2. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les plans $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ et $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$:
1) se coupent suivant une droite;
2) soient parallèles non confondus;
3) coïncident.

6.3. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les droites $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$:
1) se coupent (c'est-à-dire aient un point commun unique);
2) soient non coplanaires;
3) soient parallèles distinctes;
4) coïncident.

6.4. Soient la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ et le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que:

1) la droite coupe le plan (ils possèdent un point commun unique);

2) ils soient parallèles (sans points communs);

3) la droite appartienne au plan?

6.5. Déterminer le rayon vecteur du point d'intersection:

1) de la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ et du plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ (si $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$);

2) de la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ et du plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ (si $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$).

6.6. Le point M_0 est défini par le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$. Etablir les équations:

1) d'une droite qui passe par le point M_0 et qui est perpendiculaire au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;

2) d'un plan qui passe par le point M_0 et qui est perpendiculaire à la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

6.7. Etablir l'équation vectorielle d'un plan qui passe par la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ et par le point M_1 $(\mathbf{r}_1)$ n'appartenant pas à cette droite.

6.8. Soient le point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ et le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Déterminer le rayon vecteur:

1) de la projection du point M_0 sur le plan;

2) du point M_1 symétrique de M_0 par rapport au plan.

6.9. Soient le point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ et la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$. Trouver le rayon vecteur:

1) de la projection du point M_0 sur la droite;

2) du point M_1 symétrique de M_0 par rapport à la droite.

6.10. Ecrire les équations:

1) de la projection de la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ sur le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ non perpendiculaire à cette droite;

2) de la droite qui coupe la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ sous un angle droit et qui passe par le point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ n'appartenant pas à la droite donnée (c'est-à-dire l'équation de la perpendiculaire abaissée du point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ sur la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$);

3) de la droite qui coupe deux droites non coplanaires $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ et qui passe par le point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ n'appartenant à aucune de ces droites;

4) de la droite qui coupe deux droites non coplanaires $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ sous des angles droits (c'est-à-dire l'équation de la perpendiculaire commune à ces droites).

6.11. Déterminer la distance:

1) du point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;

2) de deux plans parallèles $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$;

3) de deux plans parallèles $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$ et $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$;

4) du point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ à la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$;

5) du point M_0 $(\mathbf{r}_0)$ à la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;

6) de deux droites parallèles $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t$;
7) de deux droites parallèles $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$ et $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$;
8) de deux droites non coplanaires $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$;
9) de deux droites non coplanaires $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$ et $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$.

6.12. Soient la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ et le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ non parallèles. Le point M appartient à la droite et se trouve à la distance ρ du plan. Déterminer le rayon vecteur du point M.

Dans les problèmes 6.13 à 6.42 on donne un repère cartésien quelconque

6.13. Le point M appartient au plan $Ax + By + Cz + D = 0$, et le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ possède les coordonnées (A, B, C). Démontrer que le point M_1 appartient au demi-espace positif limité par le plan considéré.

6.14. 1) Sachant que les équations paramétriques du plan sont $x = 1 + u - v$, $y = 2 + u + 2v$, $z = -1 - u + 2v$, établir son équation générale.
2) Connaissant l'équation générale du plan $2x - 3y + z + 1 = 0$, écrire ses équations paramétriques.

6.15. Démontrer que le vecteur directeur $\mathbf{a}$ de la droite définie comme l'intersection de deux plans $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ peut être obtenu d'après la règle du « produit vectoriel »

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

non seulement dans un repère orthonormé direct mais aussi dans un repère cartésien quelconque.

6.16. 1) Ecrire les équations de la droite $x = 2 + 3t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$ sous la forme d'intersection de deux plans et sous la forme canonique.
2) Ecrire les équations de la droite $x - y + 2z + 4 = 0$, $-2x + y + z + 3 = 0$ sous la forme paramétrique et sous la forme canonique.

6.17. Etablir l'équation du plan passant par le point A (1, —1, 2) et parallèle au plan:
1) $x - 3y + 2x + 1 = 0$; 2) $x = 5$;
3) $y = 4$; 4) $z = 3$;
5) $x = 4 - u + v$, $y = 2 + u + 2v$, $z = -1 + 7u + 3v$.

6.18. Ecrire l'équation de la droite passant par le point A (1, 3, 1) et parallèle à la droite:
1) $x + y - z + 2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;
2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$;

3) $x = 2, \quad y = 3$;
4) $x = 0, \quad z = 0$;
5) $y = -1, \quad z = 2$.

6.19. Ecrire l'équation de la droite passant par deux points donnés:
1) $A\,(1, 3, -1)$ et $B\,(4, 2, 1)$;
2) $A\,(3, 2, 5)$ et $B\,(4, 1, 5)$;
3) $A\,(-1, 1, 2)$ et $B\,(5, 1, 2)$.

6.20. Etablir l'équation du plan passant par trois points donnés (si ces points définissent un plan)
1) $A\,(2, 1, 3)$, $B\,(-1, 2, 5)$, $C\,(3, 0, 1)$;
2) $A\,(1, -1, 3)$, $B\,(2, 3, 4)$, $C\,(-1, 1, 2)$;
3) $A\,(3, 0, 0)$, $B\,(0, -1, 0)$, $C\,(0, 0, 4)$;
4) $A\,(2, 1, 1)$, $B\,(2, 0, -1)$, $C\,(2, 4, 3)$;
5) $A\,(1, 1, 2)$, $B\,(2, 3, 3)$, $C\,(-1, -3, 0)$.

6.21. Soient deux plans. Etablir s'ils sont sécants, parallèles ou confondus. Si les plans sont sécants, établir les équations canoniques de la droite d'intersection. Les plans sont définis par les équations:
1) $3x + y - z + 1 = 0$ et $5x + 3y + z + 2 = 0$;
2) $x + y - 2z + 1 = 0$ et $6z - 3x - 3y - 3 = 0$;
3) $-x + y + z = 1$ et $x - y - z = 2$;
4) $x = 3 + u + v$, $y = 2 - u + v$, $z = 3u - 2v$ et $x = 5 - u$, $y = 3 + v$, $z = u + 2v$.

6.22. Pour quelles valeurs de a les plans $x + ay + z - 1 = 0$ et $ax + 9y + \frac{a^3}{9} z + 3 = 0$:
1) se coupent-ils; 2) sont-ils parallèles; 3) coïncident-ils?

6.23. Vérifier si la droite donnée appartient au plan $x - 3y + z + 1 = 0$, est parallèle à ce dernier ou le coupe en un seul point; dans le dernier cas déterminer les coordonnées du point d'intersection. La droite est définie par les équations:
1) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{7}$;
2) $x = 2 + 3t, \quad y = 7 + t, \quad z = 1 + t$;
3) $x - y + 2z = 0, \quad x + y - 3z + 2 = 0$;
4) $3x - 2y - 1 = 0, \quad 7y - 3z - 4 = 0$;
5) $x = 2, \quad y = 5 + t, \quad z = 4 + 3t$.

6.24. Pour quelles valeurs de a la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-2}{-1}$:
1) coupe-t-elle le plan $3a^2x + ay + z - 4a = 0$;
2) est-elle parallèle à ce plan;
3) appartient-elle à ce plan?

6.25. Soient deux droites. Etablir si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou non coplanaires. Si les droites se coupent ou sont parallèles, établir l'équation du plan auquel elles appartien-

nent. Si les droites se coupent, déterminer également les coordonnées de leur point d'intersection. Les droites sont définies par les équations:

1) $x + z - 1 = 0,\ 3x + y - z + 13 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0,\ y + 2z - 8 = 0$;

2) $x = 3 + t,\quad y = -1 + 2t,\quad z = 4,$ et $x + y - z = 0,\ 2x - y + 2z = 0$;

3) $x = 2 + 4t,\quad y = -6t,\quad z = -1 - 8t,$ et $x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t,\quad z = 12t$;

4) $x = 9t,\ y = 5t,\ z = -3 + t,$ et $2x - 3y - 3z - 9 = 0,\ x - 2y + z + 3 = 0$;

5) $x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t,$ et $x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t.$

6.26. Pour quelles valeurs de a les droites

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a} \quad \text{et} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}:$$

1) se coupent-elles;
2) sont-elles non coplanaires;
3) sont-elles parallèles;
4) coïncident-elles?

6.27. Etudier la position relative de trois plans; s'il existe des points appartenant simultanément aux trois plans, déterminer les coordonnées de ces points. Les plans sont définis par les équations:

1) $2x + 3y - 4z - 1 = 0,\quad -x + 5y - z - 3 = 0,\quad 3x - 10y + 7z = 0$;

2) $x + y - 2z + 1 = 0,\ -x - y + 2z + 1 = 0,\ 2x + 2y - 4z = 0$;

3) $x + 2y - z - 1 = 0,\ -2x - 4y + 2z + 2 = 0,\ 4 + 4z - 4x - 8y = 0$;

4) $5x - 2y + 4 = 0,\ 3x + z - 5 = 0,\ 8x - 2y + z + 7 = 0$;

5) $5x - 2y + 4 = 0,\ 3x + z - 5 = 0,\ 8x - 2y + z - 1 = 0.$

6.28. Ecrire l'équation du plan passant par le point A (1, 3, 0) et parallèle aux droites $x + y - z + 3 = 0,\ 2x - y + 5z + 1 = 0,$ et $-x + y = 1,\ 5x + y - z + 2 = 0.$

6.29. Ecrire l'équation du plan passant par la droite $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$ et parallèle à la droite $\frac{x}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}$.

6.30. Ecrire l'équation du plan passant par le point A (−1, 1, 2) et par la droite définie par les équations:

1) $x = 1 + 5t,\quad y = -1 + t,\quad z = 2t$;

2) $x + 5y - 7z + 1 = 0,\quad 3x - y + 2z + 3 = 0.$

6.31. On projette une droite sur le plan Oyz parallèlement à l'axe Ox. Etablir les équations de la projection si la droite est définie par les équations:

1) $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 - t$;
2) $x + y + z - 1 = 0, \quad x + 2y - 3z + 2 = 0$.

6.32. On projette une droite sur le plan $x + 2y - 3z + 2 = 0$ parallèlement au vecteur **a** (2, 1, —1). Etablir les équations de la projection si la droite est définie par les équations:

1) $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = -6 - t$;
2) $x + y + z - 1 = 0, \quad y - 3z + 4 = 0$.

6.33. Trois faces d'un parallélépipède appartiennent aux plans $x - 3z + 18 = 0, 2x - 4y + 5z - 21 = 0, 6x + y + z - 30 = 0$, et l'un de ses sommets A possède les coordonnées (—1, 3, 1). Etablir les équations des autres faces du parallélépipède et de sa diagonale passant par le sommet A.

6.34. Les points A (1, 0, 3) et B (—1, 2, 1) sont les sommets d'un tétraèdre $ABCD$, le point K (—1, 5, 2) est le milieu de l'arête BC, quant au point M (0, 1, 4), il est le point d'intersection des médianes de la face BCD. Etablir les équations des plans auxquels appartiennent les faces du tétraèdre.

6.35. Ecrire les équations de la droite qui passe par le point O (0, 0, 0) et coupe deux droites données:

1) $x - y + z + 2 = 0, \quad x - 2y + 3z - 8 = 0$, et $y - z + 1 = 0, x + y - 2z + 4 = 0$;
2) $x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = -t$, et $x = 4t, y = 5 - 5t, z = 3 + 2t$.

6.36. Etablir les équations de la droite qui passe par le point A (—1, 1, —1) et coupe deux droites données:

1) $x - y + z + 2 = 0, x - 2y + 3z - 8 = 0$, et $y - z = 0, x + y - 2z + 4 = 0$;
2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$ et $\frac{x}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{2}$.

6.37. Etablir les équations de la droite qui coupe deux droites $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ et $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ et qui est parallèle à la droite $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

6.38. Ecrire les équations des plans passant par la droite $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$ et équidistants des points A (1, 2, 5) et B (3, 0, —1).

6.39. Ecrire les équations des plans passant par le point A (1, 0, 4) et équidistants de trois points B (2, 1, 6), C (—2, 3, 2), et D (8, 1, 0).

6.40. Ecrire les équations des plans équidistants de quatre points A (1, —1, 3), B (3, 3, 5), C (1, 7, 3), et D (5, 1, 5).

6.41. Le plan (π) contient les points A, B, C, S et coupe les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz aux points P, Q, R, et les plans de coordonnées Oxy, Oxz, Oyz suivant les droites (L_1), (L_2), (L_3). On

choisit dans le plan (π) le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ et on pose que le point S possède dans ce repère les coordonnées (3, 4). On sait de plus que les points A, B, C ont dans le repère initial $Oxyz$ les coordonnées respectives:

a) (1, 2, 1), (—1, 3, 2), (1, 4, 0);
b) (2, 1, 1), (2, 3, 0), (1, 1, 2);
c) (1, —1, 0), (1, 0, —1), (0, 1, 1).

1) Calculer les coordonnées des points P, Q, R, S et établir les équations des droites (L_1), (L_2), (L_3) dans le repère initial.

2) Calculer les coordonnées des points P, Q, R et établir les équations des droites (L_1), (L_2), (L_3) dans le repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$.

6.42 (s). On mène par le sommet C_1 du parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un plan qui coupe les prolongements des arêtes AB, AD et AA_1 aux points respectifs B_0, D_0 et A_0 tels que $\frac{|AB_0|}{|AB|} = \frac{|AD_0|}{|AD|} = 3\frac{|AA_0|}{|AA_1|}$. Trouver le rapport du volume du parallélépipède à celui du tétraèdre $AB_0D_0A_0$.

Dans les problèmes 6.43 à 6.87 on donne un repère orthonormé

6.43. Trouver un vecteur normal au plan:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$;

2) $x = x_0 + a_1u + a_2v, \quad y = y_0 + b_1u + b_2v, \quad z = z_0 + c_1u + c_2v$.

6.44. Etablir les équations de la droite passant par le point A (1, —1, 2) et perpendiculaire au plan:

1) $x - 3y + 2z + 1 = 0$; 2) $x = 5$; 3) $y = 4$;
4) $z = 3$; 5) $x = 4 - u + v, \quad y = 2 + u + 2v, \quad z = -1 + 7u + 3v$.

6.45. Ecrire l'équation du plan passant par le point A (1, 3, 1) et perpendiculaire à la droite:

1) $x + y - z + 2 = 0, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0$;
2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$; 3) $x = 2, \ y = 3$;
4) $x = 0, \quad z = 0$; 5) $y = -1, \quad z = 2$.

6.46. Ecrire l'équation du plan passant par le point A (2, 1, —1) et perpendiculaire à deux plans $x - y + 5z + 1 = 0$ et $2x + y = 3$.

6.47. Ecrire l'équation du plan perpendiculaire au plan $x + 3y - z + 2 = 0$ et passant par la droite:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$;
2) $2x - y + z = 0, \quad x + 2y + z - 3 = 0$.

6.48. Dans un faisceau défini par les plans $x + 2y - 3z + 5 = 0$ et $4x - y + 3z + 5 = 0$ trouver deux plans perpendiculaires dont l'un passe par le point M (1, 3, 1).

6.49. Le point A appartient à la droite $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$ et est équidistant des points B (3, 0, —2) et C (—1, 1, 5). Calculer les coordonnées du point A.

6.50. Calculer la distance du point A (3, 1, —1) au plan:
1) $x-y-5z+2=0$; 2) $x-2y+2z-2=0$;
3) $x-2y+2z+7=0$; 4) $x-2y+2z=0$;
5) $x-2y+2z+1=0$; 6) $x=1$; 7) $y=5$; 8) $z=0$.

6.51. Calculer la distance des plans parallèles:
1) $6x-3y+2z+5=0$ et $6x-3y+2z-9=0$;
2) $2x+2y-z+3=0$ et $2x+2y-z+18=0$;
3) $3x+4z+1=0$ et $6x+8z-1=0$.

6.52. 1) Ecrire les équations des plans parallèles au plan $6x-3y+2z+5=0$ et se trouvant à une distance égale à 3 de ce dernier.

2) Etablir les équations des plans parallèles au plan $x+3y-z+\sqrt{11}=0$ et se trouvant à une distance égale à 3 de ce dernier.

3) Etablir les équations des plans parallèles au plan $2x+2y-z+3=0$ et dont la distance au point A (1, 2, —1) est égale à 3.

4) Etablir les équations des plans parallèles au plan $3x+4z+1=0$ et dont la distance à l'origine du repère est égale à 3.

6.53. Le point A appartient à la droite $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$. La distance du point A au plan $x+y+z+3=0$ vaut $\sqrt{3}$. Calculer les coordonnées du point A.

6.54. Le point A appartient à la droite $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+4}{-5}$ et est équidistant du point B (0, 1, 1) et du plan $2x-y+2z+1=0$. Calculer les coordonnées du point A.

6.55. Les points A (1, —1, 2) et B (3, 0, 4) sont les sommets d'un cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à la droite $x=0$, $y-z=0$. L'orientation du triplet des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ coïncide avec celle du repère, la somme des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AA_1}$ étant strictement négative. Etablir les équations des faces du cube.

6.56. Les points A (—3, 0, 0) et B (3, 0, 0) sont les sommets d'un tétraèdre régulier $ABCD$. Le sommet C se trouve à une distance égale à $3\sqrt{2}$ du plan de coordonnées Oxy, toutes les coordonnées du point C étant positives. L'orientation du triplet des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ coïncide avec celle du repère. Etablir les équations des faces du tétraèdre.

6.57. Etant donné le point A (3, —1, 1), calculer:

1) les coordonnées des projections du point A sur les plans de coordonnées, et les coordonnées des points symétriques de A par rapport aux plans de coordonnées;

2) les coordonnées de la projection du point A sur le plan $x + 2y + 2z + 6 = 0$ et les coordonnées du point symétrique de A par rapport à ce plan;

3) les coordonnées de la projection du point A sur le plan $2x + 3y + 6z + 40 = 0$ et les coordonnées du point symétrique de A par rapport à ce plan.

6.58. Ecrire les équations de la droite symétrique de la droite $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$ par rapport au plan $5x - y + z - 4 = 0$.

6.59. Ecrire les équations des projections, sur le plan $x + 5y - z - 25 = 0$, des droites suivantes:

1) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

2) $x - y + 2z - 1 = 0$, $3x - y + 2z + 2 = 0$;

3) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

6.60. Déterminer l'angle de deux plans:

1) $x + 4y - z + 1 = 0$ et $x + y - z - 3 = 0$;
2) $x + 2y - z = 1$ et $x - y = 3$;
3) $x + 2y - 2z = 0$ et $z = 5$;
4) $x + 2y - z - 1 = 0$ et $3x - 5y - 7z = 0$;
5) $x + 3y - z + 1 = 0$ et $x = 1 - u$, $y = 2 - 3u - v$, $z = 7 + u + v$;
6) $x - 3y + 2z + 1 = 0$ et $6z - 9y + 3x + 5 = 0$.

6.61. Déterminer l'angle des droites:

1) $2x + y - z + 1 = 0$, $x + 3y + z + 2 = 0$, et $x + 3y - z + 2 = 0$, $x + y + z - 1 = 0$;

2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ et $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{6}$;

3) $x = 5 - 2t$, $y = 6 + 4t$, $z = 8t$, et $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = 3 - 4t$.

6.62. Déterminer l'angle du plan $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ et de la droite:

1) $x + y + z + 1 = 0$, $2x + y + 3z + 2 = 0$;

2) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-6}$;

3) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-7}$; 4) $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{4}$.

6.63. Ecrire les équations de la droite qui passe par le point A (1, 3, 2) parallèlement au plan Oxy et qui forme:

1) un angle de 45° avec la droite $x = y$, $z = 0$;

2) un angle égal à Arc sin $(1/\sqrt{10})$ avec le plan $x - y = 1$.

6.64. Ecrire l'équation du plan qui passe par le point A $(-1, 2, 1)$ parallèlement à la droite $\frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = -z$ et qui forme un angle de $60°$ avec la droite $x = y$, $z = 0$.

6.65. Ecrire l'équation du plan qui passe par la droite $x + 5y + z = 0$, $x - z + 4 = 0$ et qui forme un angle de $45°$ avec le plan $x - 4y - 8z + 1 = 0$.

6.66. Démontrer que deux droites données se coupent et établir les équations des bissectrices des angles aigu et obtu de ces droites:

1) $x = 4 - 4t$, $y = 1 + 4t$, $z = -5 + 7t$, et $x = -3 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = -4 + 2t$;

2) $x = 4 + t$, $y = 1 - t$, $z = 5 + 4t$, et $x = -3 - 3t$, $y = 8 + 3t$, $z = 1$;

3) $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 11 - 6t$, et $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = 7 - t$.

6.67. Les côtés latéraux d'un triangle isocèle ont un sommet commun A $(3, 4, 5)$, les deux autres sommets appartenant aux axes Ox et Oy. Sachant que le plan du triangle est parallèle à l'axe Oz, déterminer les angles du triangle et établir l'équation de son plan.

6.68. Soient le point A $(2, -1, 0)$ et une droite (L). Calculer la distance du point A à la droite (L); déterminer les coordonnées de la projection du point A sur (L) et les coordonnées du point B symétrique de A par rapport à (L); établir les équations de la droite qui passe par le point A et coupe la droite donnée sous un angle droit (perpendiculaire abaissée du point A sur (L)). La droite (L) est définie par les équations:

1) $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$;

2) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -3 + t$;

3) $2x + y - z + 1 = 0$, $x + y + z + 2 = 0$.

6.69. Le point A appartient à la droite $x - y - 3 = 0$, $2y + z = 0$. La distance du point A à la droite $x = y = z$ vaut $\sqrt{6}$. Calculer les coordonnées du point A.

6.70. Calculer la distance entre les droites:

1) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-2}$ et $\frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{4}$;

2) $x = 3 + 2t$, $y = 10 - 3t$, $z = 3 + 4t$, et $x = 1 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = 1 + 3t$;

3) $x + y + z - 1 = 0$, $x + 3y - z + 2 = 0$, et $x + 3y + z + 2 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$.

6.71. Soient les droites (L_1) et (L_2). Etablir les équations de leur perpendiculaire commune (c'est-à-dire de la droite coupant (L_1) et (L_2) sous un angle droit); déterminer les points d'intersection de la perpendiculaire commune avec les droites données; calculer la distance de (L_1) à (L_2). Les droites sont définies par les équations:

1) $x = 5 + t$, $y = 3 - t$, $z = 13 + t$, et $x = 6 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 10 - t$;

2) $2x + 7y - 13 = 0$, $3y - 2z - 1 = 0$, et $x + y - 8 = 0$, $2x + y - z = 0$;

3) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}$ et $\frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

6.72. Les points $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$, $D(2, 1, -4)$ sont les sommets d'un tétraèdre. Calculer:

1) la longueur de la hauteur du tétraèdre, qui est abaissée du sommet D sur la face ABC;

2) la longueur de la hauteur de la base ABC, qui est abaissée du sommet C sur le côté AB;

3) la distance entre les arêtes non coplanaires AD et BC;

4) l'angle des arêtes non coplanaires AD et BC;

5) l'angle entre l'arête AD et la face ABC.

6.73. La longueur de l'arête d'un cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$ vaut 1. Déterminer:

1) la distance du sommet A au plan B_1CD_1;

2) la distance de la diagonale AC_1 du cube à la diagonale CD_1 de la face latérale, les deux diagonales étant non coplanaires;

3) les rapports dans lesquels les points d'intersection de chacune des droites AC_1 et CD_1 avec leur perpendiculaire commune partagent les segments AC_1 et CD_1.

6.74. Trois faces $ABCD$, ABB_1A_1 et ADD_1A_1 d'un parallélépipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$ appartiennent respectivement aux plans $2x + 3y + 4z + 8 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$; le sommet C_1 possède les coordonnées 6, -5, 1. Calculer:

1) la distance du sommet A_1 au plan B_1BD;

2) la distance du sommet D à la droite AB;

3) la distance entre les droites AC et A_1C_1;

4) la distance entre les droites AA_1 et BC;

5) l'angle des droites AC et C_1D_1;

6) l'angle des plans BDD_1 et ACC_1;

7) l'angle entre la droite CA_1 et le plan DCC_1.

6.75. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que celui des quatre dièdres formés par deux plans sécants non perpendiculaires $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, qui contient le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ soit:

1) aigu; 2) obtus.

6.76 (s). Soient deux plans $x + 2y + 2z = 0$ et $7x + 4y + 4z = 0$. Un troisième plan (π) passe par l'origine des coordonnées O de telle manière que l'extrémité de son vecteur normal issu de O appartient au dièdre obtus formé par les plans donnés. Les cosinus des dièdres aigus formés par (π) et chacun des plans donnés sont 2/15 et 4/45 respectivement. Former l'équation du plan (π).

6.77. On considère le dièdre formé par les plans $x - 2y + z +$

$+ 3 = 0$ et $x + y + 2z = 1$, qui contient le point A $(-1, 0, 0)$, et on examine l'ensemble des points de son intérieur, dont les distances aux plans donnés sont respectivement égales à $\sqrt{6}$ et $2\sqrt{6}$. Démontrer que cet ensemble est une droite. Etablir les équations de cette droite.

6.78. Ecrire l'équation du plan bissecteur de celui des dièdres formés par les plans $x - z - 5 = 0$ et $3x + 5y + 4z = 0$, qui contient le point A $(1, 1, 1)$.

6.79. Etablir l'équation du plan bissecteur du dièdre aigu formé par les plans $x - z - 5 = 0$ et $3x + 5y + 4z = 0$.

6.80. Les faces du tétraèdre sont définies par les équations $x + 2y - 2z + 3 = 0$, $4x - 4y + 7z - 9 = 0$, $8x + 4y + z - 3 = 0$, $y - z = 0$. Ecrire les équations:

1) du plan bissecteur du dièdre intérieur formé par les deux premières faces;

2) de la droite située dans le trièdre intérieur formé par les trois premières faces, et dont tous les points sont équidistants de ces trois faces.

6.81. Les points $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 8, 9)$, $C(5, 0, 7)$, $D(3, 4, 2)$ sont les sommets du tétraèdre. Calculer les rayons et les coordonnées des centres des sphères inscrite et circonscrite.

6.82. Calculer le rayon et les coordonnées du centre de la sphère passant par le point A $(0, 1, 0)$ et tangente aux plans $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x + y + 4z = 0$.

6.83. Les points A $(1, 2, 3)$, B $(1, 5, -1)$, C $(5, 3, -5)$ sont les sommets du triangle. Calculer les rayons et les coordonnées des centres des cercles inscrit et circonscrit.

6.84. Démontrer que trois plans $x - 2y + 2z + 3 = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$, $5x + 14y - 2z - 21 = 0$ n'ont pas de points communs et que les trois droites engendrées par l'intersection de chaque couple de ces plans sont parallèles, c'est-à-dire que les plans forment un prisme. Calculer le rayon du cylindre circulaire droit: 1) inscrit dans ce prisme; 2) circonscrit à ce dernier, et écrire l'équation de l'axe de chacun de ces deux cylindres.

6.85. La base d'un prisme droit $ABCDA_1B_1C_1D_1$ est un losange $ABCD$ dont l'angle A est de 60°. La longueur du côté de la base du prisme est a, celle de l'arête latérale, $\sqrt{3}a$. Le point E est la projection orthogonale du sommet C_1 sur le plan AB_1D_1, et le point F la projection orthogonale du point E sur le plan AA_1D_1D. Calculer le volume de la pyramide $ADEF$.

6.86. Dans un prisme régulier $ABCA_1B_1C_1$ la longueur de l'arête latérale vaut 3. Le point M est le milieu de l'arête AC, le point N appartient à l'arête B_1C_1 et le point P à la face AA_1B_1B; la distance de P au plan ABC est égale à 1. On sait que chacune des droites PM et PN forme un angle de 30° avec le plan AA_1B_1B et que la droite

PN fait le même angle avec le plan BB_1C_1C. Calculer le volume du prisme.

6.87. Dans un prisme régulier $ABCA_1B_1C_1$ la longueur du côté de la base vaut $2a$ et celle de l'arête latérale, a. On mène par les sommets A, B et C les plans qui sont respectivement perpendiculaires aux droites AB_1, BC_1 et CA_1. Calculer le volume du polyèdre limité par ces trois plans et par le plan $A_1B_1C_1$.

Changement de repère (problèmes 6.88 à 6.92)

6.88. Soient deux repères $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. L'origine du second repère a, dans le premier, les coordonnées a_{10}, a_{20}, a_{30}, tandis que les vecteurs de base du second repère possèdent, dans la base du premier repère, les coordonnées (a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33}) respectivement. On donne dans le premier repère un plan d'équation $Ax + By + Cz + D = 0$. Ecrire son équation dans le second repère.

6.89. Soient dans l'espace quatre points A (1, 2, 1), B (—1, 3, 0), C (2, 5, 3), D (—2, 3, 4) et le plan $2x + y - 3z + 2 = 0$. Ecrire l'équation de ce plan dans le nouveau repère $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$.

6.90. Les plans $x - 2y + 3z - 6 = 0$, $2x + y - z = 0$, $4x + z - 5 = 0$ sont respectivement les plans $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ du nouveau repère, et le point A (2, 0, 1) a dans ce repère les coordonnées 1, 1, 1.

1) Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point dans le repère initial à l'aide de ses coordonnées x', y', z' dans le nouveau repère.

2) Etablir, dans le nouveau repère, les équations canoniques de la droite qui, dans le repère initial, est définie par les équations $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

6.91. Soit $3x + 5y + \sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0$ l'équation d'un plan dans un repère orthonormé $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. On sait que l'origine du nouveau repère orthonormé se trouve au point O' (1, 1, —1), le vecteur de base $\mathbf{e}'_3$ est opposé au vecteur $\mathbf{e}_3$, et les vecteurs de base $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$ s'obtiennent respectivement des vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ par une rotation de 45° effectuée dans le plan de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ et dirigée dans le sens de la plus courte rotation appliquant $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$.

1) Calculer les coordonnées d'un point donné dans le repère initial si sont connues ses coordonnées x', y', z' dans le nouveau repère.

2) Ecrire l'équation du plan donné dans le nouveau repère.

6.92. Trois plans définis dans un repère orthonormé par les équations $x + 2y - 2z + 3 = 0$, $2x + y + 2z = 0$, $2x - 2y - z + 3 = 0$ (vérifier qu'ils sont perpendiculaires deux à deux) sont respectivement les plans $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ du nouveau repère

orthonormé, le point A (—1, 0, 0) ayant, dans le nouveau repère, des coordonnées strictement positives.

1) Calculer, dans le repère initial, les coordonnées du point dont on connaît les coordonnées x', y', z' dans le nouveau repère.

2) Etablir, dans le nouveau repère, les équations canoniques des droites définies dans le repère initial par les équations $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$ et $x=y=z$. Calculer, dans les deux repères, l'angle et la distance entre ces droites; se convaincre de la coïncidence des résultats.

CHAPITRE III

CONIQUES

Dans ce chapitre, on utilise les notions fondamentales suivantes: *courbe algébrique*, *courbe d'ordre 2* (ou *conique*), *cercle*, *ellipse*, *hyperbole*, *parabole*, *centre*, *sommet*, *axe*, *demi-axe*, *foyer*, *directrice*, *excentricité*, *corde*, *asymptote*, *tangente*, *normale*, *équation canonique d'une courbe d'ordre 2*, *courbe à centre d'ordre 2* (ou *conique à centre*).

Le repère est orthonormé, sauf mention du contraire.

Par *courbe algébrique* du plan on désigne l'ensemble de tous les points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient, dans un repère cartésien, l'équation

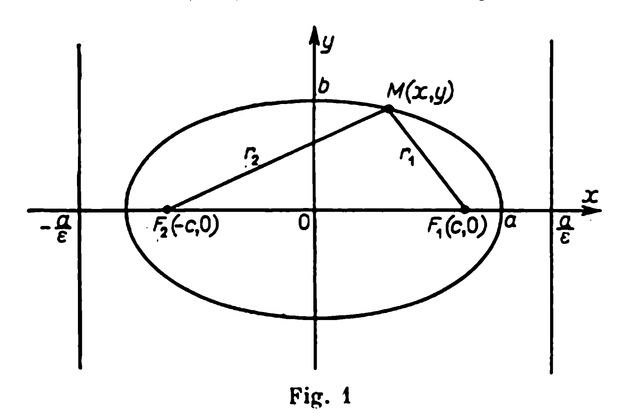


Fig. 1

$\Phi(x, y) = 0$, où $\Phi(x, y)$ est un polynôme en x et y. Le degré du polynôme $\Phi(x, y)$ (le degré maximal $k + l$ des monômes $a_{kl}x^k y^l$ intervenant dans $\Phi(x, y)$) est appelé *ordre* de la courbe. L'ordre de la courbe ne varie pas lorsqu'on change de repère.

L'*équation générale d'une courbe d'ordre 2* est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \qquad (1)$$

L'expression $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ est appelée partie quadratique, $2Dx + 2Ey$, partie linéaire. F est le terme constant de l'équation (1).

Pour toute courbe d'ordre 2 il existe un repère rectangulaire dit *canonique* dans lequel l'équation de la courbe a la forme canonique (voir tableau 1 à la p. 53).

L'équation du cercle de rayon R et de centre $C(x_0, y_0)$ est de la forme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

L'ellipse (fig. 1) a l'*équation canonique*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

où $a \geqslant b > 0$; le *demi-grand axe* de l'ellipse vaut a, le *demi-petit axe*, b. Les points $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ sont les *sommets de l'ellipse*. Les points F_1 $(c, 0)$ et F_2 $(-c, 0)$, où $c=\sqrt{a^2-b^2}$, sont les *foyers de l'ellipse*.

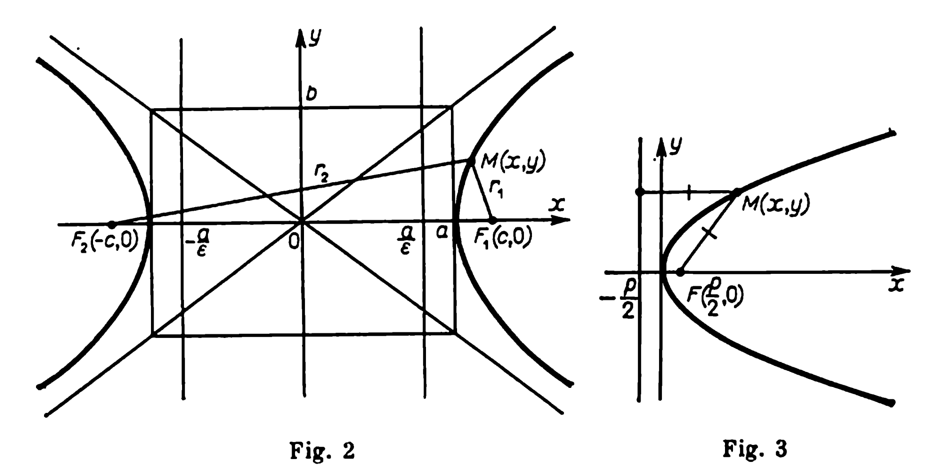


Fig. 2 Fig. 3

L'hyperbole (fig. 2) a l'*équation canonique*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4}$$

où $a > 0$, $b > 0$; le *demi-axe focal* vaut a, le *demi-axe non focal*, b. Les points $\pm a$, 0) sont appelés *sommets de l'hyperbole*. Les points F_1 $(c, 0)$ et F_2 $(-c, 0)$, où $c=\sqrt{a^2+b^2}$, sont les *foyers de l'hyperbole*. Les droites $y=\pm\frac{b}{a}x$ sont les *asymptotes* de l'hyperbole. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ est l'hyperbole *conjuguée* de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, elle admet les mêmes asymptotes.

La parabole (fig. 3) a l'*équation canonique*

$$y^2=2px, \tag{5}$$

où $p > 0$. Le nombre p est appelé *paramètre de la parabole*. Le sommet de la parabole est à l'origine des coordonnées, son foyer est au point F $(p/2, 0)$.

L'excentricité de l'ellipse ou de l'hyperbole vaut $\varepsilon = c/a$; pour l'ellipse $0 \leqslant \varepsilon < 1$, pour l'hyperbole $\varepsilon > 1$. L'excentricité de la parabole vaut 1.

Les droites $x=\pm a/\varepsilon$ sont appelées *directrices* de l'ellipse (3) et de l'hyperbole (4) (voir fig. 1 et 2). On appelle directrice de la parabole (5) la droite $x=-p/2$ (voir fig. 3). Les cordes passant par le foyer d'une conique sont appelées *cordes focales*.

Soit M (x_0, y_0) un point de la conique. La tangente à la courbe en ce point est définie par l'équation

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \quad \text{pour l'ellipse} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1;$$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \quad \text{pour l'hyperbole} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$yy_0=p\,(x+x_0) \quad \text{pour la parabole} \quad y^2=2px$$

et par l'équation

$$Axx_0+B\,(xy_0+x_0y)+Cyy_0+D\,(x+x_0)+E\,(y+y_0)+F=0$$

pour une courbe définie par l'équation générale (1).

On appelle *centre* d'une conique le centre de symétrie de cette courbe. La courbe est dite *à centre* si elle possède un centre unique. Les courbes des cinq premières classes énumérées dans le tableau 1 sont des courbes à centre. Le centre de ces courbes joue le rôle de l'origine du repère canonique. Les coordonnées (x_0, y_0) du centre de la courbe définie dans un repère cartésien par l'équation (1) s'obtiennent du système d'équations

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans le cas d'une courbe à centre, $\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\neq 0.$

Il y a en tout neuf types d'équations canoniques pour les courbes d'ordre 2. Ces équations sont énumérées dans le tableau 1 avec les noms des classes de courbes correspondantes.

Tableau 1

Objet	Equation canonique
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\geqslant b>0$
« Ellipse imaginaire » (ensemble vide)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
« Couple de droites concourantes imaginaires » (point)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Couple de droites concourantes	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Parabole	$y^2=2px,\ p>0$
Couple de droites parallèles	$y^2=a^2,\ a\neq 0$
« Couple de droites parallèles imaginaires » (ensemble vide)	$y^2=-a^2,\ a\neq 0$
« Deux droites confondues » (droite)	$y^2=0$

La réduction de l'équation d'une courbe d'ordre 2 à la forme canonique comprend la recherche de l'équation canonique de la courbe et la détermination du repère canonique. Elle permet de calculer les paramètres de la courbe et de déterminer sa position par rapport au repère initial.

La réduction de l'équation générale (1) d'une courbe à la forme canonique s'effectue en plusieurs étapes. Décrivons-les.

1. Si le repère initial n'est pas orthonormé, on passe à un repère orthonormé quelconque. La forme générale de l'équation (1) ne varie pas dans ce cas. Par la suite, on considère que le repère est orthonormé.

2. Si, dans l'équation (1), le coefficient $B \neq 0$, il convient de passer à un repère par rapport auquel le coefficient du produit $x'y'$ s'annule dans l'équation transformée. Pour le faire, il faut tourner le repère d'un angle φ autour de l'origine des coordonnées:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \tag{7}$$

La valeur de φ s'obtient (pour $A \neq C$) de l'équation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C}, \tag{8}$$

ou de

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0. \tag{9}$$

De toutes les valeurs possibles de φ le choix est libre. Si $A = C$, on peut poser $\varphi = \pi/4$. Ensuite, il faut calculer $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, les substituer dans les formules (7) et réaliser dans l'équation (1) le changement de coordonnées.

3. Si l'équation (1) ne contient pas le produit des variables, il faut tâcher, si possible, de se débarrasser des termes linéaires. On y parvient par transport de l'origine des coordonnées. Plus précisément, si l'équation contient une variable et son carré, on complète ce couple jusqu'au carré parfait et on transporte l'origine des coordonnées le long de l'axe de telle sorte que le terme linéaire soit absent de l'équation transformée.

Exemple:

$$Ax^2 + 2Dx = A\left(x^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2}\right) - \frac{D^2}{A} =$$
$$= A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} = Ax'^2 - \frac{D^2}{A}, \text{ où } x' = x + \frac{D}{A}.$$

4. Si l'équation (1) ne contient que trois termes: une variable, le carré de l'autre variable et le terme constant, on peut éliminer le terme constant en transportant l'origine des coordonnées le long de l'axe qui correspond à la première variable.

Exemple:

$$Ax^2 + 2Ey + F = Ax^2 + 2E\left(y + \frac{F}{2E}\right) = 0.$$

La substitution de y' à $y + \frac{F}{2E}$ donne $Ax^2 + 2Ey' = 0$.

Après avoir suivi les indications des points 1 à 4 on aboutit à une équation qui peut différer de la forme canonique par un facteur numérique, par l'ordre des coordonnées et la place des termes dans l'équation ou bien par le signe du coefficient du terme linéaire. Il est commode de dire à propos de cette équation qu'elle est « quasi canonique ». Pour la réduire définitivement à la forme cano-

nique, il faut procéder aux transformations nécessaires de l'équation et au changement du repère. Le changement de l'ordre des coordonnées s'obtient par changement de l'ordre des vecteurs de base et s'écrit sous la forme

$$x = y', \quad y = x'. \tag{10}$$

Pour modifier le signe du coefficient du terme linéaire il faut changer le sens du vecteur de base correspondant. Réduisons, par exemple, l'équation quasi canonique $Ax^2 + 2Ey = 0$ à la forme canonique. La division par A et le transport du terme linéaire dans le deuxième membre nous donnent

$$x^2 = -\frac{2E}{A} y.$$

Le changement des coordonnées (10) entraîne

$$y'^2 = -\frac{2E}{A} x'.$$

Si $\frac{2E}{A} > 0$, il faut de plus procéder au changement $x' = -x''$. Après quoi on obtient l'équation canonique de la parabole

$$y'^2 = \frac{2E}{A} x'' \quad \left(\frac{E}{A} = p > 0\right).$$

Pour obtenir le repère canonique, on écrit chacune des formules de passage en les substituant l'une dans l'autre, ce qui donne l'expression définitive des coordonnées initiales au moyen des coordonnées canoniques

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_0, \quad y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_0.$$

Les coefficients de ces formules fournissent les coordonnées de l'origine O^* (α_0, β_0) et des vecteurs de base $\mathbf{E}_1$ (α_1, β_1), $\mathbf{E}_2$ (α_2, β_2) du repère canonique par rapport au repère initial.

Si le système d'équations (6) est compatible (en particulier, si $\delta = AC - B^2 \neq 0$, cas d'une courbe à centre), il est commode de procéder à la simplification par transport de l'origine des coordonnées au centre de la courbe: $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, auquel cas les coefficients de x' et y' s'annulent dans l'équation transformée (voir problèmes 9.18, 9.20). Après quoi on envisage la seconde étape.

La classe de la courbe d'ordre 2 peut être définie, en première approximation, d'après le signe de δ avant la simplification de son équation.

Une courbe est de type elliptique (ellipse, ellipse imaginaire, couple de droites concourantes imaginaires) si $\delta > 0$; elle est de type hyperbolique (hyperbole, couple de droites concourantes) si $\delta < 0$, et de type parabolique (autres classes du tableau) pour $\delta = 0$.

§ 7. Propriétés géométriques des courbes d'ordre 2 et leurs équations canoniques

Cercle
(problèmes 7.1 à 7.10)

7.1. Calculer le rayon et les coordonnées du centre du cercle:
1) $x^2 + y^2 + 4y = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 5x - 5y + 12 = 0$;
3) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$;
4) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

7.2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ définisse un cercle? Exprimer le rayon et les coordonnées du centre du cercle par les coefficients de l'équation.

7.3. Etablir l'équation du cercle de centre au point M (2, 2), qui est tangent à la droite $3x + y - 18 = 0$.

7.4. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $Ax + By + C = 0$:

1) ne possède pas de points communs avec le cercle $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$;

2) possède deux points communs avec ce cercle;

3) soit tangente à ce cercle.

7.5. 1) Ecrire l'équation de la tangente menée au cercle $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ au point M (—3, 1).

2) Etablir les équations des tangentes au cercle $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$, qui passent par le point M (1, 4).

7.6. Etablir les équations des tangentes au cercle $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, qui sont parallèles à la droite $5x - 12y + 1 = 0$.

7.7. Vérifier que deux cercles donnés sont tangents et former l'équation de leur tangente commune passant par le point de tangence:

1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 18$, $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 2$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 45$, $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$.

7.8. Etablir les équations des tangentes communes aux cercles $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ et $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

7.9. Par un point A extérieur au cercle on mène une droite tangente au cercle au point B et une seconde droite coupant le cercle aux points C et D. Démontrer que $|AB|^2 = |AD| \cdot |AC|$.

7.10. Deux cercles sont tangents extérieurement. Par le point de leur tangence on mène une droite qui coupe le premier cercle en A et le second cercle en B. Démontrer que les tangentes aux cercles en A et B sont parallèles.

Ensembles de points du plan, dans l'étude desquels on utilise les équations des coniques (problèmes 7.11 à 7.20)

7.11. Etant donné deux points A et B, démontrer que l'ensemble des points M tels que le rapport $|MA| / |MB|$ soit constant et égal à $k > 0$ est une droite pour $k = 1$ et un cercle pour $k \neq 1$. Exprimer le rayon de ce cercle en fonction de k et de la longueur du segment AB.

7.12. Etant donné deux points A et B, démontrer que l'ensemble des points M tels que la somme $|MA| + |MB|$ soit constante et égale à $2a$ est une ellipse de foyers A et B. Exprimer les longueurs des demi-axes de cette ellipse en fonction de a et de la longueur du segment AB.

7.13. Etant donné deux points A et B, démontrer que l'ensemble des points M tels que le module de la différence $|MA| - |MB|$ soit constant et égal à $2a$ est une hyperbole de foyers A et B. Exprimer les demi-axes de cette hyperbole en fonction de a et de la longueur du segment AB.

7.14. Démontrer que l'ensemble des points équidistants d'un point fixé A et d'une droite fixée (D) est une parabole de foyer A et de directrice (D).

7.15. Représenter les ensembles des points qui, dans un repère orthonormé, sont définis par les inéquations:

1) $x^2+(y+2)^2\leqslant 4$; 2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2>25$;

3) $x^2+y^2+3x<0,\quad y<0$;

4) $-1\leqslant x^2+y^2-2x+2y\leqslant 7$;

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1$; 6) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$;

7) $1\leqslant\frac{x^2}{9}+y^2\leqslant 9$; 8) $4x^2-4x+9y^2+6y+1<0$;

9) $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}<6$;

10) $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}>4$;

11) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}\leqslant 1$; 12) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\geqslant 1$;

13) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}\geqslant 1$; 14) $\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}\right|<1$; 15) $|3x^2-9y^2|>1$;

16) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2$;

17) $y^2\leqslant 4x$; 18) $y^2>6x$;

19) $x\leqslant y^2\leqslant 3x$; 20) $-2x-x^2<y^2<-2x$.

7.16. Quelles courbes du plan sont définies par les équations paramétriques suivantes:

1) $x=3\cos t,\quad y=3\sin t,\quad 0\leqslant t<2\pi$;

2) $x=1+2\cos t,\quad y=2+2\sin t,\quad 0\leqslant t<2\pi$;

3) $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant\pi$?

7.17. Démontrer que les équations paramétriques $x=x_0+a\cos t$, $y=y_0+b\sin t$ $(a>0,\ b>0)$ définissent une ellipse de centre au point (x_0, y_0) et de demi-axes a et b.

7.18. Démontrer que les équations paramétriques $x=x_0+a\operatorname{ch} t$, $y=y_0+b\operatorname{sh} t$, où $a>0$, $b>0$, définissent une branche de l'hyperbole de centre au point (x_0, y_0) et de demi-axes a et b. Comment faut-il modifier ces équations pour définir les deux branches de l'hyperbole?

7.19. Représenter l'ensemble de points qui, dans un système de coordonnées polaires, est défini par l'équation

1) $r=1$; 2) $r=\frac{1}{1-2\cos\varphi}$;

3) $r=\frac{3}{2-\cos\varphi}$; 4) $r=\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.

7.20. On fixe dans le plan deux points A et B. Trouver l'ensemble des points M tels que l'angle au sommet A du triangle ABM soit deux fois plus grand que l'angle au sommet M.

Ellipse
(problèmes 7.21 à 7.34)

7.21. Le cercle peut être assimilé à une ellipse dont les demi-axes ont même longueur. A quoi est égale l'excentricité de cette ellipse? Possède-t-elle des foyers et des directrices?

7.22. Calculer les longueurs des demi-axes, l'excentricité, les coordonnées des foyers, établir les équations des directrices de l'ellipse:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $b>a>0$;

3) $9x^2+25y^2=225$; 4) $4x^2+y^2=1$.

7.23. Soit l'ellipse $25x^2+144y^2=1$. Déterminer si le point A se trouve sur l'ellipse, à l'intérieur ou à l'extérieur de celle-ci:

1) A (1, 1/6); 2) A (1/13, 1/13); 3) A (1/6, —1/24).

7.24. Calculer la longueur de la corde focale de l'ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, perpendiculaire au grand axe.

7.25. Dans le repère donné, l'ellipse possède une équation canonique. Etablir cette équation si:

1) la distance entre les sommets appartenant au grand axe vaut 16 et la distance entre les foyers est égale à 10;

2) la corde joignant deux sommets de l'ellipse est de longueur 5 et est inclinée par rapport à son grand axe de l'angle Arcsin $\frac{3}{5}$;

3) les foyers de l'ellipse se trouvent aux points $(\pm 1, 0)$ et le point $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ appartient à l'ellipse;

4) les foyers de l'ellipse sont aux points $(\pm 2, 0)$ et les directrices sont les droites $x=\pm 18$;

5) la distance de la directrice au sommet le plus proche vaut 4 et celle à un sommet situé sur l'axe Oy est égale à 8;

6) le triangle de sommets situés aux foyers et à l'extrémité du petit axe est équilatéral et si le diamètre du cercle passant par le centre et les deux sommets de l'ellipse vaut 7;

7) le segment de l'axe Ox, limité par le foyer F_1 et le sommet le moins proche A du grand axe, est partagé par le second foyer F_2

en deux parties égales et si la distance de F_2 à la droite passant par A et par le sommet du petit axe vaut $1/\sqrt{17}$;

8) les directrices de l'ellipse sont les droites $x = \pm 4$ et si le quadrilatère de sommets situés aux foyers et aux extrémités du petit axe est un carré;

9) l'excentricité de l'ellipse vaut 7/4 et que le quadrilatère dont les sommets sont ceux de l'ellipse soit circonscrit à un cercle de rayon 4,8.

7.26. Calculer l'excentricité de l'ellipse si:

1) la distance entre les foyers est égale à la moyenne arithmétique des longueurs des axes;

2) le segment joignant le foyer au sommet le moins proche du grand axe est partagé par le second foyer dans le rapport 2 : 1;

3) la distance du foyer au sommet le moins proche du grand axe est de 1,5 fois plus grande que la distance au sommet du petit axe;

4) le segment limité par les foyers est vu de l'extrémité du petit axe sous un angle droit;

5) le grand axe est vu de l'extrémité du petit axe sous un angle de 120°;

6) le segment limité par le foyer et le sommet le moins proche du grand axe est vu de l'extrémité du petit axe sous un angle droit;

7) les côtés du carré inscrit dans l'ellipse passent par les foyers de l'ellipse.

7.27. Etablir les équations des côtés du carré inscrit dans l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Quelle partie de l'aire limitée par l'ellipse constitue l'aire du carré?

7.28. On considère les cordes de l'ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, qui sont parallèles à la droite $x + 2y = 1$. Trouver l'équation de l'ensemble de leurs milieux.

7.29. Etant donné le point A (7/2, 7/4), tracer une corde de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 25$, qui se partage en A en deux parties égales.

7.30. Mener par le point M (0, 3) une droite qui coupe l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 20$ en deux points A et B de telle manière que $|MA| = 2|MB|$.

7.31. Trouver sur l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ les points à partir desquels le segment joignant les foyers est vu:

1) sous un angle droit;

2) sous un angle de 120°; 3) sous un angle de 150°.

7.32. Etablir les équations des familles d'ellipses:

1) de foyers communs $(\pm c, 0)$;

2) de directrices communes $x = \pm d$ et de centre commun à l'origine des coordonnées.

7.33. Ecrire l'équation de l'ellipse si:

1) les points F_1 (5, 1) et F_2 (—1, 1) sont des foyers, et la droite $x = 31/3$ est l'une des directrices;

2) le point F (—6, 2) est l'un des foyers, le point A (2, 2) est l'extrémité du grand axe, l'excentricité étant égale à 2/3;

3) les axes de l'ellipse sont parallèles aux axes de coordonnées, les points A (4, 0) et B (0, 4) appartiennent à l'ellipse, le point B étant distant de $3\sqrt{2}$ par rapport à l'un des foyers, et de 6 par rapport à la directrice respective.

7.34. Soient O le centre de l'ellipse, a et b ses demi-axes, et A, B des points de l'ellipse, tels que OA et OB sont des droites perpendiculaires.

1) Démontrer que la somme $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ est constante pour tout couple des points A et B.

2) Calculer la plus grande et la plus petite valeur de la longueur du segment AB.

Hyperbole
(problèmes 7.35 à 7.50)

7.35. Calculer les demi-axes, l'excentricité, les coordonnées des foyers, établir les équations des directrices et des asymptotes de l'hyperbole:

1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$;

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) $y^2-x^2=1$;

5) $xy = 1$; 6) $xy = -2$.

7.36. Soit l'hyperbole $100x^2 - 36y^2 = 1$. Déterminer si le point A appartient à l'hyperbole, se trouve à l'intérieur de l'une de ses branches ou entre les branches:

1) A (1/8, —1/8); 2) A (1, 1);

3) A (1, 7); 4) A (—1/2, 0).

7.37. Calculer la longueur de la corde focale de l'hyperbole $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$ si cette corde est perpendiculaire à l'axe focal.

7.38. Dans le repère donné, l'hyperbole a une équation canonique. Etablir cette équation si:

1) la distance entre les sommets vaut 10 et la distance entre les foyers est 12;

2) la longueur de l'axe focal vaut 1, et le point (1, 3) appartient à l'hyperbole;

3) les droites $x = \pm\sqrt{5}/6$ sont les directrices de l'hyperbole, et le point (—9, 4) appartient à l'hyperbole;

4) la longueur du demi-axe non focal est 1, et le sommet de l'hyperbole partage la distance entre les foyers dans le rapport 4 : 1;

5) l'excentricité de l'hyperbole est 7/5, et la distance du sommet au foyer le plus proche est 2;

6) le point $(7, -2\sqrt{3})$ appartenant à l'hyperbole se trouve à la distance $4\sqrt{7}$ du foyer gauche;

7) l'angle des asymptotes, qui contient le foyer, vaut 60°, et la distance de la directrice au sommet le plus proche vaut $\frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})$;

8) le point $(-5/4, 3/2)$ appartient à l'hyperbole, et les asymptotes sont les droites $y = \pm 2x$;

9) le point $(-1, 3)$ appartient à l'hyperbole, et les asymptotes sont les droites $y = \pm 2x$.

7.39. Ecrire l'équation canonique de l'hyperbole qui contient le point $(-1, 3)$ et dont les asymptotes sont $y = \pm 2x$ (comparer avec le problème 7.38,9)).

7.40. Calculer l'excentricité de l'hyperbole si:

1) ses demi-axes sont égaux (hyperbole équilatère);

2) l'angle des asymptotes, qui contient le foyer, vaut 120°;

3) les droites $y = \pm 3x$ sont les asymptotes de l'hyperbole.

7.41. Calculer l'excentricité de l'hyperbole définie dans le repère donné par une équation canonique, si:

1) les distances du point $M(5, -4)$ de l'hyperbole aux directrices sont dans le rapport 2 : 1;

2) la somme des distances du point $N(-5, -4)$ aux asymptotes de l'hyperbole vaut 20/3.

7.42. Exprimer l'excentricité de l'hyperbole en fonction de l'excentricité ε de l'ellipse en sachant que les cordes focales communes à ces coniques sont perpendiculaires au grand axe de l'ellipse.

7.43. Former l'équation de l'hyperbole possédant des cordes focales communes avec l'ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.

7.44. On considère les cordes de l'hyperbole $x^2 - 2y^2 = 1$, qui sont parallèles à la droite $2x - y = 0$. Déterminer l'équation de l'ensemble des milieux de ces cordes.

7.45. Etant donné l'hyperbole $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$, mener par le point $A(4, 4)$ une corde dont A est le milieu.

7.46. Trouver, sur l'hyperbole $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, les points à partir desquels le segment joignant les foyers est vu:

1) sous un angle droit; 2) sous un angle de 60°.

7.47. Etablir les équations des familles d'hyperboles:

1) ayant les foyers communs $(\pm c, 0)$;

2) ayant les directrices communes $x = \pm d$ et un centre commun à l'origine des coordonnées;

3) ayant les asymptotes communes $y = \pm kx$.

7.48. Ecrire l'équation de l'hyperbole si :

1) les points F_1 (3, —2) et F_2 (5, —2) sont des foyers, et la droite $x = 7/2$ est l'une des directrices;

2) le point F (1, 3) est l'un des foyers, le point A (—4, 3) est un sommet et si l'excentricité vaut 3/2;

3) le point F (0, 0) est l'un des foyers, et les droites $x \pm y + 2 = 0$ sont des asymptotes.

7.49. Démontrer que pour l'hyperbole proposée les grandeurs suivantes sont des constantes. Exprimer ces grandeurs en fonction des longueurs des demi-axes a et b de l'hyperbole.

1) Le produit des distances d'un point quelconque de l'hyperbole à ses asymptotes.

2) L'aire du parallélogramme dont l'un des sommets appartient à l'hyperbole et deux côtés se trouvent sur les asymptotes.

7.50. Démontrer que les sommets de l'hyperbole et quatre points d'intersection de ses directrices avec les asymptotes appartiennent à un même cercle. Exprimer le rayon de ce cercle au moyen de la longueur du demi-axe focal.

Parabole
(problèmes 7.51 à 7.64)

7.51. Calculer les coordonnées du foyer et écrire l'équation de la directrice de la parabole :

1) $y^2 = 2px$, $p > 0$; 2) $y^2 = -px$, $p > 0$;

3) $y^2 = 6x$; 4) $y^2 = -3x$; 5) $y = x^2$; 6) $y = -\sqrt{3}x^2$.

7.52. Comment sont disposés par rapport à la parabole $y^2 = 10x$ les points suivants : 1) (5, —7); 2) (8, 9); 3) (5/2, —5)?

7.53. Etant donné la parabole $y^2 = x/5$, calculer la longueur de la corde focale perpendiculaire à l'axe de la parabole.

7.54. Dans le repère proposé, la parabole possède une équation canonique. Ecrire cette équation si :

1) le point (5, —5) appartient à la parabole;

2) la distance du foyer à la directrice vaut 12;

3) la longueur de la corde passant par le foyer sous un angle de 45° par rapport à l'axe de la parabole vaut 18.

7.55. Etant donné la parabole $y^2 = 3x$ et ses cordes parallèles à la droite $2x + 3y - 5 = 0$, trouver l'équation de l'ensemble des points qui sont milieux de ces cordes.

7.56. On considère les cordes de la parabole, qui sont parallèles à une droite donnée. Démontrer que leurs milieux appartiennent à une droite parallèle à l'axe de la parabole.

7.57. Mener par le point A (5, 3) une corde de la parabole $y^2 = 6x$, qui se partage en A en deux parties égales.

7.58. Trouver sur la parabole $y^2 = 10x$ un point M tel que :

1) la droite passant par le point M et par le foyer de la parabole forme avec l'axe Ox un angle de 60°;

2) l'aire du triangle dont les sommets se trouvent au point cherché M, au foyer de la parabole et au point d'intersection de l'axe de la parabole avec la directrice soit égale à 5;

3) la distance du point M au sommet de la parabole soit égale à la distance de M au foyer;

4) les distances du point M au sommet de la parabole et au foyer de celle-ci soient dans le rapport 8 : 7.

7.59. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre le rapport des distances d'un point de la parabole à son sommet et à son foyer.

7.60. Ecrire l'équation de la parabole de paramètre p dont le sommet possède les coordonnées (a, b) et dont l'axe est orienté suivant:

1) la direction positive de l'axe Ox;

2) la direction négative de l'axe Ox;

3) la direction positive de l'axe Oy;

4) la direction négative de l'axe Oy.

7.61. Etablir les équations des familles de paraboles:

1) possédant le même foyer (0, 0) et symétriques par rapport à l'axe Ox;

2) possédant la même directrice $x = 0$ et symétriques par rapport à l'axe Ox.

7.62. Ecrire l'équation de la parabole si:

1) le point F (7, 0) est le foyer, et la droite $x = 1$ est la directrice;

2) le point F (7, 0) est le foyer, et la droite $x = 8$ est la directrice;

3) le point F (0, 1) est le foyer, et la parabole est symétrique par rapport à l'axe Oy et est tangente à l'axe Ox;

4) l'axe de la parabole est parallèle à l'axe Oy, le foyer appartient à l'axe Ox, la parabole passe par l'origine du repère et découpe sur l'axe Ox un segment de longueur 6.

7.63. Calculer le rayon du plus grand cercle situé à l'intérieur de la parabole $y^2 = 2px$ et tangent à cette parabole en son sommet.

7.64. Deux paraboles dont les axes sont perpendiculaires possèdent quatre points d'intersection. Démontrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

§ 8. Tangentes aux coniques

8.1. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe:

1) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ au point (3, 1);

2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ au point (3, −3);

3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{12}=1$ au point $(-3, 0)$;

4) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$ au point $(6, 1)$;

5) $xy=8$ au point $(4, 2)$;

6) $y^2=6x$ au point $(3/2, 3)$.

8.2. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe:

1) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$;

2) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$;

3) $xy = k$; 4) $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$ au point (x_0, y_0) appartenant à la courbe proposée.

8.3. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $Ax + By + C = 0$ soit tangente à:

1) l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; 4) l'hyperbole $xy=k$;

5) la parabole $y^2=2px$?

8.4. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\mathbf{l}(\alpha, \beta)$ soit le vecteur directeur d'une tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

8.5. Vérifier que la droite proposée est tangente à la conique donnée et calculer les coordonnées du point de tangence:

1) $3x-2y-24=0$, $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$;

2) $3x-y-12=0$, $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{36}=1$;

3) $3x - 16y - 24 = 0$, $xy = -3$;

4) $x + y + 1 = 0$, $y^2 = 4x$.

8.6. Ecrire les équations des tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ dans le cas où ces tangentes

1) sont parallèles à la droite $2x - y - 1 = 0$;
2) sont perpendiculaires à cette droite;
3) forment un angle de 45° avec la droite $x + 3y + 3 = 0$.

8.7. Ecrire les équations des tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{25}-$ $-\frac{y^2}{16}=1$, parallèles à la droite:

1) $4x = 3y$; 2) $x = 1$; 3) $x - 2y + 1 = 0$.

8.8. Ecrire l'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 10x$ si l'on sait que cette tangente est perpendiculaire à la droite:

1) $2x + y - 4 = 0$; 2) $y = 3$; 3) $x = 0$.

8.9. Quels points sur la conique donnée sont les plus proches de la droite proposée? Calculer cette distance.

1) $\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1, \quad 3x + 4y + 5 = 0$;

2) $\frac{27}{28}x^2 + \frac{9}{7}y^2 = 1, \quad 3x + 4y = 0$;

3) $6x^2 - 5y^2 = 19, \quad 12x + 5y - 6 = 0$;

4) $6x^2 - 5y^2 = 19, \quad 12x + 5y = 0$;

5) $y^2 = 64x$, $4x - 3y - 76 = 0$.

8.10. Soit l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$. Calculer les distances:

1) des foyers de l'ellipse à la tangente à celle-ci au point A (1/3, 2/3);

2) entre les tangentes à l'ellipse, qui sont parallèles à la droite $x + y = 1$.

8.11. Ecrire l'équation de l'ellipse dont les axes se confondent avec les axes de coordonnées, si cette ellipse:

1) porte le point A (—3, 2) et est tangente à la droite $4x - 6y - 25 = 0$;

2) est tangente aux droites $x + y - 5 = 0$ et $x + 4y - 10 = 0$.

8.12. Etablir l'équation de l'hyperbole dont les axes se confondent avec les axes de coordonnées si celle-ci:

1) porte le point A $(4, -2\sqrt{2})$ et est tangente à la droite $3x + y + 8 = 0$;

2) est tangente aux droites $x = 1$ et $5x - 2y + 3 = 0$.

8.13. Former l'équation de l'hyperbole d'asymptotes $\sqrt{3}x \pm y = 0$ tangente à la droite $2x - y - 3 = 0$.

8.14. Ecrire l'équation de la parabole:

1) symétrique par rapport à l'axe Oy et tangente aux droites $y + 2x = 0$, $8x - 2y - 3 = 0$;

2) définie par une équation canonique et tangente à la droite $x + y + 1 = 0$.

8.15. Etablir les équations des normales à l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, faisant un angle de 45° avec son grand axe.

8.16. Etablir l'équation de la tangente à la parabole $y^2 = -8x$, dont le segment limité par le point de tangence et par la directrice est divisé par l'axe Oy en deux parties égales.

8.17. Soient O le sommet de la parabole, M son point quelconque, (L_1) et (L_2) les tangentes à la parabole aux points O et M, N le point d'intersection des droites (L_1) et (L_2); P la projection du segment OM sur (L_1). Démontrer que le point N partage le segment OP en deux

parties égales. Indiquer le procédé de construction de la tangente à la parabole, qui en découle.

8.18. Démontrer que:

1) le segment de la tangente à la parabole, compris entre ses asymptotes est partagé par le point de tangence en deux parties égales;

2) tous les triangles formés par les asymptotes de l'hyperbole et par une tangente quelconque à cette dernière ont même aire; exprimer cette aire en fonction des demi-axes de l'hyperbole.

8.19. Soient deux tangentes parallèles à une ellipse (resp. hyperbole). Démontrer que la corde joignant les points de tangence passe par le centre de la conique.

8.20. Démontrer que les milieux des cordes de l'ellipse (resp. hyperbole), parallèles à une droite (L_1), appartiennent à une même droite (L_2). Prouver de plus que les tangentes à la courbe aux points de son intersection avec la droite (L_2) sont parallèles à la droite (L_1).

8.21. Etablir les équations des côtés d'un carré circonscrit à l'ellipse $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

8.22. Ecrire les équations des côtés d'un triangle équilatéral circonscrit à l'ellipse $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ si:

1) l'un des sommets du triangle appartient à l'axe Ox;

2) l'un des sommets du triangle appartient à l'axe Oy.

8.23. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse mener par le point M_0 (x_0, y_0) deux tangentes:

1) à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) à la parabole $y^2=2px$?

8.24. Etablir les équations des tangentes à l'ellipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$, qui passent par le point:

1) $(-6, 0)$; 2) $(2{,}7, \sqrt{7})$; 3) $\left(-4, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$; 4) $(1, 2)$.

8.25. Ecrire les équations des tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{4}-y^2=1$, qui passent par le point:

1) $(-2, 2)$; 2) $(1{,}6, 0)$; 3) $(4, \sqrt{3})$;
4) $(4, 1)$; 5) $(8, 4)$; 6) $(0, 0)$.

8.26. Ecrire les équations des tangentes à la parabole $y^2 = 16x$, qui passent par le point:

1) $(1, -2)$; 2) $(1, 4)$; 3) $(1, 5)$.

Si ces tangentes sont au nombre de deux, calculer l'aire du triangle formé par les tangentes et la directrice.

8.27. Par le point M_0 (x_0, y_0) on mène deux tangentes à une conique. Démontrer que la droite passant par les points de tangence est définie par l'équation:

1) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ pour l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ pour l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) $yy_0 = p(x+x_0)$ pour la parabole $y^2 = 2px$.

8.28. Etablir les équations des tangentes communes à deux coniques:

1) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ et $\frac{x^2}{80}+\frac{4y^2}{5}=1$;

2) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ et $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$;

3) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ et $y^2=2x$;

4) $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ et $y^2=2x$;

5) $y^2=2x$ et $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=-1$;

6) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ et $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$;

7) $y^2=\frac{8}{9}x$ et $y^2=x-1$.

8.29. Démontrer que:

1) la normale à l'ellipse en l'un de ses points est bissectrice de l'angle formé par les demi-droites issues de ce point et passant par les foyers de l'ellipse;

2) la tangente à l'hyperbole en l'un de ses points est bissectrice de l'angle formé par les demi-droites issues de ce point et passant par les foyers de l'hyperbole;

3) la normale à la parabole en l'un de ses points est bissectrice de l'angle formé par deux demi-droites issues de ce point, dont la première passe par le foyer de la parabole, et la seconde se trouve à l'intérieur de la parabole et est parallèle à son axe.

8.30. Démontrer que:

1) les tangentes aux points d'intersection de l'ellipse et l'hyperbole ayant mêmes foyers sont perpendiculaires;

2) les tangentes aux points d'intersection de deux paraboles ayant même foyer et des axes de sens opposés sont perpendiculaires.

8.31. D'un point arbitraire de la directrice d'une conique on mène deux tangentes à cette courbe. Démontrer que la droite joignant les points de tangence passe par le foyer correspondant à la directrice proposée.

8.32. Etablir les équations des tangentes à la courbe $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ dans le cas où ces tangentes sont:
1) parallèles à la droite $6x + 17y - 4 = 0$;
2) perpendiculaires à la droite $41x - 24y + 3 = 0$;
3) parallèles à la droite $y = 2$.

8.33. Etablir les équations des tangentes à la courbe $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$, qui passent par le point:
1) (3, 3); 2) (0, —0,8); 3) (0, 1).

§ 9. Théorie générale des coniques

Réduction de l'équation de la conique à la forme canonique (problèmes 9.1 à 9.10)

9.1. Déterminer de quelle classe est la conique, écrire son équation canonique et trouver le repère canonique:
1) $7x^2 + 7y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$;
2) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$;
3) $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$;
4) $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0$;
5) $9y^2 - 7y - 16 = 0$;
6) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$;
7) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;
8) $x^2 - 5x + 11 = 0$;
9) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;
10) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$.

9.2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ définisse:
1) une ellipse; 2) une hyperbole; 3) un cercle?

9.3. Déterminer de quelle classe est la conique, écrire son équation canonique et trouver le repère canonique:
1) $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0$;
2) $9xy + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 9 = 0$;
4) $18x^2 + 24xy + 11y^2 - 3 = 0$;
5) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$;
6) $9x^2 - 6xy + y^2 - 10 = 0$;
7) $81x^2 - 36xy + 4y^2 = 0$;
8) $3x^2 - 4\sqrt{5}\,xy + 4y^2 = 0$.

9.4. Déterminer de quelle classe est la conique, écrire son équation canonique et trouver le repère canonique:
1) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;
2) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;
3) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;
4) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;
5) $xy + 2x + y = 0$;

6) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
7) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
8) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;
9) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;
10) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;
11) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;
12) $225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;
13) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;
14) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$;
15) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$;
16) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$;
17) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

9.5. Démontrer que la conique définie par l'équation $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 44x + 58y + 1 = 0$ est une ellipse. Calculer les longueurs des demi-axes et l'excentricité de cette ellipse, déterminer les coordonnées de son centre et des foyers, écrire les équations des axes et des directrices.

9.6. Démontrer que la conique définie par l'équation $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0$ est une hyperbole. Calculer les longueurs des demi-axes et l'excentricité de cette hyperbole, déterminer les coordonnées du centre et des foyers, écrire les équations des axes, des directrices et des asymptotes.

9.7. Démontrer que la conique définie par l'équation $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$ est une parabole. Calculer le paramètre de cette parabole, les coordonnées du sommet et du foyer, écrire les équations de l'axe et de la directrice.

9.8. L'expression

$$M(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

(polynôme du second degré) dépend des coordonnées x, y du point dans un repère orthonormé du plan. En passant à un autre repère orthonormé, on obtient

$$M(x, y) = M'(x', y') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F'.$$

Démontrer qu'on a les égalités:

1) $A' + C' = A + C$; 2) $\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

(c'est-à-dire que les grandeurs $S = A + C$, $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

sont des invariants orthogonaux du polynôme $M(x, y)$: elles ne varient pas si l'on passe d'un repère orthonormé à un autre).

9.9. Une conique est définie par l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Démontrer que:

1) les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ sont réelles et simultanément non nulles (voir les notations du problème 9.8);

2) la conique est une hyperbole si et seulement si $\delta < 0$ et $\Delta \neq 0$; de plus, l'équation caractéristique possède des racines de signes opposés (par λ_1 on désigne la racine dont le signe est celui de Δ), le demi-axe focal de l'hyperbole vaut $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, et le demi-axe non focal, $\sqrt{\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$;

3) la conique est une ellipse si et seulement si $\delta > 0$ et les nombres S et Δ sont de signes opposés; de plus, les deux racines de l'équation caractéristique sont du même signe que le nombre S, et les demi-axes de l'ellipse sont $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$ et $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$;

4) la conique est une parabole si et seulement si $\delta = 0$ et $\Delta \neq 0$; de plus, le paramètre de la parabole vaut $\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$.

9.10. En appliquant la théorie des invariants orthogonaux, déterminer de quelle classe est la courbe et écrire son équation canonique:

1) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 7y + 1 = 0$;
2) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x + 20y + 32 = 0$;
3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 13 = 0$.

Coniques rapportées à un repère cartésien quelconque (problèmes 9.11 à 9.22)

9.11. Démontrer que:

1) la conique définie par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une ellipse;
2) la conique définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole;
3) la conique définie par l'équation $y^2 = x$ est une parabole;
4) l'équation $x^2 - y^2 = 0$ définit un couple de droites concourantes;
5) l'équation $x^2 + y^2 = 0$ définit un point;
6) l'équation $y^2 - 1 = 0$ définit un couple de droites parallèles;
7) l'équation $y^2 = 0$ définit une droite (un couple de droites confondues);
8) la conique définie par l'équation $xy = 1$ est une hyperbole;
9) la conique définie par l'équation $y = x + \frac{1}{x}$ est une hyperbole.

9.12. Démontrer que la courbe définie par l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ est une hyperbole si et seulement si $\delta < 0$ et $\Delta \neq 0$, une ellipse si et seulement si $\delta > 0$ et $S \cdot \Delta < 0$, une parabole si et seulement si $\delta = 0$ et $\Delta \neq 0$ (les notations S, δ et Δ sont les mêmes que dans le problème 9.8). Remarquons que dans le problème 9.9 ces affirmations ont été formulées pour un repère orthonormé.

9.13. Déterminer de quelle classe est la conique définie par l'équation :

1) $(3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1)^2 = 1$;
2) $(12x - 17y - 6)^2 + (17y + 5x + 1)^2 = 1$;
3) $(x - y - 3)(x + y + 3) = 4$;
4) $(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$;
5) $17x^2 - 2xy + y^2 - 3x - y - 3 = 0$;
6) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$;
7) $4x^2 - 12xy + 8y^2 - 15x + 25y + 14 = 0$;
8) $2x^2 + 2xy + 5y^2 - 2y + 4 = 0$;
9) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + y + 4 = 0$;
10) $x^2 + 10xy + 25y^2 + 2x + 10y - 3 = 0$;
11) $5x^2 - 16xy + 13y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$;
12) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$;
13) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 6x - 24y + 9 = 0$.

9.14. Etablir l'équation et déterminer de quelle classe est la conique qui passe par 5 points définis par leurs coordonnées :

1) $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
2) $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
3) $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
4) $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
5) $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(-2, -1)$, $(3, 4)$;
6) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right)$.

9.15. Déterminer, en fonction du paramètre λ, de quelle classe est la conique :

1) $4x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1$;
2) $\lambda(x^2 + y^2) - 10xy + x + y + 4 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + y^2(\lambda - 1) + 2\lambda(x - y + 1) = 0$;
4) $\lambda x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$.

9.16. De quelle classe peut être la conique définie par l'équation :

1) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 = A_2x + B_2y + C_2$;
2) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
3) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 - (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
4) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 1$;
5) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$?

9.17. Ecrire les équations des asymptotes de l'hyperbole $\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$:

1) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 - (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
2) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 1$.

9.18. Démontrer sans recourir aux équations (6) de l'introduction au présent chapitre que l'origine du repère est le centre de symétrie d'une conique si et seulement si l'équation de la courbe ne contient pas les puissances premières de x et y. En déduire les équations (6) pour les coordonnées du centre de la conique.

9.19. Vérifier que la conique donnée est à centre. Calculer les coordonnées du centre et se débarrasser des puissances premières des variables dans l'équation par transport de l'origine des coordonnées au centre de la conique:

1) $x^2 - 8xy + 17y^2 + 8x - 38y + 24 = 0$;
2) $5x^2 + xy - 4x - y - 1 = 0$;
3) $8x^2 - 24xy + 16y^2 + 3x - 7y - 2 = 0$.

9.20. Démontrer que la courbe $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ possède un seul centre de symétrie si et seulement si $\delta \neq 0$.

9.21. Démontrer que l'ensemble des centres de symétrie d'une conique est soit un ensemble vide, soit un point, soit une droite.

9.22. 1) Démontrer que l'ensemble des centres de symétrie d'une courbe algébrique est soit un ensemble vide, soit un point, soit une droite.

2) Démontrer que l'ensemble des centres de symétrie d'un ensemble quelconque de points du plan est soit un ensemble vide, soit un point, soit un ensemble infini.

3) Donner un exemple d'une courbe continue dont l'ensemble des centres de symétrie est infini sans être une droite.

CHAPITRE IV

QUADRIQUES

§ 10. Equations des ensembles de points dans l'espace et théorie élémentaire des quadriques

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *équation d'un ensemble*, *polynôme homogène*, *surface algébrique*, *ordre de la surface algébrique*, *équations paramétriques d'une surface*, *surface de révolution*, *cône*, *cône circulaire*, *cylindre*, *cylindre circulaire droit*, *hyperboloïdes à une et à deux nappes*, *paraboloïdes elliptique et hyperbolique*, *intersection des surfaces*, *section d'une surface par un plan*, *génératrice rectiligne d'une surface*, *projection d'un ensemble sur le plan*, *génératrices et directrices d'un cylindre et d'un cône*, *sommets d'un ellipsoïde*, *d'un hyperboloïde*, *d'un paraboloïde et d'un cône*, *axe et demi-axe d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde*, *équation canonique et classe de la quadrique*.

On admet partout que le repère est orthonormé et que les projections sont orthogonales, sauf mention du contraire.

Il existe pour chaque quadrique un repère orthonormé par rapport auquel cette surface possède une équation canonique. Il y a en tout 17 classes de quadriques. Chaque classe se caractérise par sa propre forme d'équation canonique. Toutes les classes de quadriques et leurs équations canoniques sont énumérés dans l'introduction au § 11. Ici on donne les équations canoniques et les représentations géométriques des neuf classes principales:

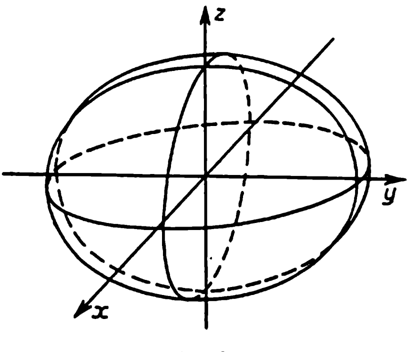


Fig. 4

ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(fig. 4)};$$

hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(fig. 5)}; \qquad (1)$$

hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(fig. 6)};$$

cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{(fig. 7)};$$

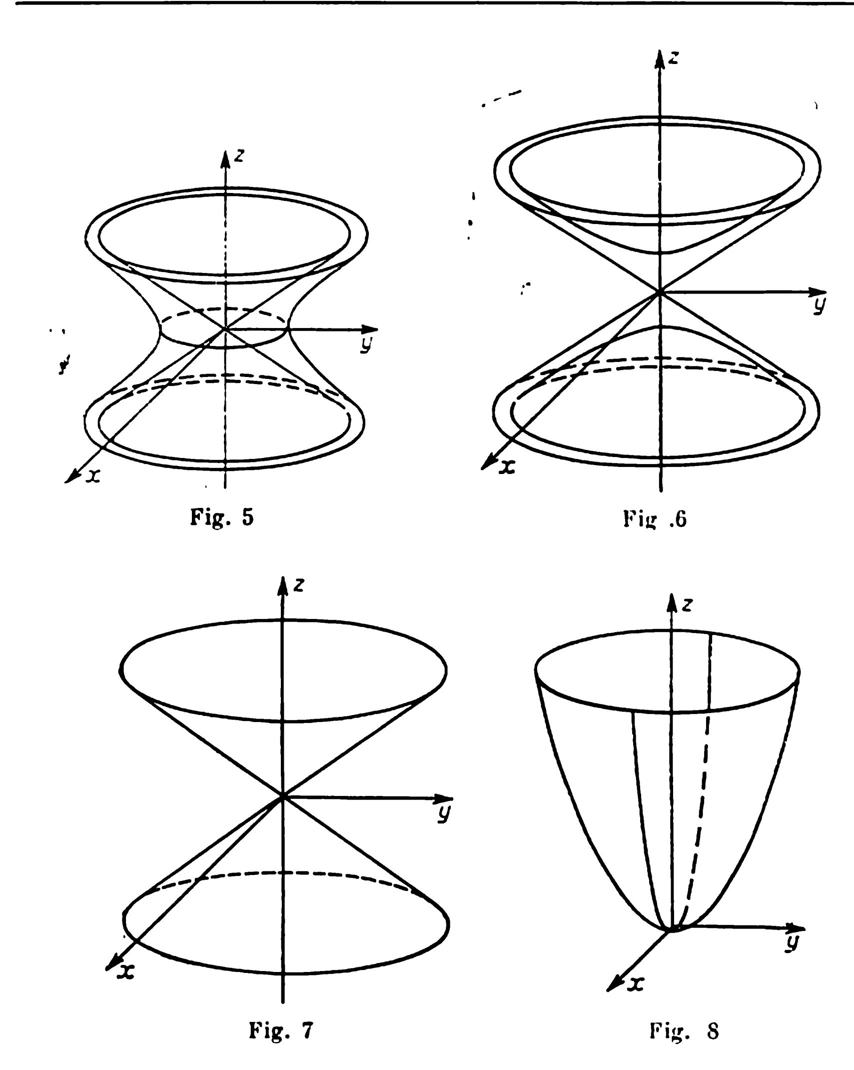


Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \text{(fig. 8)};$$

paraboloïde hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \text{(fig. 9)}; \qquad (2)$$

cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(fig. 10)};$$

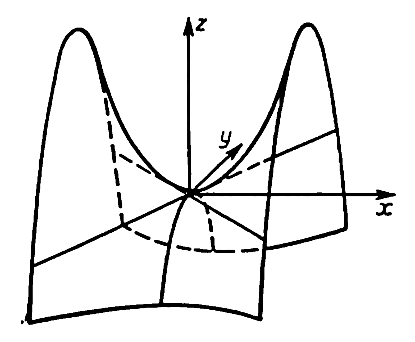


Fig. 9

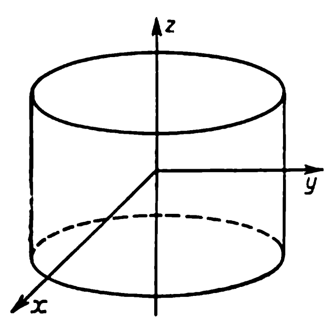


Fig. 10

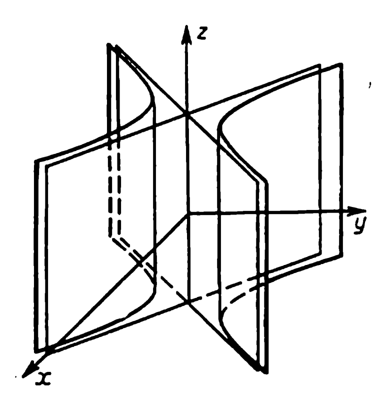


Fig. 11

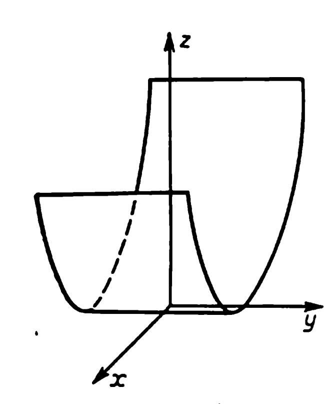


Fig. 12

cylindre hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(fig. 11)};$$

cylindre parabolique

$$\frac{x^2}{a^2}=2z \quad \text{(fig. 12)}.$$

Donnons les équations des familles de génératrices rectilignes de deux classes importantes de quadriques.

Deux familles de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe (1) peuvent être décrites par les systèmes d'équations suivants:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{array}\right.$$

où α, β sont des paramètres arbitraires tels que $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Deux familles de génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique (2) sont décrites par les

systèmes d'équations

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta z, \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta, \\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\alpha z, \end{cases}$$

où α, β sont des paramètres arbitraires tels que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

L'équation algébrique de la forme $\Phi(x, y) = 0$ (ne contenant pas la variable z) définit une surface cylindrique. Les génératrices rectilignes de ce cylindre sont parallèles à l'axe Oz; leurs équations sont $x = x_0$, $y = y_0$, où $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

L'équation de la forme $\Phi(x^2 + y^2, z) = 0$ *) définit une surface de révolution ($\mathcal{S}$). La section $\mathcal{L}$ de cette surface par le plan Oxz (elle possède dans le plan Oxz l'équation $\Phi(x^2, z) = 0$) est symétrique par rapport à l'axe Oz. Chaque « moitié » de la courbe $\mathcal{L}$ engendre la surface $\mathcal{S}$ lors de sa rotation autour de l'axe Oz.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux surfaces définies respectivement par les équations algébriques $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$. L'ensemble $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est alors défini par le système d'équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0.$$

L'équation définissant l'ensemble $\mathcal{M}$ découle de l'équation définissant l'ensemble $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$. L'équation définissant la surface $\mathcal{M}$ résulte du système d'équations définissant les surfaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}$.

Représentation d'une quadrique. Classes de quadriques (problèmes 10.1 à 10.17)

10.1. 1) Que représente une surface algébrique d'ordre 1 ?

2) Donner un exemple de surface algébrique d'ordre 3; la représenter dans un repère orthonormé.

10.2. Est-ce qu'une surface algébrique d'ordre 2 peut être une droite? Un plan? Un ensemble vide? Donner des exemples.

10.3. Une famille de surfaces est définie dans un repère orthonormé par l'équation contenant le paramètre arbitraire λ. Déterminer, en fonction de λ, de quelle classe sont les surfaces suivantes:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 2) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
3) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 4) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$;
5) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; 6) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$;
7) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$; 8) $x^2 + y^2 = \lambda z$;
9) $\lambda x^2 + y^2 = z$; 10) $\lambda(x^2 + y^2) = z$;
11) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$; 12) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$;
13) $x^2 + y^2 = \lambda$; 14) $x^2 - y^2 = \lambda$.

10.4. 1) Indiquer les classes de quadriques qui ne contiennent aucune surface de révolution.

---

*) Cette équation peut être obtenue de l'équation algébrique $\Phi(u, v) = 0$ par changement de variables: $u = x^2 + y^2$, $v = z$. Dans ce cas, on peut en général ne pas éliminer le cas où l'équation ne possède pas de solutions réelles. On parle alors d'une surface « imaginaire ».

2) Enumérer les classes de quadriques qui contiennent au moins une surface de révolution.

10.5. Ecrire l'équation de la sphère:

1) de centre au point C (1, 1, 1) et de rayon $\sqrt{3}$;

2) de centre au point C (1, 2, 3) et de rayon 1.

10.6. Calculer les coordonnées du centre C et le rayon R de la sphère:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$;

2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 12z + 3 = 0$.

10.7. Calculer les coordonnées du centre de la surface et ses demi-axes, écrire les équations des plans de symétrie et représenter la surface dans le repère donné:

1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y + 6z = 0$;

2) $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$.

10.8. Calculer les coordonnées du centre de la surface et de ses sommets, écrire les équations de l'axe de symétrie et des plans de symétrie, représenter la surface dans le repère initial:

1) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6x + 4y + 6z = 0$;

2) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x - 8z + 10 = 0$.

10.9. Déterminer de quelle classe est la quadrique:

1) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 4x - 4y = 0$;

2) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$;

3) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 0$;

4) $2x^2 + y^2 + 2z + 1 = 0$;

5) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$;

6) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$.

10.10. Déterminer de quelle classe est la quadrique, représenter la surface dans le repère initial:

1) $xy = 0$; 2) $xy = 1$; 3) $xy = -1$;

4) $2xy + z = 0$; 5) $2xy - z = 0$.

10.11. Trouver l'axe de révolution de la quadrique $x^2 + z^2 + x = 0$, représenter cette surface.

10.12. Déterminer de quelle classe est la quadrique, trouver son axe de révolution et les coordonnées de ses sommets, représenter la surface:

1) $x^2 + z^2 + 2y = 1$; 2) $z^2 = 2xy$.

10.13. Calculer les coordonnées du centre de la quadrique $x^2 + 2yz = 1$, écrire les équations de son axe de révolution et du cercle de gorge, déterminer le rayon du cercle de gorge, représenter cette surface.

10.14. Trouver les points d'intersection de la surface $x^2 + y^2 = z$ et de la droite:

1) $x = y = t$, $z = 4t$; 2) $x = y = z + 1$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+6}{8}$.

10.15. Combien de points communs peuvent avoir une droite et une quadrique? Donner des exemples.

10.16. Déterminer si le point M (1, 1, 1) se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

10.17. L'axe Oz est dirigé vers le haut. Déterminer si le point M (1, 1, 1) se trouve au-dessus ou au-dessous du paraboloïde $x^2 + 2y^2 = 2z$.

Surfaces de révolution, cylindres et cônes (problèmes 10.18 à 10.45)

10.18. Donner des exemples de surfaces de révolution qui sont des surfaces algébriques d'ordres 2, 3, 4.

10.19. Nommer les classes et écrire les équations canoniques des surfaces cylindriques d'ordre 2.

10.20. Donner des exemples de surfaces cylindriques qui sont des surfaces algébriques d'ordres 3 et 4.

10.21. Donner un exemple de la surface cylindrique qui n'est pas une surface algébrique.

10.22. Donner des exemples de cylindres et de cônes qui ne sont pas des surfaces de révolution.

10.23. Démontrer que toute équation de la forme $F(x, y, z) = 0$, où F est un polynôme homogène, définit un cône de sommet à l'origine des coordonnées.

10.24. Donner un exemple de la surface conique qui n'est pas une surface algébrique.

10.25. Peut-on considérer le plan comme un cas particulier de la surface conique ? Comme un cas particulier du cylindre ? Comme une surface de révolution ?

10.26. Ecrire l'équation vectorielle du cylindre circulaire droit de rayon R dont l'axe est $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

10.27. Ecrire l'équation vectorielle de la sphère de centre au point M_0 ($\mathbf{r}_0$) et de rayon R.

10.28. Ecrire l'équation vectorielle du cône circulaire droit de sommet au point M_0 ($\mathbf{r}_0$) et d'axe $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ en sachant que l'angle entre sa génératrice et l'axe vaut α.

10.29. Ecrire l'équation vectorielle de l'ellipsoïde obtenu par rotation de l'ellipse autour de son grand axe si les foyers de l'ellipse sont aux points M_1 ($\mathbf{r}_1$), M_2 ($\mathbf{r}_2$) et son grand axe est a.

10.30. Ecrire l'équation de la surface engendrée par rotation de la parabole $z^2 = x$:

1) autour de l'axe Oz; 2) autour de l'axe Ox.

10.31. Ecrire l'équation et déterminer de quelle classe est la surface obtenue par rotation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 2$:

1) autour de l'axe Ox; 2) autour de l'axe Oy.

10.32. Ecrire l'équation de la surface obtenue par rotation du cercle $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ autour de l'axe Oy.

10.33. Ecrire les équations des surfaces engendrées par rotation de l'hyperbole $xy = 1$ autour des asymptotes.

10.34. 1) Ecrire les équations paramétriques de la surface obtenue par rotation de la courbe $z = f(x)$ $(x \geqslant 0)$ autour de l'axe Oz.

2) Ecrire les équations paramétriques de la surface obtenue par rotation de la courbe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ autour de l'axe Oz.

10.35. Démontrer que la surface cylindrique se définit par les équations $x = \varphi(u) + a_1v$, $y = \psi(u) + a_2v$, $z = \chi(u) + a_3v$ si sa directrice est définie par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ et sa génératrice est parallèle au vecteur $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$.

10.36. Démontrer que le cône dont la directrice est donnée par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ et dont le sommet est à l'origine des coordonnées se définit par les équations $x = u\varphi(v)$, $y = u\psi(v)$, $z = u\chi(v)$.

10.37. Ecrire l'équation du cylindre circulaire droit de rayon $\sqrt{2}$ et d'axe $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$.

10.38. Ecrire l'équation du cylindre circulaire droit passant par le point $M(1, 1, 2)$ et ayant un axe d'équations $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$.

10.39. Ecrire l'équation du cône circulaire droit de sommet à l'origine des coordonnées en sachant que la direction de son axe est définie par le vecteur $\mathbf{a}(1, 1, 1)$ et que ses génératrices forment avec cet axe un angle égal à $\text{Arc} \cos (1/\sqrt{3})$.

10.40. Ecrire l'équation de la surface obtenue par rotation de la droite $x = 1 + t$, $y = z = 3 + t$ autour de l'axe Oz. De quelle classe est cette surface?

10.41. Ecrire l'équation de la surface obtenue par rotation de la droite $x = 0$, $y - z + 1 = 0$ autour de l'axe Oz. De quelle classe est cette surface?

10.42. Ecrire l'équation de la surface obtenue par rotation de la droite $x = -t$, $y = z = 2t$ autour de la droite $x = y = z$. De quelle classe est cette surface?

10.43. Ecrire l'équation du cône de sommet au point $M(1, 1, 1)$ et tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

10.44. Ecrire les équations paramétriques du cylindre de génératrice parallèle au vecteur $\mathbf{a}(1, 1, 1)$ et de directrice définie par les équations $x = -1 + 2\cos t$, $y = -1 + 2\sin t$, $z = 3 - 2\cos t - 2\sin t$.

10.45. Obtenir l'équation algébrique de la surface en éliminant les paramètres entre $x = u + \cos v$, $y = u + \sin v$, $z = u - \cos v - \sin v$. Quelle surface obtient-on?

Sections des quadriques
(problèmes 10.46 à 10.76)

10.46. 1) Les sections de la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ par les plans $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ sont projetées sur le plan Oyz. Représenter les projections.

2) Les sections de la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ par les plans $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ sont projetées sur le plan Oyz. Représenter les projections.

3) Les sections de la surface $2x^2 - y^2 = 2z$ par les plans $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ sont projetées sur le plan Oyz. Représenter les projections.

4) Les sections de la surface $2x^2 - y^2 = 2z$ par les plans $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ sont projetées sur le plan Oxz. Représenter les projections.

5) Les sections de la surface $2x^2 - y^2 = 2z$ par les plans $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ sont projetées sur le plan Oxy. Représenter les projections.

10.47. 1) Les sections des surfaces $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ par le plan $x = 0$ sont projetées sur le plan Oyz. Représenter les projections.

2) Les sections des mêmes surfaces par le plan $z = 1$ sont projetées sur le plan Oxy. Représenter les projections.

10.48. 1) Est-ce que la ligne d'intersection de deux quadriques est une courbe plane? Donner des exemples.

2) On sait que la ligne d'intersection de deux quadriques est une courbe plane. Est-ce que cette courbe est algébrique? Si elle l'est, quel est son ordre? Etudier des exemples.

10.49. Déterminer la forme de la ligne d'intersection des surfaces $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ et écrire ses équations paramétriques.

10.50. Démontrer que la ligne d'intersection d'une quadrique et d'un plan est une courbe algébrique d'ordre au plus égal à 2. Donner des exemples où cette courbe est du premier ordre.

10.51. Soient $\mathcal{F}$ une surface définie par l'équation algébrique $F(x, y) = 0$, et $\mathcal{L}$ un ensemble de points non vide défini par les équations $F(x, y) = 0$, $z = 0$. Démontrer les affirmations:

1) $\mathcal{F}$ est une surface cylindrique de génératrice parallèle à l'axe Oz et de directrice $\mathcal{L}$;

2) $\mathcal{L}$ est la section de $\mathcal{F}$ par le plan Oxy;

3) $\mathcal{L}$ est la projection de $\mathcal{F}$ sur le plan Oxy;

4) $\mathcal{L}$ est la projection de toute directrice du cylindre sur le plan Oxy;

5) $\mathcal{L}$ contient la projection, sur le plan Oxy, de toute courbe située sur le cylindre.

10.52. Ecrire l'équation de la projection de la ligne d'intersection des surfaces $x^2 + 2y^2 = 2z$, $x + 2y + z = 1$ sur le plan Oxy. Que représente cette ligne?

10.53. Soit $\mathscr{S}$ la section du paraboloïde $x^2 + y^2 = 2z$ par le plan qui coupe le demi-axe positif Oz en un point unique. Démontrer que la projection de $\mathscr{S}$ sur le plan Oxy est un cercle.

10.54. Démontrer que la ligne d'intersection des surfaces $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$ est une ellipse. Ecrire ses équations paramétriques.

10.55. Suivant quelle ligne se coupent le paraboloïde $x^2 - y^2 = 2z$ et le plan $x + y + z = 1$?

10.56. Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$, $2x + 2y + z + 1 = 0$.

10.57. Ecrire les équations paramétriques du cône de sommet à l'origine des coordonnées et de directrice définie par les équations $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$.

10.58. Ecrire l'équation du cylindre de génératrice parallèle à l'axe Oz et de cercle directeur $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z = 1$.

10.59. La génératrice du cylindre est parallèle à l'axe Oz, son cercle directeur est défini par $x^2 + y^2 = 2z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Ecrire l'équation du cylindre.

10.60. La génératrice du cylindre est parallèle à l'axe Oz, sa directrice est l'ellipse $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$. Démontrer que c'est un cylindre circulaire droit, écrire son équation, trouver l'axe et le rayon.

10.61. La génératrice du cylindre est parallèle au vecteur **a** (1, 1, 1), son cercle directeur est défini par $x^2 + y^2 = 2z$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Ecrire l'équation du cylindre.

10.62. Ecrire l'équation du cône de sommet au point O (0, 0, 0) et de cercle directeur défini par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x + y + z = 1$.

10.63. Ecrire l'équation de l'ellipsoïde, dont les plans de symétrie se confondent avec les plans de coordonnées, et qui contient le point M (3, 1, 1) et le cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - z = 0$.

10.64. Démontrer que les centres des sections planes du cylindre elliptique appartiennent à son axe.

10.65. Trouver le centre de la section de l ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 40$ par le plan:

1) $x + y + 2z = 5$; 2) $x + y + z = 7$.

10.66 (s). Trouver le centre de la section de l'hyperboloïde $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -4$ par le plan $x + y + 2z = 2$.

10.67. Soient M_0 (5, 7, 20) un point du plan et $\{\mathbf{p}\,(-3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}), \mathbf{q}\,(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$ une base orthonormée de ce plan. Ecrire par rapport au repère $\{M_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ les équations de la ligne d'intersection de ce plan avec le cône $x^2 + 5y^2 - z^2 = 0$. Trouver les coordonnées du centre de la ligne d'intersection ainsi que les équations de ses axes de symétrie dans le repère initial (de l'espace).

10.68 (s). Ecrire l'équation de l'ensemble des centres des sec-

tions de l ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ par les plans parallèles au plan $x + y + z = 1$.

10.69. Ecrire l'équation de l'ensemble des centres des sections de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - 3z^2 = 2$ par les plans parallèles au plan $x + y + z = 1$.

10.70. Ecrire l'équation de l'ensemble des centres des sections du paraboloïde $x^2 + y^2 = 2z$ par les plans parallèles au plan $x + y + z = 1$.

10.71 (s). Ecrire l'équation du plan qui coupe l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ suivant une ellipse dont le centre se trouve au point C (3, 2, 1).

10.72. Ecrire les équations des projections de la ligne d'intersection de l'ellipsoïde $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$ et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ sur les plans de coordonnées. Que représente cette ligne ?

10.73. Ecrire les équations des projections de la ligne d'intersection des ellipsoïdes $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$, $3x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 10$ sur les plans de coordonnées. Que représente cette ligne ?

10.74. Ecrire les équations des projections de la ligne d'intersection des surfaces $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2z$ sur les plans de coordonnées. Que représente cette ligne ? Trouver ses équations paramétriques.

10.75 (s). Ecrire les équations des projections de la ligne d'intersection des surfaces $5x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ sur les plans de coordonnées.

10.76. Démontrer que la ligne d'intersection du paraboloïde $x^2 + 2y^2 = 4z + 10$ et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ est constituée de deux cercles. Trouver les points d'intersection de ces cercles et leurs rayons.

Génératrices rectilignes des quadriques (problèmes 10.77 à 10.88)

10.77. Nommer les classes de quadriques possédant des génératrices rectilignes.

10.78. Est-ce que le nombre des génératrices rectilignes passant par un point de la quadrique peut être égal à 0 ? 1 ? 2 ? 3 ? Peut-il être infini ? Donner des exemples.

10.79. Ecrire l'équation de la famille des génératrices rectilignes du cylindre $x^2 - y^2 = 1$.

10.80. Ecrire l'équation de la famille des génératrices rectilignes du cône $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

10.81. Trouver les génératrices rectilignes du paraboloïde $4x^2 - y^2 = 16z$, qui se coupent au point M (2, 0, 1).

10.82. Ecrire l'équation du plan passant par les points M (1, 1, 1) et N (2, 0, 2) et coupant le paraboloïde $x^2 - y^2 = 2z$ suivant un couple de droites.

10.83. Ecrire l'équation du plan qui coupe l'hyperboloïde $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ suivant un couple de droites passant par le point $M(6, -3, 2)$.

10.84. Soient le paraboloïde $x^2 - y^2 = 2z$ et le plan $x + y + z = 1$. Ecrire l'équation du plan parallèle au plan donné et coupant le paraboloïde suivant un couple de droites. Former les équations de ces droites et calculer l'angle de ces droites.

10.85. Deux génératrices rectilignes du paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se coupent en un point appartenant au plan $z = h$. Calculer l'angle qu'elles forment:

1) pour $h = 0$; 2) pour $h = 1$;

3) pour un h arbitraire.

10.86. Trouver l'ensemble des points de la surface $\mathscr{S}$ en lesquels se coupent ses génératrices rectilignes réciproquement orthogonales, si $\mathscr{S}$ est définie par l'équation:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 2z$; 3) $x^2 - 4y^2 = 2z$.

10.87. Démontrer que les projections des génératrices rectilignes du paraboloïde $x^2 - y^2 = 2z$ sur le plan Oxz sont tangentes à la parabole $x^2 = 2z$.

10.88. Démontrer que les projections des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ sur le plan Oxy sont tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 1$.

§ 11. Théorie générale des quadriques

On utilise dans ce paragraphe les définitions suivantes: *formes quadratiques mineure et majeure de la quadrique*, *classe de quadrique*, *invariants* (*rang et signature des formes quadratiques mineure et majeure de la quadrique*), *centre de la quadrique*, *équation canonique de la surface*, *base canonique et repère canonique*.

Il y a 17 classes de quadriques, dont chacune est caractérisée par son propre assortiment d'invariants et sa forme d'équation canonique (la plus simple forme à laquelle peut être réduite une équation de la quadrique par un choix de repère cartésien orthonormé). La base et le repère correspondants sont également dits canoniques.

Le tableau 2 donne la liste des classes et des équations canoniques des quadriques. Les rangs et les modules des signatures des formes quadratiques majeure et mineure sont respectivement notés R, Σ, r, σ.

On propose au lecteur un exposé détaillé de l'algorithme de réduction d'une équation du deuxième degré à la forme canonique. Cet algorithme peut également être utilisé pour la simplification des équations qui contiennent n'importe quel nombre de variables. Le repère initial est supposé orthonormé. Dans tous les changements de coordonnées on passe à un nouveau repère orthonormé.

L'étape principale consiste dans « l'élimination », par un choix judicieux de base, des termes de l'équation contenant les produits des variables. Arrêtons-nous sur cette opération. L'équation de la quadrique

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + k = 0 \quad (1)$$

peut être écrite sous la forme matricielle

$${}^t\xi A\,\xi + 2\mathbf{a}\xi + k = 0, \quad (2)$$

Tableau 2

Objet	Equation canonique	R	Σ	r	σ
« Ellipsoïde imaginaire » (ensemble vide)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=-1$	4	4	3	3
Ellipsoïde	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$	4	2	3	3
Hyperboloïde à une nappe	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$	4	0	3	1
Hyperboloïde à deux nappes	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=-1$	4	2	3	1
« Cône imaginaire » (point)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$	3	3	3	3
Cône	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$	3	1	3	1
Paraboloïde elliptique	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=2\zeta$	4	2	2	2
Paraboloïde hyperbolique	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=2\zeta$	4	0	2	0
Cylindre elliptique	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	2
« Cylindre elliptique imaginaire » (ensemble vide)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=-1$	3	3	2	2
Cylindre hyperbolique	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	0
Couple de plans sécants	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=0$	2	0	2	0
« Couple de plans sécants imaginaires » (droite)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=0$	2	2	2	2
Cylindre parabolique	$\xi^2=2\alpha\eta$	3	1	1	1
Couple de plans parallèles	$\xi^2-\alpha^2=0$	2	0	1	1
« Couple de plans parallèles imaginaires » (ensemble vide)	$\xi^2+\alpha^2=0$	2	2	1	1
Couple de plans confondus (plan)	$\xi^2=0$	1	1	1	1

où

$$\xi = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{a} = \| a_1 \quad a_2 \quad a_3 \|.$$

Etant donné la matrice S de passage d'un repère à l'autre, les formules de changement de coordonnées se présentent sous la forme matricielle suivante

$$\xi = S\xi'. \tag{3}$$

La substitution de (3) dans (2) donne l'équation

$$^t\xi' A' \xi' + 2\mathrm{a}'\xi' + k = 0.$$

La constante k ne varie pas par changement de coordonnées (3)

$$\mathrm{a}' = \mathrm{a}S, \quad A' = {}^tSAS.$$

On recherche une base orthonormée par rapport à laquelle la matrice A' est diagonale. A cette fin: 1) on calcule les racines de l'équation caractéristique $| A - \lambda E | = 0$; 2) on écrit pour chaque racine le système d'équations $(A - E)\ \xi = o$ et on détermine la famille fondamentale de solutions; 3) en appliquant le processus d'orthogonalisation et en normant les vecteurs obtenus, on trouve la base recherchée; 4) on compose la matrice de passage S à partir des colonnes principales. Dans la nouvelle base, la matrice A' est diagonale, sa diagonale principale porte, compte tenu de leur multiplicité, les racines de l'équation caractéristique prises dans le même ordre que les colonnes correspondantes de la matrice S. Les coefficients des termes linéaires de l'équation transformée sont calculés suivant la formule $\mathrm{a}' = \mathrm{a}S$.

Si la matrice A est diagonale: $A = \mathrm{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, l'équation de la surface ne contient pas de produits des variables et est de la forme

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + k = 0. \tag{4}$$

La simplification complète de l'équation (1) s'effectue en plusieurs étapes.

I. Si l'équation contient les produits des variables, on change de base au moyen de la matrice orthogonale de passage S comme il a été décrit plus haut. L'équation transformée prend la forme (4).

II. Si l'équation ne contient plus de produits des variables mais possède les carrés et les termes linéaires des mêmes variables, on complète ces couples de termes jusqu'aux « carrés parfaits » et on transporte l'origine des coordonnées de sorte qu'il n'y ait plus de termes linéaires correspondants dans l'équation transformée.

III. Si l'équation contient le carré d'une variable et les termes linéaires en d'autres variables et s'il n'y a aucun autre terme renfermant x, y, z, on procède au changement de coordonnées dans le plan qui correspond aux termes linéaires. Ce changement se fait de telle sorte que l'équation transformée ne contienne plus de terme constant et que les termes linéaires se réduisent à un seul. Illustrons sur un exemple comment on effectue ce changement de coordonnées. Soit l'équation à simplifier

$$\lambda x^2 + ay + bz + c = 0. \tag{5}$$

On pose

$$y' = \mu\ (ay + bz + c), \quad z' = \mu\ (-by + az), \tag{6}$$

où $\mu = (a^2 + b^2)^{-1/2}$. Les formules (6) définissent le changement de repère orthonormé. L'équation (5) se transforme donc en

$$\lambda x^2 + \mu y' = 0. \tag{7}$$

Le changement de coordonnées (6) peut être effectué en deux étapes: on réalise d'abord le changement orthogonal

$$y' = \mu\,(ay + bz),\ z' = \mu\,(-by + az),\ \mu = (a^2 + b^2)^{-1/2},$$

et on procède ensuite au transport de l'origine des coordonnées.

IV. Si l'équation est simplifiée de telle manière qu'elle contient les carrés de certaines variables et un terme linéaire (tous de dénomination différente) et qu'elle renferme de plus un terme constant, on transporte l'origine des coordonnées le long de l'axe correspondant au terme linéaire de telle sorte qu'il n'y ait plus de terme constant dans l'équation transformée. Soit par exemple l'équation

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + az + k = 0.$$

On procède au changement de coordonnées $z = z' - \frac{k}{a}$, ce qui donne

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + az' = 0. \tag{8}$$

En réalisant successivement les opérations décrites plus haut, on aboutit toujours à une équation du second degré ayant une forme quasi canonique. Cette équation peut différer de son homologue canonique (tabulaire) au plus par un facteur numérique, par l'ordre des coordonnées et la place d'un terme, ou bien par le signe du coefficient d'un terme linéaire. Par exemple, les équations (7), (8) sont quasi canoniques. La base et le repère correspondants seront également dits quasi canoniques. Les repères canonique et quasi canonique diffèrent au plus par l'ordre et la direction des vecteurs de base. Les origines de ces repères se confondent.

La recherche du repère canonique s'effectue simultanément avec la simplification de l'équation de la surface et se fait également en plusieurs étapes. Il est utile de se rappeler que: a) dans les changements successifs de coordonnées les matrices de passage respectives S_1, S_2, . . . se multiplient dans le même ordre: $S = S_1 \cdot S_2 \ldots$; b) en appliquant l'algorithme décrit plus haut, on obtient, à chaque étape, les coordonnées de la nouvelle origine dans un repère intermédiaire et non pas dans le repère initial.

V. Si l'équation de la surface est réduite à la forme quasi canonique qui ne coïncide pas avec la forme canonique, il faut procéder aux transformations simples de l'équation et du repère, énumérées plus haut. On considère que le repère canonique est défini si sont calculées les coordonnées de son origine et de ses vecteurs de base par rapport au repère initial, et que l'équation de la quadrique est complètement simplifiée si sont trouvés l'équation canonique et le repère canonique.

L'équation canonique et le repère canonique de la surface donnée sont en général définis de façon non univoque. Sont toujours définis de façon non univoque le repère quasi canonique et l'équation quasi canonique.

Il existe d'autres procédés qui permettent de réduire l'équation de la quadrique à la forme canonique. D'après certains procédés le transport de l'origine des coordonnées précède le changement orthogonal de coordonnées qui « élimine » les termes contenant les produits des variables. Une description brève d'un de ces procédés figure dans le problème 11.15. Voir aussi les problèmes résolus 11.22, 16) et 17) où ce procédé est utilisé.

Invariants. Propriétés générales des quadriques (problèmes 11.1 à 11.18)

11.1. Enumérer les quadriques pour lesquelles: 1) $R = 4$; 2) $R = 3$; 3) $R = 2$; 4) $R = 1$; 5) $r = 3$; 6) $r = 2$; 7) $r = 1$.

11.2. Caractériser au moyen des invariants le groupe « principal » des quadriques: ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloïdes.

11.3. Caractériser au moyen des invariants les groupes suivants de quadriques:

1) paraboloïdes et cylindres paraboliques;
2) surfaces composées de plans;
3) surfaces « imaginaires »: « ellipsoïdes imaginaires », « cônes imaginaires », « cylindres elliptiques imaginaires », « couples de plans sécants imaginaires », « couples de plans parallèles imaginaires ».

11.4. 1) Lesquelles des quadriques « imaginaires » (voir problème 11.3,3)) ne possèdent pas de points réels ? Caractériser au moyen des invariants ce groupe de surfaces.

2) Lesquelles des quadriques « imaginaires » possèdent des points réels et de quelle forme sont ces surfaces ? Caractériser au moyen des invariants ce groupe de surfaces.

11.5. Caractériser, au moyen des invariants, les quadriques qui ne dégénèrent pas en un ensemble vide, un point, une droite, un plan, un couple de plans.

11.6. Caractériser, au moyen des invariants, les quadriques réelles qui ont:

1) deux familles de génératrices rectilignes;
2) une famille de génératrices rectilignes.

11.7. Enumérer les quadriques dont les équations canoniques contiennent un terme constant non nul. Caractériser ces surfaces par les invariants.

11.8. On sait que l'équation du second degré est écrite sous la forme matricielle (2) et que le déplacement de l'origine des coordonnées est défini par $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}' + \mathbf{b}$, où $\mathbf{b}$ est la matrice-colonne des coordonnées de la nouvelle origine. Ecrire la forme matricielle de l'équation transformée. Exprimer la matrice-ligne des nouveaux coefficients des termes linéaires en fonction de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, A.

11.9. Démontrer qu'il existe des équations du second degré dans lesquelles on ne peut pas éliminer, par passage à un nouveau repère, tous les termes du premier degré. Enumérer toutes les classes de ces surfaces et les caractériser au moyen des invariants.

11.10. Vérifier qu'il existe des équations du second degré dans lesquelles le passage à un autre repère cartésien permet d'éliminer tous les termes de degré inférieur au second. Enumérer toutes les classes de ces surfaces et les caractériser au moyen des invariants.

11.11. 1) Combien de centres de symétrie peut avoir une quadrique ?

2) Enumérer les quadriques qui n'ont pas de centre de symétrie.

3) Enumérer les quadriques qui possèdent un centre de symétrie unique.

4) Enumérer les quadriques qui possèdent un nombre infini de centres de symétrie.

11.12. 1) (s) Démontrer que, si une quadrique possède un centre de symétrie situé à l'origine des coordonnées, son équation ne contient pas de termes linéaires.

2) Démontrer que, si l'équation d'une quadrique ne contient pas de termes linéaires, cette surface possède un centre de symétrie situé à l'origine des coordonnées.

11.13. En utilisant les résultats des problèmes 11.8, 11.12, écrire les équations du centre de symétrie de la quadrique sous la forme matricielle.

11.14. Démontrer que la condition $\det A \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la quadrique définie par l'équation (2) ait un centre unique. Conseil: utiliser le résultat du problème 11.13.

11.15. On donne l'équation du second degré sous la forme matricielle (2) et on effectue le changement de coordonnées $\xi = S\xi' + \boldsymbol{b}$. La forme matricielle de l'équation transformée est

$$^t\xi' A' \xi' + 2\boldsymbol{a}'\xi' + k' = 0. \tag{9}$$

1) Exprimer la matrice A', la ligne $\boldsymbol{a}'$ et le terme constant k' en fonction de A, $\boldsymbol{a}$, k, $\boldsymbol{b}$, S.

2) Soit $\boldsymbol{b}$ la matrice-colonne vérifiant l'équation

$$A\boldsymbol{b} + {}^t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}. \tag{10}$$

Démontrer que $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}$, $k' = \boldsymbol{ab} + k$ pour tout S.

3) On suppose que l'équation (10) n'admet pas de solution. Démontrer qu'il n'existe pas de repère cartésien dans lequel l'équation de la surface ne contient pas de termes linéaires.

4) Soient une base orthonormée et une transformation φ de l'espace $\mathscr{E}_3$, associée à la forme quadratique de la surface (autrement dit, la transformation φ est définie dans la base donnée par la matrice A). Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ respectivement l'image de l'espace et le noyau de la transformation φ. Démontrer que le vecteur ${}^t\boldsymbol{a}$ se décompose d'une façon unique en somme ${}^t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, où $\boldsymbol{p} \in \mathscr{P}$, $\boldsymbol{q} \in \mathscr{Q}$. Démontrer que la condition $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{o}$ (${}^t\boldsymbol{a} \in \mathscr{P}$) est nécessaire et suffisante pour que l'équation (10) soit résoluble. Démontrer que si $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$, le vecteur $\boldsymbol{q}$ est un vecteur propre de φ et qu'il correspond à la valeur propre nulle.

5) Démontrer que pour $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$ le système d'équations

$$A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}, \quad ({}^t\boldsymbol{q} + \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} + k = 0 \tag{11}$$

est compatible.

6) Soit $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$ et soit $\boldsymbol{b}$ la solution du système d'équations (11). On sait de plus que la matrice S est orthogonale et que ses colonnes sont les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. Etant donné que $\lambda_3 = 0$ et la troisième colonne $\boldsymbol{f}_3$ de S est

colinéaire au vecteur $\boldsymbol{q}$, démontrer que l'équation (9) définie en coordonnées prend une forme quasi canonique $\lambda_1\xi'^2 + \lambda_2\eta'^2 + 2\boldsymbol{a}f_3\zeta' = 0$.

11.16. 1) L'équation d'une quadrique est écrite sous la forme développée (1) et sous la forme matricielle (2). Tous les coefficients de l'équation (1) sont multipliés par un nombre $\mu \neq 0$. Qu'arrive-t-il à la matrice A ? Comment varient dans ce cas les racines de l'équation caractéristique $|A - \lambda E| = 0$?

2) On donne l'équation de la quadrique par rapport à un repère orthonormé. Démontrer que si l'on passe à un autre repère orthonormé, l'équation caractéristique $|A - \lambda E| = 0$ ne varie pas et, par suite, ses racines ne changent pas. Est-ce que $\det A$ varie?

11.17. 1) Soit une équation du second degré, mise sous la forme matricielle (2). Exprimer, en fonction de A, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$ la matrice B de la forme quadratique majeure de la surface définie par cette équation.

2) On a procédé au changement de coordonnées $\xi = S\xi' + \boldsymbol{b}$. Ecrire la matrice T à l'aide de laquelle est transformée la forme quadratique majeure de la surface et démontrer que $\det B$ ne varie pas lorsqu'on passe d'un repère orthonormé à l'autre.

3) Démontrer que dans tout changement orthogonal de coordonnées qui conserve l'origine du repère, l'équation caractéristique $|B - \lambda E| = 0$ ne varie pas et, par suite, ses coefficients et racines ne changent pas.

11.18. On admet qu'il existe un repère cartésien dans lequel l'équation de la quadrique coïncide avec l'une des équations canoniques. Démontrer qu'il existe un repère orthonormé par rapport auquel l'équation de cette surface est de la même forme canonique.

Détermination de la forme et de la position d'une quadrique définie par une équation générale du second degré (problèmes 11.19 à 11.23)

11.19. En utilisant le résultat du problème 11.18, déterminer de quelle classe est la surface définie dans un repère cartésien par l'équation :

1) $(x + y + z)(x - y + 125z) = 1$;
2) $(x + y)(x + y + 1) = 1$;
3) $(x + y)(x + y + 1) = x - y$;
4) $(x + y + z + 1)(x - y + z) = x + z + 1$;
5) $(x + y + z + 1)(x - y + z) = x + 2z + 1$;
6) $(x + y)(x - y) = z$;
7) $(x + y + z)(x - y + z) = 0$;
8) $(x + 2y)(x + 2y + 1) = z$;
9) $(x + y)(x - 75y) = z^2$;
10) $(x + y)^2 = 3x + z$;

11) $(x + 2y + 3z)(2x + 3y + 4z) + (3x + 4y + 75z)^2 = 1$;
12) $(x + 2y + 3z)(2x + 3y + 4z) - (3x + 4y + 75z)^2 = 1$;
13) $(x + y) z - x^2 - x = 0$;
14) $(x + y + z)^2 + (x + 2y + 3z)^2 + (2x - y + z)^2 = 0$;
15) $(x + y + z)^2 + (x + 2y + 3z)^2 + (2x + 3y + 4z)^2 = 0$;
16) $(x + y + z)^2 + (x - 2y + z)^2 = 0$;
17) $(x + y + z)^2 + (x + y)^2 + (y + z)^2 = 1987$;
18) $(x + y + z)^2 + (x + y)^2 = 1987$;
19) $(x + y + z)^2 + (x + y)^2 + (2x + 2y + z)^2 = 1$;
20) $(x + y)^2 + z^2 + 1 = 0$.

11.20. Soit $(x + y + z)(x - y + z) - (2x - y + 2z)^2 = 1$ l'équation de l'hyperboloïde dans un repère cartésien. Ecrire l'équation de son cône asymptote.

11.21. La quadrique est définie dans un repère cartésien par une équation contenant le paramètre k. Déterminer, en fonction de k, de quelle classe est la surface.

1) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + k = 0$;
2) $2x_1^2 + kx_2^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0$;
3) $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + k = 0$;
4) $kx_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$;
5) $3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + kx_2 + x_3 + 1 = 0$;
6) (s) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + k = 0$.

11.22. La quadrique est définie par une équation rapportée à un repère orthonormé. Trouver le repère canonique et l'équation canonique de cette surface. Déterminer de quelle classe est la quadrique.

1) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0$;
2) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$;
4) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0$;
5) $x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0$;
7) $y^2 + 2xz + 2x + 2z + 1 = 0$;
8) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0$;
9) $-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0$;
10) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$;
11) $4x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x - 12y - 5z + 1 = 0$;
12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$;
13) $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$;
14) $6xy - 8y^2 - z^2 + 60y + 2z + 89 = 0$;
15) $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2x + 44y - 36z + 65 = 0$;
16) (s) $-x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2x + 3y - 5z + 1 = 0$;
17) (s) $9y^2 + 16z^2 + 24yz + 5x + 10y + 5z + 11 = 0$;
18) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$;

19) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$;
20) $-x^2 + 7y^2 - 24yz + 2x + 120y = 0$;
21) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0$;
22) $3x^2 + 4xy + 8x + 8y - 4z = 0$;
23) $-x^2 - 9y^2 + 6xy + 50x - 50y - 15z - 100 = 0$.

11.23. La surface rapportée à un repère orthonormé est définie par une équation contenant le paramètre k. Pour une valeur donnée de k, trouver le repère canonique et l'équation canonique de la surface. Déterminer, en fonction de k, de quelle classe est la surface. Si la surface est une droite, un plan ou un couple de plans, écrire les équations linéaires de ces ensembles dans le repère initial.

1) $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz + 26x + 34y + 10\sqrt{2}z + k = 0$; $k = 49$.

2) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 2y - 4z + k = 0$; $k = -1$.

3) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 2z + k = 0$; a) $k = -1$; b) $k = 5$; c) $k = 11$.

4) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 4x - 4y + k = 0$; $k = 4$.

5) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 8x + 8y + k = 0$; a) $k = 4$; b) $k = 8$.

6) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 12x + 12y - 24z + k = 0$; $k = 6$.

7) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 24y - 24z + k = 0$; $k = 12$.

8) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 5x + y - 2z + k = 0$; $k = 0$.

9) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z + k = 0$; a) $k = 15$; b) $k = 18$.

10) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 18z + k = 0$; $k = 18$.

11) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + k = 0$; a) $k = 8$; b) $k = 9$.

12) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 18x - 6y + 6z + k = 0$; $k = -18$.

13) $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x + 6y + 8z + k = 0$; a) $k = -12$; b) $k = -3$; c) $k = 6$.

14) $2y^2 - 3z^2 - 2\sqrt{3}xy - 4xz + 4\sqrt{3}yz + 50z + k = 0$; a) $k = -75$; b) $k = -70$; c) $k = -80$.

15) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz - 8x - 4y + 8z + k = 0$; a) $k = -4$; b) $k = 2$; c) $k = 8$.

16) $4x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4xy - 8xz + 8yz + 12x - 12y + 24z + k = 0$; a) $k = -42$; b) $k = -36$; c) $k = -30$.

17) $8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 4x + 8y + k = 0$; a) $k = 0$; b) $k = -9$.

18) $8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 8x + 6y + 4z + k = 0$; $k = 6$.

19) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 11x + 3y - z + k = 0$; $k = 1$.

20) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y - 6z + k = 0$; $k = 11$.

21) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 4x + 2y - 6z + k = 0$; a) $k = 1$; b) $k = -13$.

22) $-x^2 + 10y^2 - z^2 - 8xy + 6xz + 8yz + 24x - 8y - 16z + k = 0$; a) $k = -26$; b) $k = -14$; c) $k = -2$.

23) $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 10x - 2y - 2z + k = 0$; a) $k = 2$; b) $k = 5$; c) $k = 8$.

24) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 13x + 11y + 2z + k = 0$; $k = 6$.

25) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 24x - 12z + k = 0$; a) $k = -12$; b) $k = -6$.

CHAPITRE V

TRANSFORMATIONS DU PLAN. GROUPES

§ 12. Transformations linéaires et affines

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *application d'un ensemble dans l'autre*, *transformation d'un ensemble*, *image d'un élément et d'un ensemble*, *image réciproque* (ou *antécédent*) *d'un élément et d'un ensemble*, *application injective* (ou *injection*), *application bijective* (ou *bijection*), *application surjective* (ou *surjection*), *produit d'applications*, *application réciproque*, *transformation linéaire du plan*, *transformation affine*, *image du vecteur par transformation linéaire du plan*, *transformation linéaire du plan de vecteurs*, *symétrie du plan par rapport à une droite*, *symétrie du plan par rapport à un point*, *homothétie*, *translation du plan*, *contraction vers la droite dans le rapport k*, *transformation orthogonale*, *directions principales de la transformation affine*, *vecteurs propres de la transformation linéaire d'un plan de vecteurs*.

L'application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de l'ensemble $\mathscr{X}$ dans l'ensemble $\mathscr{Y}$ est une relation qui à tout élément $x \in \mathscr{X}$ associe un élément unique $y = f(x) \in \mathscr{Y}$ appelé *image de l'élément* x par l'application f. On dit que $\mathscr{X}$ est un *ensemble de départ*, et $\mathscr{Y}$ un *ensemble d'arrivée* de l'application f. L'ensemble $f(\mathscr{X})$ des images de tous les éléments $x \in \mathscr{X}$ est appelé *ensemble des valeurs de l'application* f (*image de l'ensemble* $\mathscr{X}$ par l'application f). L'application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ est appelée *transformation de l'ensemble* $\mathscr{X}$. On appelle *restriction de l'application* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ au sous-ensemble $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{X}$ l'application $f_{\mathscr{M}}: \mathscr{M} \to \mathscr{Y}$ qui coïncide avec f sur $\mathscr{M}$.

Donnons les définitions de quelques types d'applications $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

Objet	Définition
1) *Application injective* (*injection*)	$f(x_1) = f(x_2)$ entraîne $x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathscr{X})$
2) *Application surjective* (*surjection*)	$f(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$
3) *Application bijective* (*bijection*) jadis *correspondance biunivoque*	Cette application est en même temps une injection et une surjection

On appelle *produit direct* $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ des ensembles $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ l'ensemble des couples $\{(x, y) \mid x \in \mathscr{X},\ y \in \mathscr{Y}\}$. Le nombre des éléments d'un ensemble fini (le *cardinal*) est noté $|\mathscr{X}|$.

On appelle *produit des applications* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ et $g: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ l'application $h = gf: \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ définie par l'égalité $(gf)(x) = g(f(x))$ $(x \in \mathscr{X})$. Le produit gf est défini si l'ensemble des valeurs de l'application f est inclus dans l'ensemble de départ de l'application g.

L'*application identique* ι (ou $\iota_{\mathscr{X}}$) de l'ensemble $\mathscr{X}$ est définie par l'égalité $\iota(x) = x$ pour tout élément $x \in \mathscr{X}$.

L'application $g: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ est dite *réciproque* (ou *inverse*) de l'application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ et est notée f^{-1} si $f^{-1}f = \iota_{\mathscr{X}}$, $ff^{-1} = \iota_{\mathscr{Y}}$, c'est-à-dire que $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tous $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$.

On appelle *antécédent* de $y \in \mathscr{Y}$ par l'application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ tout élément $x \in \mathscr{X}$ tel que $f(x) = y$. Par *image réciproque* $f^{-1}(\mathscr{S})$ de l'ensemble $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Y}$ on désigne l'ensemble de tous les antécédents des éléments de $\mathscr{S}$.

Le point $x \in \mathscr{X}$ est appelé *point immobile* de la transformation $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ si $f(x) = x$. L'ensemble $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{X}$ est dit *immobile* par la transformation f si tous ses points sont immobiles. L'ensemble $\mathscr{M}$ est dit *invariant* par la transformation f si $f(x) \in \mathscr{M}$ pour tout point $x \in \mathscr{M}$. Tout ensemble immobile est invariant, mais la réciproque n'est pas vraie.

La droite numérique est une droite sur laquelle est défini un repère. La fonction réelle définie sur toute la droite numérique détermine une transformation de cette droite. La fonction linéaire $x^* = ax + b$ définit une *transformation linéaire de la droite.*

Soit f une transformation du plan rapporté à un repère cartésien. Les coordonnées x^*, y^* de l'image d'un point arbitraire du plan s'expriment par les coordonnées x, y de ce point à l'aide d'une paire de fonctions réelles de deux variables:

$$x^* = \varphi(x, y), \quad y^* = \psi(x, y). \tag{1}$$

On dit que les formules (1) donnent une *expression analytique* de la transformation f.

La *transformation linéaire du plan* est définie dans tout repère cartésien par les formules

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1, \quad y^* = a_2x + b_2y + c_2. \tag{2}$$

La transformation linéaire bijective du plan est dite *affine*. La transformation linéaire (2) est affine si et seulement si le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ de cette transformation est différent de zéro.

Soient A, B et C, D des points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Si f est une transformation linéaire du plan, on a $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{f(C)\,f(D)}$. On appelle *image du vecteur* $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ par la transformation linéaire f le vecteur $\mathbf{a}^* = \overrightarrow{f(A)\,f(B)}$. Ainsi, la transformation linéaire f du plan définit une transformation de l'ensemble des vecteurs du plan qu'on désigne par la même lettre f. Elle est définie par les formules

$$\alpha^* = a_1\alpha + b_1\beta, \quad \beta^* = a_2\alpha + b_2\beta,$$

où α, β et α^*, β^* sont les coordonnées du vecteur et de son image.

Soit $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ le repère cartésien dans lequel la transformation f est définie par les formules (2), $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^*$ $(i = 1, 2)$, $f(O) = O^*$. On a alors $\mathbf{e}_1(a_1, a_2)$, $\mathbf{e}_2(b_1, b_2)$, $O^*(c_1, c_2)$.

On dit que la transformation affine f est *de première espèce* si les bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ et $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)\}$ sont orientées de la même façon, et *de deuxième espèce* si elles le sont de façon opposée. Le déterminant Δ de la transformation affine est > 0 ou < 0 selon que cette transformation est de première ou de deuxième espèce.

Si Φ est une figure plane d'aire S et que S^* soit l'aire de son image par une transformation affine f, on a $S^*/S = |\Delta|$.

La transformation du plan est dite *orthogonale* si elle conserve les distances entre les points. La transformation orthogonale est affine et se définit dans

un repère orthonormé par les formules

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0,\\ y^* &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

si elle est de première espèce, et par

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0,\\ y^* &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + y_0 \end{aligned} \qquad (4)$$

si elle est de deuxième espèce.

Les directions de deux vecteurs orthogonaux du plan s'appellent *directions principales* de la transformation affine si les images de ces vecteurs sont également orthogonales.

Toute transformation affine f est le produit $f = h_2h_1g$, où g est une transformation orthogonale, et h_1 et h_2 sont des contractions vers deux droites perpendiculaires. Les directions de ces droites sont les directions principales de la transformation affine.

Le vecteur non nul **a** s'appelle *vecteur propre* de la transformation linéaire f du plan de vecteurs s'il existe un nombre λ tel que $f(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$. On dit que ce nombre est une valeur propre de la transformation f. On recherche les valeurs propres en tant que racines réelles de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On appelle *similitude de coefficient* $k > 0$ une transformation f du plan telle que $|\overrightarrow{f(A)f(B)}| = k\,|\overrightarrow{AB}|$ pour tous points A, B.

Dans les problèmes de ce paragraphe, l'angle de rotation du plan rapporté à une base de ce plan est mesuré dans le sens de la plus courte rotation du premier vecteur de base vers le second.

Propriétés générales des applications (problèmes 12.1 à 12.24)

12.1. Soit $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ une application. Démontrer que:

1) $f(\mathscr{A}_1) \subseteq f(\mathscr{A}_2)$ si $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{X}$;

2) $f(\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2) = f(\mathscr{A}_1) \cup f(\mathscr{A}_2)$;

3) $f^{-1}(\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2) = f^{-1}(\mathscr{B}_1) \cap f^{-1}(\mathscr{B}_2)$ si $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subseteq f(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{Y}$;

4) $f(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) \subseteq f(\mathscr{A}_1) \cap (\mathscr{A}_2)$ (est-ce que l'inclusion peut être stricte?).

12.2. Combien existe-t-il de bijections entre deux ensembles de n éléments chacun?

12.3. 1) Combien existe-t-il de transformations d'un ensemble de n éléments? Combien y en a-t-il de bijections?

2) Combien d'images par toutes les transformations possibles peut avoir un ensemble de n élements?

3) Combien existe-t-il d'applications d'un ensemble de m éléments dans un ensemble de n éléments?

12.4. Soit $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $|\mathscr{X}| = m$, $|\mathscr{Y}| = n$. Est-ce que l'application f peut être:

1) surjective pour $n < m$;

2) injective pour $n > m$?

12.5. Soit f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, où $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ sont des ensembles finis ayant un même nombre d'éléments. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes:

1) f est une injection;
2) f est une surjection;
3) f est une bijection.

12.6. Donner un exemple de l'application f d'un ensemble infini $\mathscr{X}$ dans un ensemble infini $\mathscr{Y}$, telle que

1) f soit surjective mais non injective.
2) f soit injective mais non bijective.

12.7. Etablir une bijection de l'ensemble des entiers naturels sur:

1) l'ensemble des entiers relatifs;
2) l'ensemble des entiers pairs;
3) l'ensemble des nombres rationnels;
4) l'ensemble de tous les points du plan dont les coordonnées sont rationnelles (points rationnels);
5) l'ensemble de tous les intervalles d'une droite, dont les extrémités sont rationnelles;
6) l'ensemble de tous les cercles du plan, dont les centres se trouvent aux points rationnels et les rayons sont rationnels;
7) l'ensemble de tous les polynômes $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ à coefficients entiers a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

12.8. Démontrer que:

1) il n'existe aucune bijection de l'ensemble des entiers relatifs sur l'ensemble de toutes les suites des nombres 0 et 1;
2) il existe une bijection de l'ensemble des nombres réels sur l'ensemble de toutes les suites des nombres 0 et 1.

12.9. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ des ensembles infinis, f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ une application bijective et $\mathscr{Y} \cap \mathscr{Z} = \varnothing$. Trouver une application bijective de $\mathscr{X}$ sur $\mathscr{Y} \cup \mathscr{Z}$ si:

1) $\mathscr{Z}$ est fini;
2) $\mathscr{Z}$ est dénombrable.

12.10. Démontrer que toute application f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ admet au plus une application réciproque.

12.11. Trouver une application bijective de la droite:

1) sur l'intervalle $]-1, 1[$; 2) sur le segment $[-1, 1]$.

12.12. Trouver une transformation du plan qui applique bijectivement le plan:

1) sur le disque ouvert $x^2 + y^2 < 1$;
2) sur le disque fermé $x^2 + y^2 \leqslant 1$;
3) sur le carré $|x| < 1$, $|y| < 1$ (le repère est orthonormé).

12.13. La transformation de la droite numérique est définie par la formule: $f(x) = ax + b$ (a, b sont des nombres réels). Démontrer que:

1) f est une bijection si et seulement si $a \neq 0$;

2) f conserve le sens des vecteurs sur la droite pour $a > 0$ et change leur sens pour $a < 0$;

3) l'image de l'intervalle de longueur l est un intervalle de longueur $|a|\,l$ pour $a \neq 0$.

12.14. Soit $f(x) = ax + b$ une transformation de la droite numérique. Trouver:

1) les points immobiles de la transformation f;

2) la transformation réciproque de f $(a \neq 0)$.

12.15. Ecrire la formule qui définit une application linéaire de l'intervalle $]a, b[$ dans l'intervalle $]c, d[$ de la droite numérique.

12.16. Soient f et g deux transformations linéaires de la droite numérique: $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$. Calculer les produits fg et gf. Dans quel cas $fg = gf$?

12.17. L'application f de la droite numérique dans le plan est définie dans un repère orthonormé par les formules $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(a > 0,\ b > 0)$.

1) Trouver l'image $\mathcal{S}$ de la droite par l'application f.

2) Est-ce que l'application f est bijective?

3) Indiquer des ensembles de la droite, qui s'appliquent bijectivement sur $\mathcal{S}$.

12.18. L'application f de la droite numérique dans le plan est définie par rapport à un repère orthonormé par les formules $x = -\operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

1) Trouver l'image $\mathcal{S}$ de la droite par l'application f.

2) Est-ce que l'application f est injective?

3) Trouver l'antécédent t de chaque point de $\mathcal{S}$.

12.19. La transformation f du plan est définie dans un repère orthonormé par les formules: $x^* = x^2 - y^2$, $y^* = 2xy$.

1) Est-ce que la transformation f est: a) une surjection, b) une bijection?

2) Trouver l'image réciproque d'un point arbitraire (x^*, y^*) du plan.

12.20. La transformation f du plan est définie dans un repère orthonormé par les formules: $x^* = e^x \cos y$, $y^* = e^x \sin y$.

1) Est-ce que la transformation f est une bijection?

2) Définir les ensembles du plan sur lesquels f est bijective.

3) Soit $\bar{f}$ la restriction de la transformation f à la bande $0 < y < \pi$. Trouver les formules de l'application réciproque de $\bar{f}$.

12.21. Soient les applications $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g: \mathcal{Y} \to \mathfrak{Z}$ et $h: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{U}$. Démontrer que la multiplication des applications est associative, c'est-à-dire que $h(gf) = (hg)f$.

12.22. Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des ensembles non vides et $\mathfrak{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

L'application π: $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ (projection de $\mathcal{Z}$ sur $\mathcal{Y}$) est définie par l'égalité $\pi((x, y)) = y$. Montrer que π est une surjection.

12.23. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{X}$ il existe une injection δ: $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

12.24. Le graphe de l'application f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est le sous-ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

1) Trouver l'image de l'ensemble $\mathcal{X}$ par une application φ: $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ définie par l'égalité $\varphi(x) = (x, f(x))$.

2) Démontrer que $f = \pi\varphi$ (pour la définition de π voir 12.22).

3) Démontrer que l'application f est injective si et seulement si φ est une injection.

4) Démontrer que f est une surjection si et seulement si $\pi(\Gamma) = \mathcal{Y}$.

Propriétés géométriques des transformations linéaires et affines du plan (problèmes 12.25 à 12.36)

12.25. Trouver le rayon vecteur de l'image d'un point arbitraire M (**r**) par la transformation donnée du plan:

1) l'homothétie de centre M_0 ($\mathbf{r}_0$) et de rapport $k \neq 0$;

2) la symétrie par rapport au point M_0 ($\mathbf{r}_0$);

3) la translation de vecteur **a**;

4) la projection orthogonale sur la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$;

5) la symétrie par rapport à la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$;

6) la contraction vers la droite $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ dans le rapport $\lambda > 0$.

12.26. La transformation affine associe à trois points A, B, C non alignés les points B, C, A respectivement. Trouver les points immobiles de cette transformation. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation devienne orthogonale?

12.27. La transformation affine associe aux sommets du triangle ABC les milieux K, L, M des côtés opposés. Trouver les images des points K, L, M et du point O d'intersection des médianes du triangle ABC. Donner une interprétation géométrique de cette transformation.

12.28. Démontrer que:

1) si A et B sont deux points immobiles distincts d'une transformation affine, il en est de même de tous les points de la droite AB;

2) si une transformation affine f possède un seul point immobile, toutes les droites invariantes (si elles existent) passent par ce point;

3) le point d'intersection de deux droites invariantes d'une transformation affine est un point immobile.

12.29. Démontrer que la transformation affine est une homothétie de centre M si elle possède un faisceau de droites invariantes qui se coupent au point M.

12.30. Démontrer que la transformation linéaire du plan est

affine si et seulement si l'image de chaque vecteur non nul est différente de zéro.

12.31. Démontrer que deux tangentes à l'ellipse (ou à l'hyperbole) sont parallèles si et seulement si les points de tangence et le centre de la courbe sont alignés.

12.32. Soit une ellipse inscrite dans un parallélogramme. Démontrer que si le point de tangence d'un côté du parallélogramme est le milieu de ce côté, il en est de même pour les autres côtés de ce parallélogramme.

12.33. Un quadrilatère $ABCD$ est circonscrit à l'ellipse de centre O. Démontrer que la somme des aires des triangles OAB et OCD est égale à celle des triangles OBC et OAD.

12.34. Démontrer que les sommets d'un losange circonscrit à l'ellipse appartiennent aux axes de symétrie de cette ellipse.

12.35. Les points A, B, C, D appartiennent à une ellipse de centre O, les aires des secteurs AOB et COD étant égales. Démontrer que les aires des triangles AOB et COD sont aussi égales.

12.36. Les points A et B appartiennent à l'ellipse de centre O dont les longueurs du grand et petit demi-axes sont a et b respectivement. Calculer l'aire du secteur AOB si l'angle AOB vaut φ, $0 < \varphi \leqslant \pi$, et si les points A et B sont symétriques par rapport au grand axe de l'ellipse.

Expression analytique des transformations affines et linéaires du plan (dans les problèmes 12.37 à 12.52, on donne un repère cartésien quelconque)

12.37. Ecrire les formules qui définissent la transformati n donnée du plan:

1) l'homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport k;

2) l'homothétie de centre $M(x_0, y_0)$ et de rapport k;

3) la symétrie par rapport au point $M(x_0, y_0)$;

4) la translation de vecteur $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$.

12.38. La transformation affine du plan est définie par les formules $x^* = 3x + 2y - 6$, $y^* = 4x - 3y + 1$. Trouver les images:

1) des points $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$, $E(1, 1)$, $M(-1, 5)$;

2) des droites $y = 0$, $x = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.

12.39. La transformation affine du plan est définie par les formules $x^* = 2x + 3y - 1$, $y^* = -3x - 4y + 2$. Trouver les antécédents:

1) des points $O(0, 0)$, $A(-1, 2)$, $B(4, -5)$;

2) des droites $y = 0$, $x = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

12.40. Ecrire les formules de la transformation affine du plan, qui fait correspondre aux points A, B, C les points A^*, B^*, C^* respectivement:

1) A (1, 0), B (0, 1), C (1, 1), A^* (—3, 5), B^* (4, —3), C^* (0, 0);

2) A (3/7, 1), B (1, 1/4), C (2, —1), A^* (—4, 2), B^* (—1, 6), C^* (4, 13);

3) A (1, 0), B (—12, $\sqrt{3}/2$), C (—1/2, $-\sqrt{3}/2$), $A^* = B$, $B^* = C$, $C^* = A$;

4) A (1, 2), B (—7, 4), C (3, —6); A^*, B^*, C^* sont les milieux des côtés du triangle ABC, opposés aux sommets A, B, C respectivement.

12.41. Trouver toutes les transformations linéaires du plan (si elles existent) qui associent aux points A, B, C les points A^*, B^*, C^* respectivement:

1) A (1, 4), B (—2, 1), C (0, 3), A^* (0, 0), B^* (1, 0), C^* (0, 4);

2) A (—2, 0), B (2, —1), C (0, 4), A^* (—2, 1), B^* (2, 1), C^* (0, 1);

3) A (2, 0), B (3, —1), C (4, —2), A^* (2, 1), B^* (—2, —1), C^* (—6, —3);

4) A (0, 0), B (—1, 2), C (1, —2), A^* (—1, —1), B^* (0, 0), C^* (1, 1).

12.42. Trouver tous les points immobiles de la transformation affine définie par les formules:

1) $x^* = 7x - 3y,\ y^* = x + y$;

2) $x^* = -5x + y,\ y^* = 6x$;

3) $x^* = -5x + y,\ y^* = 6x + 1$;

4) $x^* = 2x - y + 3,\ y^* = -2x + 2y - 6$;

5) $x^* = 4x + 3y - 1,\ y^* = -3x - 2y + 1$;

6) $x^* = x,\ y^* = y$.

12.43. Trouver les droites invariantes de la transformation linéaire définie par les formules:

1) $x^* = 2x + 3y,\ y^* = -y$;

2) $x^* = -x + y,\ y^* = x - y$;

3) $x^* = y - 9,\ y^* = 9x + 1$;

4) $x^* = y,\ y^* = -x + 1$;

5) $x^* = 2x + y - 3,\ y^* = 2x + 3y - 6$;

6) $x^* = 5x + 3y + 1,\ y^* = -3x - y$;

7) $x^* = 3x - 2y + 5,\ y^* = 2x - y + 5$.

12.44. Démontrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

de la transformation linéaire définie par les formules

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1, \quad y^* = a_2x + b_2y + c_2,$$

ne dépend pas du choix du repère.

12.45. Les points A, B, C ont dans le repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ les coordonnées (1, 0), (0, 1), (1, 1) respectivement et dans le repère $\{O^*, \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*\}$ les coordonnées respectives (1, —1), (—3, 2), (0, 1). Ecrire les formules définissant, dans le repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, la transformation affine f telle que $f(O) = O^*$, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^*$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2^*$.

12.46. Soient les formules de passage du repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ au repère $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$. Ecrire les formules définissant, dans le repère $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, la transformation affine f telle que $f(O) = O'$, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1'$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2'$:

1) $x = x' + y' - 2$, $y = 2x' - y' + 3$;
2) $x = 3x' - 4y' - 5$, $y = 4x' + 3y' + 1$.

12.47. Ecrire les formules de la transformation affine qui associe:

1) les droites $3x + 2y - 3 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$ aux droites respectives $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ et le point $B(-1, -2)$ au point $A(1, 1)$;

2) l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses aux droites respectives $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ et le point $B(1, 1)$ au point $A(x_0, y_0)$ (le point A n'appartient pas aux droites proposées).

12.48. Soit la transformation affine $x^* = 2x + 3y$, $y^* = 3x + 5y$. Ecrire l'équation de l'image de la courbe:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 1$; 3) $xy = 2$; 4) $y^2 = 6x$;
5) $(3x + 4y - 1)(4x - 3y + 1) = 0$;
6) $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2$.

12.49. Soit la transformation affine $x^* = -x + 5y + 1$, $y^* = 3x - 2y - 1$. Ecrire l'équation de l'antécédent de la courbe:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$; 3) $(y+1)^2 = 8(x-1)$;
4) $(x + y - 1)(x - y - 1) = 1$;
5) $(x + 2y - 2)(x + 2y + 2) = 0$.

12.50. 1) Ecrire les formules de la transformation affine de première espèce qui applique l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ sur elle-même de telle sorte qu'au point $A(1, \sqrt{3}/2)$ corresponde le point $B(-2, 0)$.

2) Résoudre le même problème pour la transformation affine de deuxième espèce.

12.51. Ecrire les formules de la transformation affine qui applique l'hyperbole $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ sur elle-même de telle sorte qu'au point $A(5, 4)$ corresponde le point $B(\sqrt{5}, 0)$.

12.52. Trouver la transformation affine qui applique la parabole $x^2 = 4y$ sur elle-même et:

1) qui envoie le point $A_1(2, 1)$ au point $B_1(4, 4)$, et le point $A_2(1, 1/4)$ en $B_2(3, 9/4)$;

2) dont le déterminant vaut 1.

Expression analytique des transformations affines (dans les problèmes 12.53 à 12.62, on donne un repère orthonormé)

12.53. Ecrire les formules des transformations du plan:
1) la rotation d'angle φ autour de l'origine des coordonnées;
2) la rotation d'angle φ autour du point $M(x_0, y_0)$;
3) la projection orthogonale sur l'axe des abscisses;
4) la projection orthogonale sur la droite $x - 3y + 1 = 0$;
5) la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées;
6) la symétrie par rapport à la droite $3x + 4y - 1 = 0$;
7) la contraction vers l'axe des abscisses de rapport $\lambda > 0$;
8) la contraction vers la droite $x + y - 2 = 0$ de rapport 1/3;
9) la contraction vers la droite $2x - y + 5 = 0$ de rapport 2.

12.54. Lesquelles des transformations du problème 12.53 sont:
1) affines; 2) orthogonales?

12.55. Donner une caractéristique géométrique des transformations:
1) $x^* = x,\ y^* = 3y$; 2) $x^* = 2x,\ y^* = 2y$;
3) $x^* = x - 1,\ y^* = y + 1$;
4) $x^* = -x,\ y^* = y$; 5) $x^* = -x,\ y^* = -y$;
6) $x^* = -y,\ y^* = x$; 7) $x^* = y,\ y^* = x$;
8) $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$;
9) $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\quad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$;
10) $x^* = 3x - 6,\ y^* = 3y + 2$;
11) $x^* = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1,\quad y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1$;
12) $x^* = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1,\quad y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}$;
13) $x^* = -x - 2,\quad y^* = -y + 2$;
14) $x^* = \frac{1}{10}(21x + 12y),\quad y^* = \frac{1}{10}(12x + 14y)$;
15) $x^* = \frac{1}{3}(2x + y - 2),\quad y^* = \frac{1}{3}(x + 2y + 2)$;
16) du problème 12.40, 3);
17) du problème 12.41, 2).

Dans 16) et 17) le repère est également orthonormé.

12.56. On tourne le plan d'un angle égal à $3\pi/4$ autour du point $A(0, 1)$. Trouver:
1) les images des points $O(0, 0)$ et $B(1, 0)$;
2) les antécédents des points O et B;
3) les images des droites $x = 0$ et $y = x$;
4) les antécédents des droites $y = 0$ et $y = -x$.

12.57. De quel angle faut-il tourner la droite $3x - 4y + 25 = 0$ autour du point $M(-7, 1)$ pour que son image:

1) soit parallèle à l'axe des abscisses;

2) soit tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25/2$?

12.58. Le centre d'un carré est au point $P(-1, 2)$ et l'un de ses côtés est défini par l'équation $x + 2y = 0$. Etablir les équations des autres côtés du carré.

12.59. Le centre d'un hexagone régulier se trouve au point $P(\sqrt{3}, 3/2)$ et l'un de ses côtés est défini par l'équation $y = \sqrt{3}x$. Former les équations des autres côtés de l'hexagone.

12.60. Calculer:

1) l'aire du parallélogramme dont les côtés sont définis par les équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_1x + b_1y + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + d_2 = 0$.

2) (s) l'aire du triangle dont les côtés sont définis par les équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$.

12.61. Ecrire l'équation de la droite passant par le point $M(-7, 13)$ et formant avec les droites $2x + y + 3 = 0$ et $x + y - 2 = 0$ un triangle dont l'aire est 9.

12.62. Un cercle est défini par l'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$. Etablir l'équation du cercle:

1) symétrique au cercle donné par rapport à la droite $x + y - 6 = 0$;

2) obtenu du cercle donné par rotation d'angle $\operatorname{Arc\,tg}\frac{4}{3}$ autour de l'origine des coordonnées;

3) obtenu du cercle donné par homothétie de centre $A(6, 0)$ et de rapport 4.

Opérations sur les transformations linéaires. Structure des transformations orthogonales et affines (dans les problèmes 12.63 à 12.89, on donne un repère orthonormé, sauf mention du contraire)

12.63. Ecrire les formules définissant les produits fg et gf de transformations affines données (le repère est cartésien)

1) f: $x^* = y$, $y^* = x$; g: $x^* = 3x + 4y + 1$, $y^* = -7x + 5y - 2$;

2) f: $x^* = 4x - 2y + 6$, $y^* = -3x + y$, g: $x^* = x - y$, $y^* = 4x + y + 1$.

12.64. Ecrire les formules du produit fg des transformations affines données f et g et caractériser ce produit du point de vue géométrique (le repère est cartésien);

1) f est la translation de vecteur $\mathbf{a}(-1, 1)$; g l'homothétie de centre $M(1, 2)$ et de rapport 3;

2) f est l'homothétie de centre M (2, —1) et de rapport —1/2; g la symétrie par rapport au point N (3, 1).

12.65. On donne la transformation du plan rapporté à un repère cartésien. Ecrire les formules de la transformation réciproque (si elle existe):

1) $x^* = y + 3,\ y^* = -x + 3y - 1$;
2) $x^* = 3x + 4y + 8,\ y^* = 5x + 7y + 6$;
3) $x^* = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5},\quad y^* = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5}$;
4) $x^* = 3x + 5y - 4,\ y^* = 5x + 9y + 6$;
5) $x^* = 3x - 24,\ y^* = -x + 4y + 12$;
6) $x^* = 2x - y,\ y^* = -4x + 2y$;
7) $x^* = 4x - 3y,\ y^* = 3x + 4y$;
8) $x^* = 4x + 3y,\ y^* = 3x - 4y$;
9) $x^* = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi),\quad y^* = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$ $(r > 0)$;
10) $x^* = r(x\cos\varphi + y\sin\varphi),\quad y^* = r(x\sin\varphi - y\cos\varphi)$ $(r > 0)$.

12.66. Ecrire les formules définissant la puissance n-ième de la transformation donnée (n est un entier naturel):

1) $x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$;
2) $x^* = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y,\quad y^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$;
3) $x^* = x + y,\ y^* = y$; 4) $x^* = 3x,\ y^* = x + 2y$.

12.67. Ecrire les formules du produit fg des transformations affines données f et g;

1) f est l'homothétie de centre M (0, 1) et de rapport 5; g la symétrie par rapport à la droite $x - 2y - 3 = 0$;

2) f est la contraction de rapport 3 vers la droite $y = x$; g la contraction de rapport 1/3 vers la droite $x + y + 1 = 0$;

3) f est l'homothétie de centre M (2, —1) et de rapport 4; g la rotation d'angle $\pi/6$ autour du point A (1, 1);

4) f est la contraction de rapport 1/2 vers la droite $2x + 3y = 0$, g l'homothétie de centre M (1, 0) et de rapport —3/2.

12.68. Ecrire les formules et caractériser du point de vue géométrique les transformations réciproques des transformations du problème 12.55, 1) à 15).

12.69. Ecrire les formules des produits fg et gf, où f et g sont les transformations orthogonales suivantes:

1) f est la rotation d'angle $\pi/2$ autour du point A (1, 1), g la translation de vecteur **a** (—1, —1);

2) f est la symétrie par rapport à la droite $x - 2y - 5 = 0$, g la translation de vecteur **a** (2, 1);

3) f est la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine des coordonnées, g la symétrie par rapport à la droite $y = 2$;

4) f est la symétrie par rapport à la droite $x - y - 1 = 0$, g la symétrie par rapport à la droite $x + y - 1 = 0$;

5) f est la symétrie par rapport à la droite $3x - y - 1 = 0$, g la symétrie par rapport à la droite $3x - y + 1 = 0$;

6) f est la rotation d'angle Arc $\sin\frac{4}{5}$ autour du point A (1, 0), g la rotation d'angle Arc $\cos\frac{4}{5}$ autour du point B (−1, 0);

7) f est la rotation de 30° autour du point A (1, 0), g la rotation de 330° autour du point B (0, 1).

12.70. 1) Démontrer que le produit de la rotation du plan autour d'un point et de la translation est une rotation autour d'un autre point.

2) Déterminer les coordonnées du point immobile P de la transformation définie par les formules (3) de l'introduction au § 12 pour $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que cette transformation est une rotation d'angle φ autour du point P.

3) Donner une caractéristique géométrique des transformations fg et gf du problème 12.69, 1).

12.71. 1) Démontrer que la transformation définie par les formules

$$x^* = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y^* = x\sin\varphi - y\cos\varphi$$

est une symétrie par rapport à une droite passant par l'origine des coordonnées. Ecrire l'équation de cette droite.

2) Quelle est la condition pour laquelle la transformation définie par les formules (4) de l'introduction au § 12 soit une symétrie par rapport à une droite? Trouver l'équation de cette droite.

12.72. 1) Démontrer les formules (3), (4) de l'introduction au § 12.

2) Démontrer que toute transformation orthogonale de première espèce est soit une translation, soit une rotation.

3) Démontrer que toute transformation orthogonale de deuxième espèce est le produit de deux transformations commutables: de la symétrie par rapport à une droite et de la translation de vecteur (dit *vecteur de translation*) colinéaire à cette droite. Trouver le vecteur de translation **a** pour la transformation définie par la formule (4) de l'introduction au § 12.

12.73. Caractériser du point de vue géométrique les transformations définies par les formules:

1) $x^* = x + 1$, $y^* = -y$;

2) $x^* = x + 1$, $y^* = -y + 2$;

3) $x^* = x$, $y^* = -y + 2$.

12.74. Etablir de quelle espèce sont les transformations orthogonales f, g, fg et gf du problème 12.69. Donner une caractéristique géométrique (conforme au problème 12.72) des transformations fg et gf du problème 12.69, 3) et 6).

12.75. Ecrire les formules de la transformation orthogonale de première espèce qui envoie le point A (2, 0) au point A^* $(1+\sqrt{2}, 1)$ et le point B (2, 2) au point B^* $(1, 1+\sqrt{2})$. Démontrer que cette transformation est une rotation autour de son point immobile unique. Calculer les coordonnées de ce point et l'angle de rotation.

12.76. Ecrire les formules de la transformation orthogonale de deuxième espèce associant le point A^* $(1+\sqrt{2}, 1)$ au point A (2, 0) et le point $B^*(1, 1+\sqrt{2})$ au point B (2, 2). Démontrer que cette transformation est le produit de la symétrie par rapport à une droite et de la translation de vecteur colinéaire à cette droite. Calculer les coordonnées du vecteur de translation et écrire l'équation de l'axe de symétrie.

12.77. 1) Démontrer que le produit de deux transformations dont chacune est une symétrie par rapport à une droite constitue une translation si ces droites sont parallèles, et une rotation si elles ne le sont pas.

2) Donner une interprétation géométrique des transformations fg et gf du problème 12.69, 4).

3) Même question pour le problème 12.69, 5).

12.78. 1) Démontrer que le produit de deux rotations autour des points distincts est une translation si la somme des angles de rotation vaut 2π.

2) Caractériser du point de vue géométrique les transformations fg et gf du problème 12.69, 7).

12.79. Démontrer que le carré de la transformation orthogonale de deuxième espèce est une translation.

12.80. Représenter la transformation donnée sous la forme d'un produit de transformations dont chacune est une symétrie axiale:

1) la rotation d'angle φ autour du point M;

2) la translation de vecteur $\mathbf{a}$;

3) une transformation orthogonale quelconque de deuxième espèce.

12.81. Calculer les coordonnées des vecteurs qui définissent les directions principales de la transformation affine donnée:

1) $x^* = 3x,\ y^* = 4y$; 2) $x^* = -3x,\ y^* = 4y$;

3) $x^* = 3x,\ y^* = -3y$;

4) $x^* = x - y,\ y^* = x + y$;

5) $x^* = x,\ y^* = -x + y$;

6) $x^* = 3y - 2,\ y^* = -4x$;

7) $x^* = 2x + 5y,\ y^* = -11x + 10y$;

8) $x^* = -4x + 7y,\ y^* = 8x + y$;

9) $x^* = -4x + 8y,\ y^* = -7x - 11y$;

10) $x^* = x + \sqrt{3}y + 2,\ y^* = -3\sqrt{3}x + 3y + \sqrt{3}$.

12.82. Représenter chacune des transformations affines du problème 12.81 sous la forme du produit $f = h_2h_1g$, où g est une trans-

formation orthogonale, et h_1, h_2 sont des contractions vers deux droites perpendiculaires.

12.83. Mettre sous la forme du produit hg, où g est une transformation orthogonale et h une homothétie, chacune des transformations f et f^{-1} du problème:

1) 12.65,7); 2) 12.65,8); 3) 12.65,9); 4) 12.65,10).

12.84. Démontrer que la similitude est égale au produit d'une transformation orthogonale et d'une homothétie.

12.85. Calculer les valeurs propres et les coordonnées des vecteurs propres associés de la transformation linéaire (on donne un repère cartésien quelconque) si:

1) $x^* = 7x$, $y^* = -x + 5y$;
2) $x^* = 2x + y$, $y^* = 2x + 3y$;
3) $x^* = 5x - 4y$, $y^* = 4x - 5y$;
4) $x^* = 8x + 17y$, $y^* = 17x + 8y$;
5) $x^* = 2x$, $y^* = 2y$;
6) $x^* = x - y$, $y^* = -x + y$;
7) $x^* = 11x - 5y$, $y^* = 12x - y$;
8) $x^* = 7x - 2y$, $y^* = 8x - y$.

12.86. Démontrer que la transformation affine définie par les formules $x^* = ax + by$, $y^* = bx + cy$ possède deux vecteurs propres orthogonaux.

12.87. La transformation affine f est définie par les formules $x^* = a_1x + b_1y$, $y^* = a_2x + b_2y$, et la transformation f_1 par les formules $x^* = a_1x + a_2y$, $y^* = b_1x + b_2x$. Démontrer que les directions principales de la transformation f coïncident avec celles des vecteurs propres de la transformation f_1f.

12.88. On identifie chaque point $M(x, y)$ du plan à un nombre complexe $z = x + iy$. Démontrer que:

1) la transformation $z \mapsto \operatorname{Re} z = x$ est une projection orthogonale sur l'axe des abscisses;

2) la transformation $z \mapsto \bar{z} = x - iy$ est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses;

3) la transformation $z \mapsto z + z_0$, où $z_0 = x_0 + iy_0$ est un nombre complexe fixé, constitue une translation de vecteur $\mathbf{a}(x_0, y_0)$;

4) la transformation $z \mapsto az$, où a est un nombre réel non nul, constitue une homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport a;

5) la transformation $z \mapsto (\cos \varphi + i \sin \varphi) z = e^{i\varphi}z$ (φ étant un nombre réel fixé) constitue une rotation d'angle φ autour de l'origine des coordonnées.

12.89. Donner une interprétation géométrique de la transformation f du plan complexe (voir problème 12.88):

1) $f(z) = az$, où $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$;
2) $f(z) = az + b$, où a, b sont des nombres complexes. $a \neq 0$.

§ 13. Notion de groupe

Dans ce paragraphe sont utilisées les notions fondamentales suivantes: *opération algébrique binaire*, *groupe*, *élément unité*, *élément inverse*, *groupe abélien*, *groupe cyclique*, *sous-groupe*, *homomorphisme*, *isomorphisme de groupes*, *sous-groupe distingué*.

Un ensemble non vide $\mathcal{G}$ s'appelle *groupe* s'il est muni d'une opération algébrique binaire (le plus souvent appelée *multiplication*) qui à chaque couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{G}$ fait correspondre un élément unique $c = a \cdot b \in \mathcal{G}$, leur produit, et qui vérifie les axiomes suivants:

1. La multiplication est associative: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pour tous a, b, $c \in \mathcal{G}$.

2. Il existe dans $\mathcal{G}$ un élément unité e tel que $e \cdot a = a \cdot e = a$ pour tout $a \in \mathcal{G}$.

3. Pour tout $a \in \mathcal{G}$ il existe un élément inverse $a^{-1} \in \mathcal{G}$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Le groupe $\mathcal{G}$ est dit *commutatif* ou *abélien* si $ab = ba$ pour tous a, $b \in \mathcal{G}$. Dans un groupe abélien, l'opération est parfois appelée *addition* et la somme est noté $a + b$.

Le nombre des éléments du groupe $\mathcal{G}$ (s'il est fini) s'appelle *ordre du groupe* $\mathcal{G}$ que l'on note $|\mathcal{G}|$. Si l'ensemble $\mathcal{G}$ est infini, le groupe $\mathcal{G}$ est dit *infini*.

Les puissances entières de l'élément $a \in \mathcal{G}$ sont définies par récurrence: $a^0 = e$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ pour un n naturel, $a^n = (a^{-1})^{-n}$ pour un n entier négatif.

Le plus petit entier naturel n pour lequel $a^n = e$ (s'il existe) est appelé *ordre* (*période*) de l'élément a. Si $a^n \neq e$ pour tout n, on dit que a est *d'ordre infini*.

Le groupe $\mathcal{G}$ est dit *cyclique d'élément générateur* a si tous les éléments de $\mathcal{G}$ sont des puissances entières de a.

Un sous-ensemble $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{G}$ est appelé *sous-groupe* de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{H}$ a une structure de groupe pour l'opération définie dans $\mathcal{G}$. Le sous-groupe $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{G}$ est dit *distingué* dans $\mathcal{G}$ si l'élément $g^{-1}hg$ appartient à $\mathcal{H}$ quels que soient les éléments $h \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{G}$. L'élément $g^{-1}hg$ est dit *conjugué* de l'élément h par g.

Deux groupes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ (munis des opérations $\cdot$ et $\times$ respectivement) sont dits *isomorphes* s'il existe une application bijective f de l'ensemble $\mathcal{G}_1$ sur l'ensemble $\mathcal{G}_2$, telle que pour deux éléments quelconques a et b de $\mathcal{G}_1$ est vérifiée l'égalité

$$f(a \cdot b) = f(a) \times f(b). \tag{1}$$

Toute application $f: \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ remplissant la condition (1) est appelée *homomorphisme* du groupe $\mathcal{G}_1$ dans le groupe $\mathcal{G}_2$. On appelle *noyau* de l'homomorphisme f et on note Ker f l'ensemble de tous les éléments $a \in \mathcal{G}_1$ tels que $f(a) = e$, où e est l'élément unité du groupe $\mathcal{G}_2$.

Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$. On appelle *classe à gauche d'un élément* $g \in \mathcal{G}$ *suivant le sous-groupe* $\mathcal{H}$ l'ensemble

$$g\mathcal{H} = \{gh \mid h \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{G}.$$

De façon analogue est définie la *classe à droite*

$$\mathcal{H}g = \{hg \mid h \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{G}.$$

Dans le cas général, $g\mathcal{H} \neq \mathcal{H}g$. Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$, $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ des classes du groupe $\mathcal{G}$ suivant le sous-groupe $\mathcal{H}$ est un groupe pour la multiplication des classes, définie par l'égalité

$$(a\mathcal{H}) \cdot (b\mathcal{H}) = (ab)\mathcal{H}$$

(voir problème 13.26).

Ce groupe est appelé *groupe quotient de $\mathcal{G}$ par le sous-groupe distingué $\mathcal{H}$.*

Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de toutes les transformations bijectives de l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$. Chaque transformation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définit une *permutation* $(i_1, \ldots, i_n)$ des nombres $(1, \ldots, n)$. Il est commode de la représenter par le symbole

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

qu'on appelle aussi *permutation* de degré n (la notation signifie que $\sigma(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$). On multiplie les permutations de la même façon que toutes les autres transformations. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ muni de la multiplication est un groupe appelé *groupe symétrique* de degré n.

13.1. Dire si l'ensemble des transformations ponctuelles données du plan est un groupe pour la multiplication:

1) l'ensemble de toutes les translations;

2) l'ensemble de toutes les translations de vecteurs colinéaires à un vecteur donné;

3) l'ensemble de toutes les translations de vecteurs non nuls;

4) l'ensemble de toutes les translations définies par des vecteurs d'origine au point fixé A et d'extrémités situées sur la droite donnée (D);

5) l'ensemble de toutes les rotations;

6) l'ensemble de toutes les rotations autour d'un point donné;

7) l'ensemble de toutes les transformations orthogonales;

8) l'ensemble de toutes les transformations orthogonales de première espèce;

9) l'ensemble de toutes les transformations orthogonales de deuxième espèce;

10) l'ensemble de toutes les transformations orthogonales ayant un point immobile commun A;

11) l'ensemble de toutes les transformations affines;

12) l'ensemble de toutes les transformations affines de première espèce;

13) l'ensemble de toutes les transformations affines de deuxième espèce;

14) l'ensemble de toutes les transformations linéaires;

15) l'ensemble de toutes les contractions vers la droite donnée;

16) l'ensemble formé de deux transformations: la transformation identique et la symétrie par rapport à une droite donnée;

17) l'ensemble des rotations du plan autour du centre d'un polygone régulier de n côtés, qui appliquent ce polynôme sur lui-même (rotations d'un polygône régulier de n côtés);

18) l'ensemble de toutes les inversions du plan de même pôle;

19) l'ensemble de toutes les similitudes.

13.2. Dire si l'ensemble des transformations ponctuelles du plan, définies par les formules ci-après, est un groupe pour la multiplication:

1) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y$; 2) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda \neq 0$;
3) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda > 0$;
4) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda < 0$;
5) $x^* = \lambda x,\ y^* = \frac{1}{\lambda} y,\ \lambda \neq 0$;
6) $x^* = \lambda y,\ y^* = \frac{1}{\lambda} x,\ \lambda \neq 0$;
7) $x^* = \lambda x,\ y^* = y,\ \lambda \neq 0$;
8) $x^* = x,\ y^* = \lambda x + y$;
9) $x^* = ax + by,\ y^* = cx + dy$;
10) $x^* = ax + by,\ y^* = cx + dy,\ ad - bc \neq 0$;
11) $x^* = ax + by,\ y^* = bx + cy,\ ac - b^2 \neq 0$;
12) $x^* = ax - by,\ y^* = bx + ay,\ a^2 + b^2 \neq 0$;
13) $x^* = r(x \cos \varphi - y \sin \varphi)$,
$y^* = r(x \sin \varphi + y \cos \varphi),\ r > 0$;
14) $x^* = a_1x + b_1x + c_1,\ y^* = a_2x + b_2y + c_2$,
$a_1b_1 - a_2b_2 = 1$.

13.3. Est-ce que les ensembles suivants sont des groupes pour la multiplication :

1) l'ensemble des nombres réels;
2) l'ensemble des nombres réels non nuls;
3) l'ensemble des nombres réels strictement positifs;
4) l'ensemble des nombres réels strictement négatifs;
5) l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs ;
6) l'ensemble des nombres entiers strictement positifs;
7) l'ensemble des nombres complexes non nuls;
8) l'ensemble des nombres complexes;
9) l'ensemble des nombres complexes de module 1 ;
10) l'ensemble des nombres imaginaires purs non nuls;
11) l'ensemble composé de deux nombres 1 et —1;
12) l'ensemble des racines complexes n-ièmes de 1 (n est un entier naturel) ?

13.4. Est-ce que les ensembles ci-après munis de l'addition sont des groupes :

1) l'ensemble des nombres réels ;
2) l'ensemble des nombres réels strictement positifs;
3) l'ensemble des nombres réels positifs;
4) l'ensemble des nombres rationnels;
5) l'ensemble des nombres entiers;
6) l'ensemble des nombres entiers strictement positifs;
7) l'ensemble des nombres pairs;
8) l'ensemble des nombres impairs;
9) l'ensemble des nombres divisibles par 3;
10) l'ensemble des nombres complexes;
11) l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs;
12) l'ensemble composé du seul nombre 0 ?

13.5. Dire si les ensembles munis des opérations suivantes sont des groupes:

1) l'ensemble des vecteurs du plan, muni de l'addition;

2) l'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition;

3) l'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'opération produit vectoriel;

4) l'ensemble des vecteurs non nuls de l'espace, muni de l'opération produit vectoriel.

13.6. Démontrer que dans tout groupe:

1) l'élément unité e est unique;

2) tout élément a admet un élément inverse a^{-1} et un seul;

3) l'égalité $ax = b$ est équivalente à $x = a^{-1}b$, et l'égalité $xa = b$ est équivalente à $x = ba^{-1}$;

4) tous les éléments a et b vérifient l'égalité $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

13.7. Démontrer que le groupe est abélien si le carré de tout élément de ce groupe est égal à l'élément unité.

13.8. Démontrer que toutes les transformations affines du plan, qui font correspondre à un triangle donné le même triangle, forment un groupe non abélien. Déterminer l'ordre de ce groupe.

13.9. Démontrer que deux groupes sont isomorphes:

1) le groupe additif des nombres réels et le groupe multiplicatif des translations de vecteurs colinéaires à un vecteur donné;

2) le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et le groupe multiplicatif des rotations du plan autour d'un point donné;

3) le groupe additif des nombres complexes et le groupe multiplicatif des translations du plan;

4) le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls et le groupe multiplicatif des homothéties de centre au point donné (le rapport d'homothétie est différent de zéro);

5) le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et le groupe multiplicatif des transformations ponctuelles du plan, définies par les formules $x^* = ax - by$, $y^* = bx + ay$, $a^2 + b^2 > 0$;

6) le groupe additif des nombres réels et le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs;

7) les groupes additifs des nombres entiers et des nombres pairs;

8) le groupe multiplicatif des rotations d'un polygone régulier de n côtés et le groupe multiplicatif des racines complexes n-ièmes de 1;

9) deux groupes quelconques contenant chacun deux éléments;

10) deux groupes quelconques contenant, chacun, trois éléments.

13.10. Démontrer qu'il n'existe que deux groupes différents (à un isomorphisme près) contenant, chacun, quatre éléments. Donner les exemples dans les deux cas.

13.11. Démontrer que le groupe donné est cyclique et trouver son élément générateur;

1) le groupe additif des entiers relatifs;

2) le groupe additif $n\mathbb{Z}$ des multiples entiers d'un nombre naturel donné n;

3) le groupe multiplicatif des racines complexes n-ièmes de 1;

4) le groupe des rotations d'un polygone régulier de n côtés.

13.12. Trouver tous les sous-groupes des groupes du problème 13.11.

13.13. Démontrer que

1) tout sous-groupe d'un groupe cyclique est encore cyclique;

2) l'image homomorphe d'un groupe cyclique est un groupe cyclique.

13.14. Démontrer que tous les groupes cycliques finis de même ordre sont isomorphes deux à deux.

13.15. Démontrer que tout groupe cyclique infini est isomorphe au groupe des entiers relatifs.

13.16. Montrer que:

1) le groupe de toutes les transformations orthogonales qui conservent un polygone régulier donné de n côtés (dit groupe des symétries de ce polygone) contient $2n$ transformations;

2) le groupe des rotations d'un polygone régulier de n côtés est son sous-groupe distingué.

13.17. Soient $|\mathcal{G}| = 2n$ et $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$ d'ordre n. Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué du groupe $\mathcal{G}$.

13.18. Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble non vide du groupe $\mathcal{G}$. Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ si et seulement si sont remplies deux conditions: a) $h_1h_2 \in \mathcal{H}$ si $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$; b) $h^{-1} \in \mathcal{H}$ si $h \in \mathcal{H}$.

13.19. Soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble non vide du groupe $\mathcal{G}$, qui est stable pour la multiplication (c'est-à-dire que les éléments de $\mathcal{H}$ vérifient la condition a) du problème 13.18). Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ dans chacun des cas suivants:

1) $\mathcal{H}$ est un ensemble fini;

2) tous les éléments de $\mathcal{H}$ sont d'ordre fini.

13.20. Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe du groupe $\mathcal{G}$. Démontrer que:

1) deux éléments a, b du groupe $\mathcal{G}$ appartiennent à une même classe à gauche suivant le sous-groupe $\mathcal{H}$ si et seulement si $a^{-1}b \in \mathcal{H}$;

2) le groupe $\mathcal{G}$ est la réunion des classes à gauche (à droite) suivant $\mathcal{H}$ disjointes deux à deux;

3) deux classes quelconques suivant $\mathcal{H}$ sont en correspondance biunivoque.

13.21. 1) Démontrer le théorème de Lagrange: l'ordre d'un groupe fini est divisible par l'ordre de son sous-groupe quelconque.

2) Démontrer que l'ordre d'un groupe fini est divisible par l'ordre de tout élément de ce groupe.

3) Démontrer que le groupe est cyclique si son ordre est un nombre premier.

13.22. Soient $\mathcal{G}$ le groupe des symétries d'un triangle équilatéral (voir problème 13.16) et $\mathcal{H}$ son sous-groupe composé de la transformation identique ι et de la symétrie par rapport à l'une des hauteurs du triangle. Vérifier que $\mathcal{H}$ n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$ et trouver la partition du groupe $\mathcal{G}$ en classes à gauche et à droite suivant $\mathcal{H}$.

13.23. Soit $f: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ un homomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ dans le groupe $\mathcal{H}$. Démontrer que:

1) $f(\mathcal{G})$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}$;

2) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$;

3) l'application f est une injection si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

13.24. Démontrer que:

1) les translations constituent un sous-groupe distingué du groupe des transformations orthogonales du plan;

2) les transformations ayant un point immobile constituent un sous-groupe du groupe des transformations orthogonales du plan, mais ce sous-groupe n'est pas distingué.

13.25. Démontrer que:

1) si un ensemble fini de transformations affines du plan a une structure de groupe, toutes les transformations de cet ensemble possèdent un point immobile commun;

2) tout groupe fini de transformations orthogonales du plan est le groupe des symétries ou le groupe des rotations d'un polygone régulier.

13.26. Démontrer les assertions:

1) Pour qu'un sous-groupe $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{G}$ soit distingué dans $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$ pour tout élément $g \in \mathcal{G}$.

2) Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$, le produit des classes à gauche est indépendant du choix des éléments qui les définissent, et l'ensemble $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ a une structure de groupe.

13.27. Soit $f: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ l'homomorphisme de groupes. Démontrer que le groupe $f(\mathcal{G})$ est isomorphe au groupe quotient $\mathcal{G}/\operatorname{Ker} f$.

13.28. Déterminer (à un isomorphisme près) le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ si:

1) $\mathcal{G}$ est le groupe des nombres complexes, $\mathcal{H}$ le groupe des nombres réels. Dans les deux cas, on a affaire à un groupe additif;

2) $\mathcal{G}$ est le groupe des nombres complexes non nuls, $\mathcal{H}$ le groupe des nombres réels strictement positifs. Dans les deux cas, on a affaire à un groupe multiplicatif.

3) $\mathcal{G}$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls, $\mathcal{H}$ le sous-groupe des nombres de module 1.

4) $\mathcal{G}$ est le groupe additif des nombres réels, $\mathcal{H}$ le sous-groupe des entiers relatifs.

5) $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ est le groupe des entiers relatifs, $\mathcal{H} = n\mathbb{Z}$ le sous-groupe des multiples d'un entier naturel donné n.

6) $\mathcal{G}$ est le groupe des transformations orthogonales du plan de première espèce, $\mathcal{H}$ le sous-groupe des translations.

13.29. Soit $\mathcal{C}_n$ le groupe des racines n-ièmes de 1 (voir problème 13.3, 12)). Déterminer le nombre des homomorphismes:

1) de $\mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{C}_4$; 2) de $\mathcal{C}_6$ dans $\mathcal{C}_3$; 3) de $\mathcal{C}_5$ dans $\mathcal{C}_5$; 4) de $\mathcal{C}_3$ dans $\mathcal{C}_5$.

13.30. 1) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ de toutes les permutations de degré n est un groupe pour la multiplication des transformations. Déterminer l'ordre de ce groupe.

2) Démontrer que les groupes $\mathcal{S}_n$ ne sont pas commutatifs pour $n \geqslant 3$.

13.31. Calculer:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

13.32. Trouver:

1) tous les sous-groupes de $\mathcal{S}_3$;

2) tous les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$.

13.33. Démontrer que toutes les permutations paires constituent un sous-groupe distingué $\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{S}_n$ et déterminer son ordre.

13.34. Démontrer que le groupe des permutations paires de degré 4 ne possède pas de sous-groupes d'ordre 6 (et par suite, le théorème réciproque du théorème de Lagrange n'est pas vrai, voir problème 13.21, 1)).

13.35. Soit $\mathcal{V}$ un sous-groupe non cyclique d'ordre 4 dans $\mathcal{S}_4$. Démontrer que:

1) $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}_4$; 2) $\mathcal{V}$ est distingué dans $\mathcal{S}_4$;

3) $\mathcal{S}_4/\mathcal{V} \cong \mathcal{S}_3$.

CHAPITRE VI

MATRICES

§ 14. Déterminants

Dans ce paragraphe on utilise les notions fondamentales suivantes: *matrice*, *ligne* et *colonne d'une matrice*, *permutation*, *permutation paire* (*impaire*), *déterminant d'une matrice carrée*, *mineur d'une matrice*, *transformations élémentaires d'une matrice*, *transposition d'une matrice*. Dans les problèmes 14.33 à 14.44 on utilise d'autres opérations sur les matrices, ainsi que des matrices d'autres formes spéciales; les notations et les définitions qui y correspondent sont données dans l'introduction au § 15.

La matrice carrée d'ordre n

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

est également notée $\|a_{ij}\|$ ou (a_{ij}). Les éléments $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ forment la i-ème ligne, les éléments $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$, la j-ième colonne de la matrice A. On dit que l'élément a_{ij} se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne. On admet partout dans ce chapitre, à l'exception de quelques cas spécialement mentionnés, que les éléments de la matrice sont des nombres réels ou complexes. Le déterminant de la matrice A est noté $\det A$, $|A|$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Les formules fondamentales pour le calcul des déterminants sont:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc\,; \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1. \qquad (2)$$

Les formules de récurrence sont:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \qquad (3)$$

(*formule de développement du déterminant suivant la i-ième ligne*),

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \tag{4}$$

(*formule de développement du déterminant suivant la j-ième colonne*). Dans les formules (3) et (4), M_{ik} désigne le mineur associé à l'élément a_{ik}, c'est-à-dire le déterminant de la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue de A en éliminant la ligne et la colonne contenant l'élément a_{ik}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \, \cdot \, \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \tag{5}$$

est la *formule de développement du déterminant*. Elle exprime le déterminant de la matrice d'ordre n en fonction de ses éléments. Les valeurs des indices $i_1, \dots, i_n$ dans la formule (5) constituent toutes les permutations possibles des nombres $1, 2, \dots, n$, tandis que $N(i_1, \dots, i_n)$ désigne le nombre de dérangements de l'ordre dans la permutation $(i_1, \dots, i_n)$. Rappelons que la permutation $(i_1, \dots, i_n)$ est dite *paire* si le nombre $N(i_1, \dots, i_n)$ est pair, et *impaire* dans le cas contraire.

Formulons le théorème de Laplace. On appelle *mineur d'ordre s* $(s \leqslant n)$ de la matrice A le déterminant de la matrice formée par l'intersection de s lignes et de s colonnes quelconques de la matrice A. Si ces lignes possèdent les numéros $i_1, \dots, i_s$, et les colonnes, les numéros $j_1, \dots, j_s$, le mineur correspondant est noté $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$;

$$L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ \cdot & \cdot \, \cdot \, \cdot & \cdot \\ a_{i_s j_1} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ le mineur associé au mineur $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice d'ordre $n - s$ obtenue de A en éliminant les s lignes et s colonnes données. Dans ce cas, pour tout entier naturel s $(s \leqslant n)$ et tout ensemble des numéros $i_1, \dots, i_s$ tels que $i_1 < i_2 < \dots < i_s$, on a

$$\det A = \sum_{(j_1 \dots j_s)} (-1)^{i_1 + j_1 + \dots + i_s + j_s} L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}, \tag{6}$$

où la somme est calculée sur tous les s-uples des indices $j_1, \dots, j_s$ tels que $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_s \leqslant n$. La formule (6) peut être appelée *formule de développement du déterminant suivant les s lignes données*. La formule analogue de développement du déterminant suivant les s colonnes données s'écrit:

$$\det A = \sum_{(i_1 \dots i_s)} (-1)^{i_1 + j_1 + \dots + i_s + j_s} L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}.$$

Cette fois-ci, les indices $j_1, \dots, j_s$ sont fixés, et la somme est calculée sur tous les s-uples des indices $i_1, \dots, i_s$ tels que $1 \leqslant i_1 < \dots < i_s \leqslant n$.

Permutations
(problèmes 14.1 à 14.3)

14.1. 1) Démontrer qu'en changeant successivement de places deux nombres voisins, on peut permuter deux éléments quelconques et conserver la position des autres.

2) Démontrer que la parité d'une permutation change si l'on permute deux quelconques de ses éléments.

14.2. 1) Démontrer qu'en permutant k fois deux nombres voisins, on peut disposer les éléments d'une permutation dans l'ordre des valeurs croissantes. Est-ce que k est défini de façon unique?

2) Soit s le nombre des dérangements de l'ordre dans une permutation. Démontrer que les nombres k et s ont la même parité.

3) Indiquer exactement s permutations successives qu'il faut faire dans les couples d'éléments voisins pour que tous les éléments d'une permutation soient ordonnés de façon croissante.

14.3. En permutant successivement deux nombres voisins, disposer les éléments des permutations suivantes dans l'ordre des valeurs croissantes. Déterminer le nombre des dérangements et la parité des permutations.

1) (5 4 3 2 1); 2) (6 4 5 2 3 1);
3) (1 2 4 5 6 3); 4)(1 2 4 3 5 9 8 7 6);
5) (9 8 7 6 5 4 3 2 1); 6) (4 3 2 1 5 9 8 7 6);
7) $(n, n-1, \ldots, 1)$;
8) $(1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n)$;
9) $(2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1)$.

Calcul des déterminants
(problèmes 14.4 à 14.32)

14.4. Calculer le déterminant d'ordre 2:

1) $|A_5|$; 2) $|A_6|$; 3) $|A_7|$;
4) $|A_{81}|$; 5) $|A_{77}|$; 6) $|A_8|$.

14.5. Calculer $|A_{78}|$ pour $\varepsilon = e^{\pi i/3}$.

14.6. Soient $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Calculer le jacobien
$\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix}$.

14.7. Calculer le déterminant d'ordre 3:

1) $|A_{200}|$; 2) $|A_{201}|$; 3) $|A_{202}|$; 4) $|A_{203}|$;
5) $|A_{204}|$; 6) $|A_{205}|$; 7) $|A_{209}|$; 8) $|A_{210}|$;
9) $|A_{365}|$; 10) $|A_{364}|$; 11) $|A_{366}|$; 12) $|A_{368}|$.

14.8. Calculer $|A_{363}|$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}$.

14.9. Soient $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$.

Calculer le jacobien $\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \varphi & \partial x/\partial \psi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \varphi & \partial y/\partial \psi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \varphi & \partial z/\partial \psi \end{vmatrix}$.

14.10. Résoudre l'équation en λ:

1) $|A_{211}-\lambda E|=0$; 2) $|A_{212}-\lambda E|=0$;

3) $|A_{213}-\lambda E|=0$.

14.11. Combien de termes contient:

1) la formule de développement du déterminant d'ordre 4?

2) la formule de développement du déterminant d'ordre 5?

14.12. 1) Est-ce que le développement du déterminant de la matrice $\| a_{ij} \|$ d'ordre 5 contient les termes $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$?

2) Avec quel signe figurent les termes $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$, $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$ dans le développement du déterminant de la matrice d'ordre 5?

14.13. Soit une matrice A d'ordre n dont n éléments sont égaux à 1 et les autres sont nuls. A quoi peut être égal le déterminant de la matrice A?

14.14. Démontrer que le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux.

14.15. Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.

14.16. 1) Comment varie le déterminant si on permute deux lignes de la matrice?

2) Comment varie le déterminant si on ajoute une ligne de la matrice à une autre?

3) Comment varie le déterminant si on multiplie une ligne de la matrice par le nombre λ?

4) Quelles variations subit le déterminant si on fait les mêmes transformations élémentaires sur les colonnes de la matrice?

14.17. Est-ce que le déterminant change quand la matrice est transposée?

14.18. Comment varie le déterminant si tous les éléments de la matrice sont remplacés par des nombres complexes conjugués?

14.19. Formuler quelques conditions sous lesquelles le déterminant de la matrice A s'annule. Formuler une condition nécessaire et suffisante.

14.20. Soit $\det A \neq 0$. Démontrer qu'en faisant subir aux lignes de la matrice les transformations élémentaires qui conservent le déterminant, on peut obtenir: 1) une matrice triangulaire; 2) une matrice diagonale.

14.21. Calculer le déterminant d'ordre 4:

1) $|A_{430}|$; 2) $|A_{431}|$; 3) $|A_{432}|$; 4) $|A_{435}|$;

5) $|A_{436}|$; 6) $|A_{437}|$; 7) $|A_{438}|$; 8) $|A_{439}|$;

9) $|A_{440}|$; 10) $|A_{441}|$; 11) $|A_{434}|$; 12) $|A_{442}|$;
13) $|A_{443}|$; 14) $|A_{444}|$; 15) $|A_{445}|$.

14.22. Calculer le déterminant d'ordre 5:

1) $|A_{530}|$; 2) $|A_{532}|$; 3) $|A_{533}|$;
4) $|A_{541}|$; 5) $|A_{536}|$.

14.23. Calculer le déterminant d'ordre n:

1) $|A_{600}|$; 2) $|A_{601}|$; 3) $|A_{610}|$; 4) $|A_{611}|$;
5) $|A_{618}|$; 6) $|A_{605}|$; 7) $|A_{614}|$; 8) $|A_{615}|$;
9) $|A_{622}|$; 10) $|A_{633}|$; 11) $|A_{625}|$; 12) $|A_{626}|$;
13) $|A_{624}|$; 14) $|A_{628}|$; 15) $|A_{641}|$; 16) $|A_{636}|$;
17) $|A_{639}|$; 18) $|A_{621}|$ $(n = 2k)$.

14.24. Calculer le déterminant d'ordre n (il est utile d'obtenir la formule de récurrence);

1) $|A_{623}|$; 2) $|A_{629}|$; 3) $|A_{631}|$;
4) $|A_{632}|$; 5) $|A_{634}|$; 6) $|A_{635}|$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = W(x_1, \dots, x_n)$ (déterminant de Vandermonde);

8) $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \dots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$

10) (s) $\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\alpha \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi \end{vmatrix}$; 13) (s) $|A_{638}|$.

14.25. Montrer que le déterminant de la matrice A d'ordre n vaut 0 si elle contient une sous-matrice nulle à k lignes et l colonnes, telle que $k + l > n$.

14.26. Calculer det A en sachant que, dans la matrice A, la somme des lignes de numéros pairs est égale à la somme des lignes de numéros impairs.

14.27. Comment varie le déterminant si l'on permute les colonnes de la matrice en les rangeant dans l'ordre inverse?

14.28. Comment varie le déterminant si la matrice est transposée par rapport à la diagonale non principale?

14.29. Les nombres 1081, 1403, 2093 et 1541 sont divisibles par 23. Expliquer, sans recourir aux calculs, pourquoi le nombre

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

est également divisible par 23.

14.30. Soit M_{ij} le mineur associé à l'élément a_{ij} de la matrice A. Démontrer que $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}M_{ij}(-1)^{i+j} = 0$ pour $k \neq i$ (n étant l'ordre de A).

14.31. 1) Soit une matrice d'ordre 2 dont tous les éléments sont des fonctions dérivables d'une variable t. Démontrer que la dérivée du déterminant considéré en tant que fonction de t vérifie la formule

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

2) Etablir et démontrer la formule de dérivation du déterminant d'ordre n.

14.32. Démontrer que det $(A - \lambda E)$ est un polynôme en λ et calculer ses coefficients.

Dans les problèmes 14.33 à 14.44 on utilise les opérations sur les matrices et quelques types spéciaux de matrices

14.33. Les identités suivantes sont-elles vraies (n est l'ordre de la matrice A):

1) det $(A + B)$ = det A + det B;

2) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;
3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$;
4) $\det(A^k) = (\det A)^k$?

14.34. Soient A une matrice carrée d'ordre n; b_{ij} le mineur associé à son élément a_{ij}, c_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij}. On forme à partir de b_{ij} et c_{ij} les matrices $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Démontrer que $\det B = \det C = (\det A)^{n-1}$.

14.35. Démontrer que le déterminant d'une matrice hermitienne est un nombre réel.

14.36. Démontrer que le déterminant d'une matrice symétrique gauche d'ordre impair vaut 0.

14.37. Démontrer que $|\det A| = 1$ si la matrice A est unitaire.

14.38. Démontrer que $\det A\,({}^tA) \geqslant 0$ pour toute matrice réelle A.

14.39. Soient $B_1, \ldots, B_k$ des matrices carrées et $H = \left\|\begin{matrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{matrix}\right\|$ une matrice quasi diagonale. Démontrer que $\det H^{\square} = \det B_1 \ldots \det B_k$.

14.40. Soient A, D des matrices carrées, $H = \left\|\begin{matrix} A & O \\ B & D \end{matrix}\right\|$ une matrice triangulaire de matrices. Démontrer que $\det H^{\square} = \det A \cdot \det D$.

14.41. Soient A une matrice carrée d'ordre n, $\det A = a$, $H = \left\|\begin{matrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{matrix}\right\|$. Calculer $\det H^{\square}$.

14.42. Soient A une matrice carrée, A^2, A^3, A^4 ses puissances, $H = \left\|\begin{matrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{matrix}\right\|$. Calculer $\det H^{\square}$.

14.43. 1) Soient A, B, C, E des matrices carrées d'ordre n, E la matrice unité, $H = \left\|\begin{matrix} A & B \\ C & E \end{matrix}\right\|$. Démontrer que $\det H^{\square} = \det(A - BC)$.

2) Est-ce que l'égalité $\det H^{\square} = \det(AD - BC)$ est toujours vraie pour une matrice de matrices $H = \left\|\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\right\|$?

14.44. Exprimer le déterminant du produit tensoriel $A \otimes B$ en fonction des déterminants des matrices A, B.

§ 15. Opérations sur les matrices

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *matrice, dimensions de la matrice, sous-matrice (bloc), transformations élémentaires d'une matrice, somme des matrices, produit d'une matrice par un nombre, produit des*

matrices, matrices commutables, matrice inverse, trace d'une matrice, polynôme matriciel. Dans quelques problèmes on suppose connu l'algorithme de Gauss. Une explication détaillée sur l'algorithme de Gauss est donnée dans l'introduction au § 16.

Donnons quelques notations et définitions. La matrice

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

contient m lignes et n colonnes. On dit qu'elle est de type (m, n). Examinons les matrices A, B, C d'éléments a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} respectivement.

La matrice B est appelée *produit de la matrice A par le nombre* α si tous les éléments de ces matrices vérifient les égalités $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ (les matrices A, B sont de même type). Notation: $B = \alpha A$.

Soient A, B, C des matrices de même type. La matrice C s'appelle *somme* des matrices A et B et se note $C = A + B$ si, pour toutes les valeurs des indices i, j, sont vérifiées les égalités $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Posons que le nombre des colonnes de la matrice A est égal à celui des lignes de la matrice B. La matrice C est appelée *produit de A par B* (à droite), $C = AB$, si, pour toutes les valeurs des indices i, j, sont vérifiées les égalités $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Si A est de type (m, n) et B de type (n, p), la matrice $C = AB$ est de type (m, p). Les matrices A et B *commutent* si $AB = BA$.

Les deux types suivants de transformations sont appelés *transformations élémentaires principales* de la matrice. Ce sont: 1) la multiplication d'une ligne de la matrice par un nombre différent de zéro; 2) l'addition d'une ligne de la matrice à une autre ligne. Parmi les transformations élémentaires on peut encore citer: 3) la permutation de deux lignes de la matrice; 4) l'addition d'une ligne multipliée par un nombre à une autre ligne de la matrice. On définit de façon analogue les transformations élémentaires des colonnes de la matrice.

La matrice B est dite *transposée* de la matrice A et est notée $B = {}^tA$ si les lignes de B sont les colonnes respectives de A, c'est-à-dire si $b_{ij} = a_{ji}$ pour tous les i, j. L'opération permettant de passer de A à ${}^tA$ est appelée *transposition de la matrice A*. Si A est de type (m, n), la matrice ${}^tA$ est de type (n, m).

La matrice B est dite *conjuguée* de la matrice complexe A et est notée $B = \bar{A}$ si, pour tous les i, j, on a l'égalité $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$. La matrice B est dite *adjointe* de la matrice A et est notée $B = A^*$ si $B = {}^t\bar{A}$, c'est-à-dire si $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ pour tous les i, j.

La matrice A est dite *nulle*, $A = O$, si tous ses éléments sont nuls. La matrice A est l'unité matricielle d'indices i_0, j_0 et est notée $A = E_{i_0j_0}$ si tous ses éléments sont nuls, sauf $a_{i_0j_0} = 1$.

Les éléments a_{11}, a_{22}, . . ., a_{nn} forment la *diagonale principale de la matrice carrée* $A = \| a_{ij} \|$ d'ordre n et sont appelés *éléments diagonaux*. La somme des éléments diagonaux est appelée *trace de la matrice A* et est notée $\operatorname{tr} A$. Donc, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Une matrice carrée est dite *diagonale* quand tous ses éléments non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. La matrice diagonale d'ordre n est notée $\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Une matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 s'appelle *matrice unité* et se note E ou

E_n. Les éléments de la matrice unité sont notés δ_{ij}: $E = \| \delta_{ij} \|$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que la matrice B est l'*inverse* de A et on le note $B = A^{-1}$ si $AB = BA = E$. Les éléments de la matrice inverse peuvent être calculés suivant la formule

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

où M_{ji} est le mineur associé à l'élément a_{ji} de la matrice A. La matrice A est *inversible* si $\det A \neq 0$.

Soit $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ un polynôme. La matrice $B = a_0 E + a_1 A + \ldots + a_k A^k$ est appelée *polynôme de la matrice* A, ce qu'on note $B = p(A)$.

Énumérons quelques types spéciaux de matrices carrées $A = \| a_{ij} \|$ d'ordre n:

scalaire: $A = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$, où λ est un nombre;
singulière: $\det A = 0$;
régulière: $\det A \neq 0$;
unimodulaire: $\det A = 1$;
matrice de permutation: matrice A obtenue de la matrice unité E par permutation des lignes;
matrice élémentaire: matrice A obtenue de E par transformation élémentaire;
triangulaire supérieure: $a_{ij} = 0$ pour $i > j$;
triangulaire inférieure: $a_{ij} = 0$ pour $i < j$;
symetrique: ${}^tA = A$;
symétrique gauche: ${}^tA = -A$;
hermitienne: $A^* = A$;
antihermitienne: $A^* = -A$;
orthogonale: ${}^tA = A^{-1}$;
unitaire: $A^* = A^{-1}$;
positive: $a_{ij} \geqslant 0$ pour tous les i, j;
stochastique (*markovienne*): $a_{ij} \geqslant 0$ pour tous les i, j et $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$;
nilpotente: $A^k = O$ pour un entier naturel k (le plus petit de ces k est appelé *indice de nilpotence de la matrice* A);
périodique: $A^k = E$ pour un entier naturel k (k est la *période de la matrice* A).

La matrice B est dite *composée de blocs* (ou de sous-matrices) si ses éléments sont des matrices B_{ij} à m_i lignes et n_j colonnes. De plus, toutes les matrices B_{ij} appartenant à une même ligne de B ont même hauteur, et toutes les matrices B_{ij} appartenant à une même colonne de B ont même largeur. On opère sur les matrices composées de blocs d'après les mêmes règles que sur les matrices numériques ordinaires. Si une matrice numérique A est partagée par des droites horizontales et verticales en blocs B_{ij} numérotés de façon naturelle, on dit que la matrice $B = \| B_{ij} \|$ est obtenue de A *par décomposition en blocs*. Réciproquement, étant donné une matrice $B = \| B_{ij} \|$, on peut former avec les éléments des blocs B_{ij} une matrice numérique A à $\sum_i m_i$ lignes et $\sum_j n_j$ colonnes. On dit alors que la matrice A est obtenue *par réunion des blocs* de la matrice B et on écrit $A = B^{\square}$. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on omet le si-

gne et on désigne la matrice numérique par la même lettre que la matrice décomposée en blocs.

Soient $A = \| a_{ij} \|$ et B des matrices numériques, et soit $C = \| C_{ij} \|$ une matrice décomposée en blocs, définie par les égalités $C_{ij} = a_{ij}B$ pour tous les i, j. La matrice numérique obtenue par réunion des blocs de la matrice C s'appelle *produit kroneckerien* à droite (ou *produit direct à droite*) des matrices A et B et se note $A \otimes B$.

Principales opérations sur les matrices: multiplication par un nombre, addition et multiplication des matrices (problèmes 15.1 à 15.24)

15.1. Formuler les conditions nécessaires pour qu'on puisse additionner les matrices.

15.2. Calculer la combinaison linéaire des matrices:

1) $3\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $2\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$;

3) $2\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $A_{18} + A_{40}$; 5) $A_{28} - A_{12}$; 6) $2A_{573} - A_{571}$;

7) $\frac{1}{2}(c_{51} + c_{52})$.

15.3. Décrire les conditions sous lesquelles les identités suivantes sont vraies et démontrer ces identités (A, B, C sont des matrices, α, β des nombres):

1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$; 4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

15.4. 1) Peut-on multiplier une ligne à m éléments par une colonne à n éléments?

2) Peut-on multiplier une colonne à n éléments par une ligne à m éléments?

15.5. Calculer le produit des matrices:

1) $\| 2 \ \ -3 \ \ 0 \| \begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \| 2 \ \ -3 \ \ 0 \|$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$; 4) A_1A_{12}; 5) A_4A_{395};

6) $A_{442}c_{168}$; 7) $A_{110}A_{12}$; 8) A_3A_{205}; 9) $A_{436}c_{166}$;

10) $A_{601}A_{602}$; 11) $A_{601}A_{605}$; 12) $A_{605}A_{601}$;

13) $(A_{206})^2$; 14) $(A_{200})^2$; 15) $(A_{617})^2$; 16) $(A_{645})^2$ pour $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$.

15.6. Quelles conditions doivent remplir les matrices A et B pour que:

1) le produit AB existe;
2) le produit BA existe;
3) les produits AB et BA existent?

15.7. Exprimer les dimensions de la matrice AB en fonction des dimensions de A et B.

15.8. Les matrices A, C sont de types (m, n) et (p, q) respectivement et le produit ABC existe. De quels types sont les matrices B, ABC?

15.9. Vérifier les identités (A, B, C sont des matrices, α est un nombre):
1) $\alpha (AB) = (\alpha A) B$;
2) $(AB) C = A (BC)$;
3) $A (B + C) = AB + AC$;
4) $(A + B) C = AC + BC$;
5) $A (B + C + D) = AB + AC + AD$.

15.10. Vérifier si le produit existe et, s'il existe, le calculer:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 4 \end{Vmatrix}$; 4) $A_2A_8c_8A_2$.

15.11. Calculer:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}^n$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^n$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^3$;

4) $(A_5)^n$; 5) $(A_{13})^n$; 6) $(A_{14})^n$; 7) $(A_{601})^n$;
8) $(A_{614})^n$; 9) $(A_{613})^n$ (dans les problèmes 7), 8), 9) l'ordre de la matrice est n).

15.12. Transposer la matrice:

1) $\begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}$; 5) A_9; 6) A_{390}; 7) A_{544}; 8) A_{632}.

15.13. Vérifier les identités:
1) ${}^t(\alpha A) = \alpha ({}^tA)$; 2) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$;
3) ${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$; 4) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

15.14. Calculer la matrice $P = E - {}^t(e_i - e_k)(e_i - e_k)$ (e_i désigne la i-ème ligne de la matrice unité E).

15.15. Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ des matrices-colonnes ayant même nombre d'éléments et soit $H = \boldsymbol{a}\,({}^t\boldsymbol{b})$. Démontrer qu'il existe un nombre λ tel que $H^2 = \lambda H$.

15.16. Est-ce que l'égalité matricielle $AB = BA$ est toujours vraie? Donner des exemples de matrices commutables et non commutables.

15.17. Que peut-on dire des dimensions des matrices A, B si $AB = BA$?

15.18. Calculer la matrice $[A, B] = AB - BA$ (*commutateur* des matrices A, B) si:

1) $A = A_{12}$, $B = A_5$; 2) $A = A_{20}$, $B = A_{16}$.

15.19. Vérifier les identités (voir problème 15.18)

1) $[A, B] = -[B, A]$; 2) $[A, A] = O$; 3) $[A, E] = [E, A] = O$; 4) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

15.20. Calculer la matrice $A * B = \frac{1}{2}(AB - BA)$ (*produit de Jordan* des matrices A, B) si:

1) $A = A_{12}$, $B = A_5$; 2) $A = A_{20}$, $B = A_{16}$.

15.21. Vérifier les identités (voir problème 15.20):

1) $A * B = B * A$; 2) $A * A = A^2$; 3) $A * E = A$; 4) $A * (B + C) = A * B + A * C$.

15.22. Calculer $f(A)$ si

1) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

3) $f(t) = t^2 - 3t + 2$ $A = A_{11}$;

4) $f(t) = (t - \varepsilon)^2$, $A = A_{78}$;

5) $f(t) = t^2 + t + 1$, $A = A_{206}$.

15.23. Après avoir décomposé le polynôme $f(t)$ en facteurs, calculer $f(A)$ si:

1) $f(t) = t^2 - t$, $A = A_{230}$;

2) $f(t) = t^2 + 2t - 3$, $A = A_{214}$.

15.24. Vérifier les identités matricielles:

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

2) $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$;

3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;

4) $(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$.

Relation entre les multiplications des matrices et les transformations élémentaires (problèmes 15.25 à 15.38)

15.25. Démontrer que la k-ième colonne de la matrice AB est égale au produit de la matrice A par la k-ième colonne de la matrice B.

15.26. Formuler et démontrer la proposition analogue à celle du problème 15.25 pour les lignes.

15.27. Démontrer que la k-ième colonne de la matrice AB est égale à la combinaison linéaire des colonnes de la matrice A, dont les coefficients sont les éléments de la k-ième colonne de la matrice B.

15.28. Formuler et démontrer l'analogue de la proposition du problème 15.27 pour les lignes.

15.29. Démontrer que:

1) si on permute deux lignes de la matrice A, les lignes respectives de AB sont également permutées;

2) si l'on multiplie la k-ième ligne de la matrice A par le nombre λ, la k-ième ligne de la matrice AB est également multipliée par λ;

3) si à la k-ième ligne de la matrice A on ajoute sa j-ième ligne, la matrice AB subit la même transformation élémentaire.

15.30. Formuler et démontrer les analogues des propositions de 15.29 pour les colonnes.

15.31. Démontrer qu'on peut permuter deux lignes de la matrice si l'on utilise successivement d'autres transformations élémentaires de ses lignes, à savoir: la multiplication d'une ligne par un nombre non nul et l'addition d'une ligne de la matrice à une autre ligne.

15.32. Calculer le produit e_iA $({}^te_k)$ pour une matrice A quelconque (e_i désigne la i-ème ligne de la matrice unité d'ordre correspondant).

15.33. Etant donné une matrice A arbitraire et la matrice E_{ij} d'ordre approprié, calculer le produit:

1) $E_{ij}A$; 2) AE_{ij}.

15.34. Soient A et B deux matrices telles que ${}^t\xi A\eta = {}^t\xi B\eta$, où ξ et η sont des matrices-colonnes quelconques ayant même nombre d'éléments. Démontrer que $A = B$.

15.35. Soient A une matrice de type (m, n), E_m et E_n les matrices unités d'ordres m et n respectivement. Démontrer que $E_mA = AE_n = A$.

15.36. Par quelle matrice doit-on multiplier la matrice A pour obtenir:

1) la première colonne de A; 2) la première ligne de A?

15.37. Choisir une matrice élémentaire K de telle sorte que la matrice KA puisse être obtenue à partir de A:

1) par permutation de deux premières lignes de A;

2) par addition de la première ligne à la deuxième;

3) par multiplication de la première ligne de A par le nombre $\lambda \neq 0$.

15.38. Choisir une matrice élémentaire K de telle sorte que le produit AK s'obtienne de A par une transformation élémentaire donnée des colonnes.

Matrice inverse
(problèmes 15.39 à 15.65)

15.39. Donner des exemples des matrices singulières et régulières.

15.40. Soient A une matrice singulière d'ordre 2, m un entier naturel. Démontrer qu'il existe un nombre λ tel que $A^m = \lambda^{m-1}A$ pour tous les m.

15.41. Est-ce qu'une matrice rectangulaire est inversible?

15.42. Démontrer que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, $\det B = (\det A)^{-1}$ si B est la matrice inverse de A.

15.43. 1) Etant donné des matrices carrées A, B, C telles que $AB = E$, $AC = E$, démontrer que $B = C$.

2) Est-il possible que $AB = E$ pour les matrices rectangulaires? L'assertion 1) est-elle vraie pour les matrices rectangulaires?

15.44. Soit une matrice carrée $A = \| a_{ij} \|$. Ecrire le système des équations que vérifient les éléments de la j-ième colonne de la matrice A^{-1}.

15.45. Calculer:

1) $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$;

4) $(A_{34})^{-1}$; 5) $(A_{77})^{-1}$; 6) $(A_6)^{-1}$; 7) $(A_{207})^{-1}$;

8) $(A_{203})^{-1}$; 9) $(A_{202})^{-1}$; 10) $(A_{227})^{-1}$.

15.46. Démontrer que l'inverse de la matrice élémentaire est une matrice élémentaire.

15.47. Calculer la matrice inverse de la matrice élémentaire donnée:

1) $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

8) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 9) A_{13}; 10) A_{43}; 11) A_{200}.

15.48. Vérifier les identités:

1) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$; 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;

5) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$; 6) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

15.49. 1) Démontrer que la matrice carrée peut être réduite à la

matrice unité par des transformations élémentaires des lignes si et seulement si elle est régulière.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour les transformations élémentaires des colonnes de la matrice.

15.50 (s). Démontrer que toute matrice régulière est le produit de matrices élémentaires.

15.51. Décomposer la matrice donnée en produit des matrices élémentaires:

1) (s) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

15.52. 1) Soient A, B des matrices de même ordre. On sait que la matrice A peut être réduite à la matrice unité E par une série de transformations élémentaires des lignes. En quelle matrice la même série des transformations élémentaires peut-elle faire passer la matrice E? La matrice B?

2) Répondre aux mêmes questions lorsqu'il s'agit d'une série de transformations élémentaires des colonnes de la matrice A.

15.53. 1) Décrire et argumenter le procédé de calcul de la matrice A^{-1}, où l'on utilise les transformations élémentaires des lignes des matrices A, E.

2) Décrire et argumenter le procédé de calcul de la matrice A^{-1}, où l'on utilise les transformations élémentaires des colonnes des matrices A, E.

15.54. Calculer:

1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}^{-1}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$;

4) $(A_{430})^{-1}$; 5) $(A_{432})^{-1}$; 6) $(A_{433})^{-1}$; 7) $(A_{434})^{-1}$; 8) $(A_{439})^{-1}$; 9) $(A_{601})^{-1}$; 10) $(A_{614})^{-1}$; 11) $(A_{609})^{-1}$; 12) $(A_{608})^{-1}$; 13) $(A_{618})^{-1}$.

15.55. Soit $A^2 + A + E = O$. Démontrer que la matrice A est régulière et indiquer le procédé élémentaire de calcul de A^{-1}.

15.56. Soit $A^m = O$. Démonter que $(E - A)^{-1} = E + A + \dots$ $\dots + A^{m-1}$.

15.57. La matrice A commute avec B. Démontrer que A^{-1} commute avec B^{-1} (on suppose que les matrices sont inversibles).

15.58. Vérifier la formule $(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS$.

15.59. On sait que $S^{-1}AS = B$ et que $f(t)$ est un polynôme. Démontrer que $f(B) = S^{-1}f(A)S$.

15.60. Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ des matrices-colonnes ayant même nombre d'éléments, $1/\mu = 1 + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \neq 0$, $B = E + \boldsymbol{a}\,({}^t\boldsymbol{b})$. Vérifier l'égalité $B^{-1} = E - \mu\boldsymbol{a}\,({}^t\boldsymbol{b})$.

15.61. Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ des matrices-colonnes à n éléments, A une matrice inversible d'ordre n, $1/\mu = 1 + {}^t\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{a} \neq 0$ et $B = A + \boldsymbol{a}\,({}^t\boldsymbol{b})$. Vérifier l'égalité $B^{-1} = A^{-1} - \mu A^{-1}\boldsymbol{a}\,({}^t\boldsymbol{b})\,A^{-1}$.

15.62. 1) Décrire et argumenter le procédé de calcul du produit $A^{-1}B$, où l'on utilise les transformations élémentaires des lignes des matrices A, B.

2) Décrire et argumenter le procédé de calcul du produit AB^{-1}, où l'on utilise les transformations élémentaires des colonnes des matrices A, B.

15.63. Calculer les produits des matrices:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $A_{205}A_{203}^{-1}$; 3) $A_{203}^{-1}A_{205}$;

4) $A_{210}^{-1}A_{205}$; 5) $A_{450}^{-1}A_{431}$; 6) $A_{618}A_{617}^{-1}$.

15.64. Soient A, C des matrices régulières. Résoudre l'équation matricielle:

1) $AX = O$; 2) $AX = B$; 3) $XA = B$;

4) $AXC = B$; 5) $A(X + C) = B$.

15.65. Trouver la matrice X qui vérifie l'équation:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $X \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 10 \\ 17 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $X \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$;

6) $X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X = X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

8) $A_{12}X = A_5$; 9) $XA_{12} = A_{12}$; 10) $X^{-1}A_{12}X = A_{21}$;
11) $A_{111}X = A_{228}$; 12) $A_{229}X = A_{116}$; 13) $A_{203}X = c_{53}$;
14) $A_{126}X = A_{230}$; 15) $A_{113}X = A_{213}$; 16) $XA_{227} = A_{229}$.

Autres opérations sur les matrices
et matrices de formes spéciales
(problèmes 15.66 à 15.141)

15.66. Soient A, B des matrices diagonales de même ordre, α un nombre. Démontrer que les matrices αA, $A + B$, AB, BA sont aussi diagonales et $AB = BA$.

15.67. Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Démontrer que:

1) les colonnes de la matrice BA s'obtiennent par multiplication des colonnes de la matrice B par les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;

2) les lignes de la matrice AB s'obtiennent par multiplication des lignes de B par les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

15.68. Soient A une matrice diagonale, $f(t)$ un polynôme. Démontrer que la matrice $f(A)$ est aussi diagonale.

15.69. Soit une matrice diagonale A dont tous les éléments diagonaux sont différents et soit $AB = BA$. Démontrer que la matrice B est aussi diagonale.

15.70. La matrice A commute avec toute matrice diagonale d'ordre n. Démontrer que A est une matrice diagonale d'ordre n.

15.71. La matrice A commute avec toutes les matrices E_{ij} d'ordre n. Démontrer que A est une matrice scalaire.

15.72. La matrice A commute avec toute matrice d'ordre n. Démontrer que A est une matrice scalaire.

15.73 (s). Trouver toutes les matrices qui commutent avec chaque matrice régulière d'ordre n.

15.74. Trouver la matrice adjointe de la matrice donnée:

1) A_{82}; 2) A_{86}; 3) A_{89}; 4) A_{81}.

15.75. Vérifier si l'identité est vraie:

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$; 2) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;
3) $(A^*)^* = A$; 4) $(A \cdot B)^* = B^* A^*$; 5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

15.76. Déterminer si la matrice proposée d'ordre 2 est diagonale, scalaire, triangulaire, symétrique, symétrique gauche, hermitienne, antihermitienne, unitaire, orthogonale ou matrice de permutation:

1) A_{82}; 2) A_{12}; 3) A_{87}; 4) A_{80}; 5) A_{77}; 6) A_{15};

7) A_{46}; 8) A_{23}; 9) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{88}$; 10) A_{22}; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{16}$.

15.77. Démontrer que:

1) tous les éléments diagonaux d'une matrice symétrique gauche sont nuls;

2) les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels;

3) les éléments diagonaux d'une matrice antihermitienne sont imaginaires.

15.78. Démontrer que:

1) la matrice iA est antihermitienne si la matrice A est hermitienne;

2) la matrice iA est hermitienne si la matrice A est antihermitienne.

15.79. 1) Quelle est la forme générale des matrices hermitiennes d'ordre 2?

2) Même question pour les matrices antihermitiennes d'ordre 2.

3) Trouver toutes les matrices de permutation d'ordre 2.

15.80. Etant donné une matrice diagonale A dont tous les éléments diagonaux sont différents de zéro, démontrer que A^{-1} existe et est diagonale.

15.81 (s). Soit A une matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont différents de zéro. Démontrer que A^{-1} existe et est une matrice triangulaire supérieure.

15.82. Démontrer que A^{-1} est une matrice symétrique si A est une matrice symétrique régulière.

15.83. Soit A une matrice symétrique gauche régulière. Démontrer que A^{-1} est une matrice symétrique gauche.

15.84. Démontrer que la matrice A^{-1} existe et est orthogonale si A est une matrice orthogonale.

15.85. Démontrer que la matrice A^{-1} existe et est unitaire si A est une matrice unitaire.

15.86. Soit A une matrice de permutation. Démontrer que A^{-1} existe et est aussi une matrice de permutation.

15.87. Démontrer que la matrice donnée est orthogonale et déterminer son inverse:

1) A_{77}; 2) A_{313}; 3) A_{318}; 4) A_{322}; 5) A_{445}.

15.88. Démontrer que la matrice donnée est unitaire et déterminer son inverse:

1) A_{103}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{488}$.

15.89. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures. Exprimer les éléments de la matrice AB par ceux des matrices A et B.

15.90. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures. Démontrer qu'il en est de même des matrices $A + B$ et AB.

15.91. Soient A et B deux matrices symétriques. Démontrer que:

1) $A + B$ est une matrice symétrique;

2) A^k est une matrice symétrique pour tout k naturel;

3) la matrice AB est une matrice symétrique si et seulement si A et B sont des matrices commutables.

15.92. Soient A et B deux matrices symétriques gauches. Démontrer que:

1) $A + B$ est une matrice symétrique gauche;

2) A^k est une matrice symétrique gauche pour un k impair et symétrique pour un k pair;

3) la matrice AB est symétrique si et seulement si A et B sont des matrices commutables.

4) Formuler et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que le produit des matrices A et B soit symétrique gauche.

15.93. Soit A une matrice carrée. Démontrer que les matrices $A + {}^tA$ et $A\,({}^tA)$ sont symétriques et que la matrice $A - {}^tA$ est symétrique gauche.

15.94. Démontrer que toute matrice carrée peut être décomposée en une somme de matrices symétrique et symétrique gauche. Est-ce que cette décomposition est unique?

15.95. Décomposer la matrice donnée en une somme de matrices symétrique et symétrique gauche:

1) A_{49}; 2) A_{16}; 3) A_{234}.

15.96. Soient S une matrice régulière et ${}^tSAS = B$. Démontrer que les matrices A et B sont simultanément symétriques ou symétriques gauches (c'est-à-dire si A est symétrique (resp. symétrique gauche), il en est de même de B, et inversement).

15.97. Démontrer l'assertion: toute matrice réelle hermitienne est symétrique.

15.98. Soient A et B deux matrices hermitiennes. Démontrer que:

1) la matrice $A + B$ est hermitienne;

2) la matrice AB est hermitienne si et seulement si les matrices A et B sont commutables.

15.99. Soient A une matrice hermitienne et $A = B + iC$, B et C étant des matrices réelles. Démontrer que B est une matrice symétrique et C une matrice symétrique gauche.

15.100. Démontrer que toute matrice carrée peut être décomposée en une somme de matrices hermitienne et antihermitienne. Est-ce que cette décomposition est unique?

15.101. Démontrer que toute matrice réelle unitaire est orthogonale.

15.102. Démontrer que si les matrices A et B sont orthogonales, AB l'est également.

15.103. Démontrer que si les matrices A et B sont unitaires, AB est aussi unitaire.

15.104. Soit A une matrice orthogonale. Démontrer que la somme des carrés des éléments de sa ligne quelconque vaut 1 et que la somme des produits d'éléments respectifs de deux lignes distinctes vaut 0. Est-ce que ces propriétés sont déterminantes?

15.105. Formuler et démontrer les propriétés analogues à 15.104 des colonnes de la matrice orthogonale.

15.106. Formuler et démontrer les propriétés de la matrice unitaire, qui sont analogues aux propriétés 15.104, 15.105 de la matrice orthogonale.

15.107. Démontrer que la matrice de permutation est orthogonale.

15.108. Démontrer que si A et B sont des matrices de permutation, AB est aussi une matrice de permutation.

15.109. On sait que la matrice A est diagonale et orthogonale. Que peut-on dire de ses éléments diagonaux λ_i?

15.110. La matrice A est diagonale et unitaire. Que peut-on dire de ses éléments diagonaux λ_i?

15.111. Vérifier si la matrice donnée est périodique, nilpotente, ou stochastique; calculer la période, l'indice de nilpotence:

1) A_{22}; 2) A_{14}; 3) $\frac{1}{2}A_{12}$; 4) A_5; 5) A_{77};

6) A_{243}; 7) A_{235}; 8) A_{237}; 9) A_{236}; 10) A_{430};

11) A_{431}; 12) A_{457}; 13) $\frac{1}{3}A_{434}$; 14) A_{613}.

15.112. Vérifier que toute matrice nilpotente est singulière et que toute matrice périodique est régulière.

15.113. Démontrer que $A^2 = O$ si A est une matrice nilpotente d'ordre 2.

15.114. Prouver que la matrice triangulaire est nilpotente si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont nuls.

15.115. Démontrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes commutables sont des matrices nilpotentes.

15.116. Démontrer que le produit AB des matrices périodiques commutables est une matrice périodique. Exprimer l'une quelconque de ses périodes en fonction des périodes des matrices A et B.

15.117. Soit $A^m + A^{m-1} + \ldots + E = O$. Démontrer que A est une matrice périodique.

15.118 (s). Vérifier que toute matrice de permutation est périodique.

15.119. Soit A une matrice unitaire hermitienne. Démontrer qu'elle est aussi périodique.

15.120. Soient S une matrice régulière et $S^{-1}AS = B$. Vérifier que les matrices A et B sont toutes deux périodiques ou nilpotentes (c'est-à-dire si la matrice A est périodique (resp. nilpotente), il en est de même de B, et inversement).

15.121. Soient A et B deux matrices positives. Démontrer que $A + B$, AB sont aussi des matrices positives.

15.122. Soient I la colonne formée des unités et A une matrice positive. Démontrer que la condition $AI = I$ est nécessaire et suffisante pour que A soit stochastique.

15.123. Démontrer que si les matrices A et B sont stochastiques, la matrice AB l'est également.

15.124. Soit A une matrice stochastique. Est-ce que A^{-1} existe? Est-ce que A^{-1} est stochastique si elle existe?

15.125. Dans quel cas une matrice stochastique est-elle orthogonale?

15.126. Démontrer les identités:

1) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$; 2) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

15.127. Soient A une matrice triangulaire, m un entier naturel. Calculer la trace de la matrice A^m.

15.128. Soit A une matrice arbitraire. Calculer:

1) $\operatorname{tr}({}^tAA)$; 2) $\operatorname{tr}(A^*A)$.

Démontrer que $A = O$ si $\operatorname{tr}(A^*A) = 0$.

15.129. Démontrer que $\operatorname{tr} A = 0$ si A est une matrice nilpotente d'ordre 2.

15.130. Démontrer qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que $AB - BA = E$.

15.131. Soient A et B des matrices d'ordre 2 dont les éléments sont aussi des matrices. Formuler les conditions sous lesquelles ces matrices peuvent être multipliées. Démontrer que si le produit AB existe, on a $(AB)^{\sqsupset} = A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}$.

15.132. Soient A et B des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 composées de blocs. Sachant que le produit AB existe, obtenir la formule qui permet de calculer la matrice $A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}$.

15.133. Soient A une matrice d'ordre 2 composée de blocs, B une matrice-colonne à deux blocs.

1) Formuler les conditions sous lesquelles le produit AB est défini.

2) Démontrer que $(AB)^{\sqsupset} = A^{\sqsupset} B^{\sqsupset}$ si AB existe.

3) Obtenir la formule pour le calcul de $A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}$.

15.134. Soient A et B des matrices quasi diagonales. Formuler les conditions sous lesquelles:

1) le produit AB est défini;

2) $(AB)^{\sqsupset} = A^{\sqsupset}B^{\sqsupset}$;

3) les produits AB et BA sont définis;

4) $AB = BA$.

15.135. Vérifier les identités $(A + B)^{\sqsupset} = A^{\sqsupset} + B^{\sqsupset}$, $(AB)^{\sqsupset} = A^{\sqsupset} B^{\sqsupset}$ pour des matrices formées de blocs.

15.136. En décomposant les matrices données en blocs, calculer le produit:

1) $A_{430}A_{431}$; 2) $A_{432}A_{450}$; 3) $A_{450}A_{433}$;
4) $A_{451}A_{452}$; 5) $A_{436}A_{437}$; 6) $A_{530}A_{531}$.

15.137. Trouver la matrice $(H^{\sqsupset})^{-1}$ si H est une matrice composée de blocs:

1) $H = \left\| \begin{matrix} E & A \\ O & E \end{matrix} \right\|$;

2) $H = \left\| \begin{matrix} A & B \\ O & C \end{matrix} \right\|$ (les matrices A et C sont inversibles).

15.138. Soient E la matrice unité d'ordre r; D une matrice de type (r, s); $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ des matrices-colonnes. Résoudre l'équation:

1) $\| E \quad D \|^{\sqsupset} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$; 2) $\| E \quad D \|^{\sqsupset} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

15.139. Calculer le produit kroneckerien des matrices:

1) $A_{17} \otimes \boldsymbol{c}_7$; 2) $\boldsymbol{c}_7 \otimes A_{17}$; 3) $A_{18} \otimes \boldsymbol{c}_8$; 4) $\boldsymbol{c}_8 \otimes A_{18}$;
5) $A_{17} \otimes A_{18}$; 6) $A_{18} \otimes A_{17}$; 7) $A_{13} \otimes A_{19}$.

15.140. Soient $\boldsymbol{a} = \| a_1 \ldots a_n \|$, $\boldsymbol{b} = {}^t\| b_1 \ldots b_m \|$. Calculer $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$ et comparer avec $\boldsymbol{ba}$.

15.141. Vérifier les identités:
1) $(\alpha A) \otimes B = \alpha (A \otimes B)$;
2) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;
3) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;
4) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$;
5) $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$;
6) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

§ 16. Rang de la matrice

On utilise dans ce paragraphe les notions: *rang d'une matrice*, *mineur principal d'une matrice*, *colonnes* et *lignes principales d'une matrice*. Pour résoudre les problèmes, il s'avère utile d'appliquer les théorèmes qui établissent des relations entre ces notions, ainsi que le fait essentiel de ce que le rang de la matrice ne varie pas par transformations élémentaires de ses lignes et colonnes.

Exposons quelques méthodes de simplification d'une matrice par des transformations élémentaires de ses lignes.

On dit que la matrice A de type (m, n) est *de forme simplifiée* si 1) ses r ($r \geqslant 0$) colonnes coïncident avec les r premières colonnes de la matrice unité d'ordre m, 2) pour $r < m$, ses $m - r$ dernières lignes sont nulles. Le rang de la matrice simplifiée est r.

La méthode de réduction d'une matrice à la forme simplifiée, appellée *méthode de Gauss-Jordan*, consiste à transformer, étape par étape, chacune des colonnes de la matrice donnée en une colonne de la matrice unité.

Commençons par décrire une étape de cette transformation.

Remarquons au préalable que, bien qu'après chaque transformation élémentaire on aboutisse à une nouvelle matrice, on garde la même notation $A = \| a_{ij} \|$ afin de simplifier l'exposé.

Soit a_{ij} un élément non nul de la matrice A. Appelons-le élément principal (ou clé) de l'étape considérée. La ligne et la colonne de numéros i, j dans lesquelles il se trouve seront appelées ligne principale et colonne principale. L'étape considérée comprend les transformations élémentaires suivantes: 1) on met la ligne principale à une nouvelle place. Le nouveau numéro de la ligne principale est le numéro de l'étape ; 2) on multiplie la ligne principale par le nombre $(a_{ij})^{-1}$, de sorte que l'élément principal devient égal à 1 ; 3) à chaque ligne qui diffère de la principale, on ajoute le produit de la ligne principale par un nombre λ qu'on choisit de manière à annuler tous les éléments de la colonne principale de la matrice, à l'exception de l'élément principal: pour la k-ième ligne $(k \neq i)$ on adopte $\lambda = -a_{kj}$.

Il résulte des transformations 1) à 3) que la j-ième colonne de la matrice A devient égale à la s-ième colonne de la matrice unité, où s est le numéro de l'étape considéré.

Donnons maintenant une description générale d'une des suites d'étapes possibles.

Si toutes les colonnes de la matrice A sont nulles, cette matrice est de forme simplifiée et $r = 0$. Dans le cas contraire, en inspectant les colonnes de la matrice de gauche à droite on s'arrête à la première colonne non nulle. Soit j_1 son numéro. On choisit un élément non nul quelconque de cette colonne et on passe à la première étape de la transformation. Il en résulte que les $j_1 - 1$ premières colonnes dans la matrice sont nulles et la j-ième colonne devient égale à la première colonne de la matrice unité. Si de plus $m = 1$ ou qu'il n'y ait plus d'éléments non nuls dans les lignes de numéros $2, \ldots, m$, on a $r = 1$ et la réduc-

tion à la forme simplifiée est terminée. Dans le cas contraire, on choisit la première colonne à gauche de numéro $j_2 > j_1$ qui a des éléments non nuls situés au-dessous de la première ligne. Chacun de ces éléments peut être pris en guise de l'élément principal de la deuxième étape. Après avoir accompli la deuxième étape de simplification de la matrice, on peut recommencer à inspecter les autres colonnes et, si nécessaire, passer à la troisième étape. L'étape de numéro r est la dernière si $r = m$ ou s'il n'y a plus d'éléments non nuls dans les lignes de numéros $r + 1, \ldots, m$. Sur ce, le processus de simplification de la matrice s'achève.

Un autre procédé communément adopté de simplification d'une matrice au moyen des transformations élémentaires est la *méthode de Gauss*. Les calculs se partagent alors en deux grands groupes. On effectue d'abord la marche directe de la méthode de Gauss, qui comprend les r étapes analogues à celles de la méthode de Gauss-Jordan. L'élément principal a_{ij} étant choisi, la s-ième étape comprend trois transformations: 1) on met la ligne principale à la s-ième place; 2) on divise cette ligne par a_{ij}; 3) on retranche de chaque ligne de numéro $>s$ le produit de la s-ième ligne par un nombre λ qu'on choisit de manière à annuler tous les éléments de la colonne principale, qui sont situés au-dessous de l'élément principal. Le choix successif des colonnes principales et des éléments principaux s'effectue de la même façon que dans la méthode de Gauss-Jordan. Après la dernière étape (r-ième), la matrice prend la forme dite *en escalier*.

Les colonnes principales de la matrice en escalier constituent les r premières colonnes de la matrice triangulaire supérieure dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Toutes les lignes de la matrice en escalier de numéros $>r$ sont nulles. Le rang de la matrice en escalier est r. Pour trouver le rang de la matrice, il suffit de la réduire à la forme en escalier.

Pour réduire la matrice en escalier à la forme simplifiée, on peut se servir de la marche inverse de la méthode de Gauss. Elle comprend $r - 1$ étapes. A la s-ième étape, la colonne principale est la colonne j_{r-s+1}, et la ligne principale, la ligne de numéro $r - s + 1$. De plus de chaque ligne de numéro $r - s + 1$ on soustrait le produit de la ligne principale par un nombre λ qu'on choisit de manière à annuler tous les éléments de la colonne principale, qui sont situés au-dessus de l'élément principal. Au bout de $r - 1$ étapes, toutes les colonnes principales deviennent des colonnes de la matrice unité, et la matrice donnée prend la forme simplifiée.

16.1. Décrire toutes les matrices de rang 0.

16.2. Décrire toutes les matrices de rang 1.

16.3. Est-ce qu'une matrice peut ne pas avoir de mineur principal ?

16.4. Indiquer l'un quelconque des mineurs principaux et déterminer le rang de la matrice :

$$1) \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad 2) \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}; \quad 3) \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad 4) \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$5) \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad 6) \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix};$$

$$7) \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

16.5. Indiquer les lignes principales des matrices 1) à 7) du problème 16.4.

16.6. Indiquer les colonnes principales des matrices 1) à 7) du problème 16.4.

16.7. Indiquer le mineur principal, les colonnes et les lignes principales d'une matrice carrée de déterminant différent de zéro. Quel est le rang d'une telle matrice?

16.8. Démontrer que le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses éléments non nuls.

16.9. Démontrer que si tous les mineurs d'ordre k de la matrice sont nuls, les mineurs d'ordre $k+1$ le sont aussi.

16.10. Démontrer que le rang d'une matrice n'est pas inférieur à celui de sa sous-matrice quelconque.

16.11. Démontrer que l'adjonction à la matrice d'une colonne nulle ne change pas son rang.

16.12. Démontrer que l'adjonction à la matrice d'une colonne égale à la combinaison linéaire de ses colonnes ne change pas son rang.

16.13. Démontrer que $\mathrm{Rg}\, B \leqslant \mathrm{Rg}\, A$ si les colonnes de la matrice B sont des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice A.

16.14. Evaluer le rang de la matrice $\| A \quad B \|^{\top}$ en fonction des rangs des matrices A et B.

16.15. On sait que les matrices A et B ont même nombre de lignes. Démontrer que $\mathrm{Rg}\, \| A\ B \|^{\top} = \mathrm{Rg}\, A$ si le rang de la matrice A ne varie pas lorsqu'on joint à A l'une quelconque des colonnes de la matrice B.

16.16. Démontrer que la matrice ne change pas son rang si:

1) on multiplie l'une quelconque de ses lignes par un nombre différent de zéro:

2) on permute ses lignes;

3) on ajoute, à l'une quelconques de ses lignes, une combinaison linéaire des autres lignes;

4) on fait les transformations élémentaires de ses colonnes.

16.17. Décrire un procédé de calcul du rang de la matrice, où l'on utilise des transformations élémentaires de ses lignes et colonnes.

16.18. Calculer le rang de la matrice:

1) $\| 1 \ \ 0 \|$; 2) $\| 0 \ \ 1 \ \ 0 \|$; 3) A_{21}; 4) A_{20}; 5) A_{13};
6) A_{12}; 7) A_{7}; 8) A_{81}; 9) A_{111}; 10) A_{202};
11) A_{205}; 12) A_{233}; 13) A_{214}; 14) A_{232}; 15) A_{368};
16) A_{396}; 17) A_{408}; 18) A_{452}; 19) A_{435}; 20) A_{453};
21) A_{444}; 22) A_{454}; 23) A_{443}; 24) A_{587}; 25) A_{533};
26) A_{544}; 27) A_{592}; 28) A_{632}; 29) A_{634}.

16.19. Calculer le rang de la matrice pour toutes les valeurs possibles du paramètre:

1) A_{78}; 2) A_{367}; 3) A_{365}; 4) A_{363};
5) A_{508}; 6) A_{629}; 7) A_{645}.

16.20. Calculer le rang de la matrice $A - \lambda E$ pour toutes les valeurs du paramètre λ si:

1) $A = A_{47}$; 2) $A = A_{211}$; 3) $A = A_{431}$.

16.21. Démontrer que les lignes (resp. les colonnes) de la matrice A sont linéairement dépendantes si $\det A = 0$.

16.22. La matrice A est d'ordre n et contient une sous-matrice nulle d'ordre $n - 1$. Evaluer le rang de A.

16.23. La matrice A est d'ordre n et contient une sous-matrice nulle d'ordre s. Evaluer le rang de A.

16.24. La matrice A est d'ordre n et contient une sous-matrice d'ordre $n - 1$ dont le rang est 1. Evaluer le rang de A.

16.25. 1) Evaluer le rang du produit de deux matrices par l'intermédiaire des rangs des facteurs.

2) Donner des exemples de réalisation des relations: $\text{Rg}\, AB < \text{Rg}\, A$, $\text{Rg}\, AB < \text{Rg}\, B$, $\text{Rg}\, AB < \min(\text{Rg}\, A, \text{Rg}\, B)$, $\text{Rg}\, AB = \text{Rg}\, A$, $\text{Rg}\, AB = \text{Rg}\, B$.

16.26. 1) Soient $\boldsymbol{a}$ une matrice-ligne, $\boldsymbol{b}$ une matrice-colonne. Calculer le rang de la matrice $\boldsymbol{ba}$.

2) (s) Soit $\text{Rg}\, A = 1$. Démontrer que la matrice A est égale au produit d'une matrice-colonne par une matrice-ligne.

16.27 (s). Soient A, B, C des matrices, $\det A \neq 0$, et soient définis les produits AB, CA. Démontrer que $\text{Rg}\, AB = \text{Rg}\, B$, $\text{Rg}\, CA = \text{Rg}\, C$. Est-ce que l'une quelconque de ces égalités est vérifiée si $\det A = 0$?

16.28. Démontrer que, si $\text{Rg}\, A = r$, le mineur formé par l'intersection de r lignes linéairement indépendantes et de r colonnes linéairement indépendantes de la matrice A est différent de zéro.

16.29. On sait que les matrices A et B sont composées respectivement de r colonnes et de r lignes linéairement indépendantes. Quel est le rang de AB?

16.30. Les matrices A et B sont respectivement de type (m, r) et (r, n), le rang de AB étant égal à r. Trouver les rangs des matrices A et B.

16.31. La décomposition de la matrice A en produit $A = BC$ est dite squelettique si $\text{Rg}\, A = \text{Rg}\, B = \text{Rg}\, C$ et si le rang de chacune des matrices B et C est égal au nombre de ses lignes ou colonnes.

1) Démontrer que toute matrice A peut être représentée sous la forme d'un produit de la matrice M composée des lignes principales de A par une matrice K (décomposition squelettique de la matrice par rapport aux lignes).

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour la décomposition squelettique de la matrice par rapport aux colonnes.

3) Comment sont liées entre elles les différentes décompositions squelettiques d'une matrice?

16.32. Trouver des décompositions squelettiques (voir problème 16.31) par rapport aux lignes et aux colonnes des matrices suivantes:

1) A_{14}; 2) A_{231}; 3) A_{251}; 4) A_{403}; 5) A_{454}.

16.33. Démontrer que toute matrice de rang r peut être représentée sous la forme d'une somme de r matrices de rang 1.

16.34. Indiquer lesquelles des relations écrites ci-dessous sont possibles. Lesquelles d'entre elles sont vérifiées pour tout couple de matrices de même type?

1) $\operatorname{Rg}(A+B)=\operatorname{Rg}A$;
2) $\operatorname{Rg}(A+B)=\max(\operatorname{Rg}A, \operatorname{Rg}B)$;
3) $\operatorname{Rg}(A+B)=\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B$;
4) $\operatorname{Rg}(A+B)<\min(\operatorname{Rg}A, \operatorname{Rg}B)$;
5) $\operatorname{Rg}(A+B)<\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B$;
6) $\operatorname{Rg}(A+B)\leqslant\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B$.

16.35 (s). On sait que les matrices A et B sont respectivement de type (m, n) et (n, p). Démontrer que $\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B\leqslant n$ si $AB=O$.

16.36. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}\sin(a_1+b_1) & \sin(a_1+b_2) & \dots & \sin(a_1+b_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin(a_n+b_1) & \sin(a_n+b_2) & \dots & \sin(a_n+b_n)\end{Vmatrix}\leqslant 2.$$

16.37. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}A & O\\ O & B\end{Vmatrix}=\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B.$$

16.38. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}A & C\\ O & B\end{Vmatrix}\geqslant\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B.$$

16.39. Soit A une matrice carrée. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}A & A^2\\ A^3 & A^4\end{Vmatrix}=\operatorname{Rg}A.$$

16.40. Soient E la matrice unité, A, B des matrices carrées d'ordre n. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}E & B\\ A & AB\end{Vmatrix}=n.$$

16.41. Démontrer que

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix}A & B\\ 3A & -B\end{Vmatrix}=\operatorname{Rg}A+\operatorname{Rg}B.$$

CHAPITRE VII

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Dans ce chapitre on utilise les notions et les termes suivants: *système d'équations linéaires homogènes* et *non homogènes*, *matrice principale du système* (*matrice des coefficients*), *déterminant d'un système* de n équations linéaires à n inconnues, *matrice complète du système*, *colonne des termes constants*, systèmes *compatible* et *incompatible* d'équations, systèmes *équivalents* d'équations, *solution particulière* et *solution générale* d'un système d'équations linéaires, *famille fondamentale de solutions* et *matrice fondamentale* d'un système d'équations linéaires homogènes, *inconnues principales* et *inconnues paramétriques* (*non principales*), système homogène *adjoint* au système donné d'équations linéaires.

Principaux théorèmes: théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues (théorème de Cramer), deux conditions de compatibilité d'un système de m équations à n inconnues (théorème de Kronecker-Capelli et théorème de Fredholm).

Donnons quelques formules et notations.

Le système de m équations linéaires à n inconnues

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

peut être écrit sous la forme matricielle:

$$Ax = b,$$

où x et b désignent les matrices-colonnes ${}^t\| x_1 \ \dots \ x_n \|$ et ${}^t\| b_1 \ \dots \ b_m \|$ respectivement. Les matrices

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad \| A \mid b \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

s'appellent respectivement *matrice principale* et *matrice complète* du système d'équations. On appelle *solution* du système (1) tout ensemble ordonné de n nombres, pour lesquels les deux membres de chaque équation du système prennent des valeurs égales. Ces nombres sont appelés *composantes de la solution*. On écrit la solution du système sous la forme de matrice-colonne. L'ensemble de toutes les solutions du système homogène d'équations linéaires à n inconnues est défini par la formule

$$X = h_1X_1 + \dots + h_{n-r}X_{n-r}, \qquad (2)$$

où $X_1, \dots, X_{n-r}$ sont des solutions particulières linéairement indépendantes du système homogène donné, $h_1, \dots, h_{n-r}$ des constantes arbitraires (paramètres), $r = \text{Rg}\, A$ est le rang du système. L'ensemble $\{X_1, \dots, X_{n-r}\}$ est ap-

pelé *famille fondamentale de solutions* d'un système d'équations homogènes. Les solutions du système homogène forment un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices-colonnes à n éléments; la famille fondamentale de solutions est une base de ce sous-espace. Le deuxième membre de la formule (2) est appelé *solution générale du système homogène*. On peut mettre la formule (1) sous la forme matricielle

$$X = \Phi h, \tag{3}$$

où Φ est la matrice formée des colonnes $X_1, \ldots, X_{n-r}$, h est une matrice-colonne constituée par $n - r$ constantes arbitraires $h_1, \ldots, h_{n-r}$. La matrice Φ est appelée *matrice fondamentale d'un système d'équations homogènes*.

La solution générale d'un système d'équations linéaires non homogènes peut être écrite sous la forme vectorielle

$$X = h_1X_1 + \ldots + h_{n-r}X_{n-r} + X_0 \tag{4}$$

ou sous la forme matricielle

$$X = \Phi h + X_0, \tag{5}$$

où X_0 est une solution (arbitraire) particulière du système non homogène et $h_1X_1 + \ldots + h_{n-r}X_{n-r} = \Phi h$ la solution générale du système homogène associé.

Les systèmes d'équations possédant le même ensemble des solutions sont dits *équivalents*. Cette notion ne concerne que les systèmes compatibles. On dit que le système d'équations (B) *découle* de (A) si l'ensemble des solutions de (B) contient celui de (A). Pour faciliter la résolution de certains problèmes il est utile de se servir des assertions suivantes: tout sous-système d'un système d'équations est une conséquence de ce système; l'adjonction, au système d'équations, de l'une quelconque de ses conséquences donne un système équivalent.

L'étude de la compatibilité du système d'équations linéaires et la recherche de ses solutions se font à l'aide des transformations de ce système, qui correspondent aux transformations élémentaires des lignes de la matrice complète. Ces transformations ne changent pas la nature du système: un système incompatible se transforme en un système incompatible, et un système compatible en un système compatible équivalent au proposé.

Les transformations élémentaires des lignes permettent de réduire la matrice complète (et simultanément la matrice fondamentale) du système à la forme simplifiée. Le système d'équations correspondant à la matrice complète simplifiée est appelé *système simplifié*.

Pour résoudre un système d'équations, on peut adopter le schéma suivant.

1. Réduire la matrice complète par des transformations élémentaires à la forme simplifiée.
2. Vérifier la compatibilité du système simplifié en recourant au théorème de Kronecker-Capelli.
3. Résoudre le système simplifié s'il s'est avéré compatible.

Supposons que les r premières colonnes de la matrice A du système compatible sont des colonnes principales. Dans ce cas, la matrice complète simplifiée est de la forme

$$\left\| \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,\,n-r} & & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2,\,n-r} & & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{r,\,n-1} & & \beta_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & \ldots & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & \ldots & 0 & & 0 \end{array} \right\| . \tag{6}$$

Il lui correspond le système simplifié d'équations

$$\begin{aligned} x_1+\alpha_{11}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1,\,n-r}x_n&=\beta_1,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ x_r+\alpha_{r1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{r,\,n-r}x_n&=\beta_r. \end{aligned}\qquad(7)$$

Les inconnues $x_1, \ldots, x_r$ correspondant aux colonnes principales de la matrice sont dites *principales*, les autres inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sont dites *non principales*. En se donnant les valeurs $h_1, \ldots, h_{n-r}$ des inconnues non principales, on trouve les inconnues principales à partir du système d'équations (7). La solution générale prend la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x_1&=-\alpha_{11}h_1-\ldots-\alpha_{1,\,n-r}h_{n-r}+\beta_1,\\ \ldots&\ldots\ldots\\ x_r&=-\alpha_{r1}h_1-\ldots-\alpha_{r,\,n-r}\,h_{n-r}+\beta_r,\\ x_{r+1}&=h_1,\ \ldots,\ x_n=h_{n-r}, \end{aligned}\qquad(8)$$

où $h_1, \ldots, h_{n-r}$ sont des constantes arbitraires. La solution générale (8) peut être écrite sous la forme vectorielle (4) et sous la forme matricielle (5) si l'on pose

$$X=\begin{Vmatrix} x_1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x_n \end{Vmatrix},\quad X_0=\begin{Vmatrix} \beta_1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \beta_r\\ 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ 0 \end{Vmatrix},\quad \Phi=\begin{Vmatrix} -\alpha_{11} & \ldots & -\alpha_{1,\,n-r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\alpha_{r1} & \ldots & -\alpha_{r,\,n-r}\\ 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.\qquad(9)$$

La matrice Φ définie par la formule (9) est appelée *matrice fondamentale normale*. Ses colonnes constituent une *famille fondamentale normale de solutions* du système d'équations homogènes

$$\begin{aligned} x_1+\alpha_{11}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1,\,n-r}x_n&=0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ x_r+\alpha_{r1}\,x_{r+1}+\ldots+\alpha_{r,\,n-r}\,x_n&=0, \end{aligned}\qquad(10)$$

qui correspond aux inconnues principales $x_1, \ldots, x_r$. La matrice fondamentale normale peut être écrite directement d'après la matrice complète (6). Si l'on écrit la matrice complète simplifiée sous la forme $\begin{Vmatrix} E_r & D & \beta\\ O & O & o \end{Vmatrix}$, la matrice fondamentale normale s'écrit sous la forme $\begin{Vmatrix} -D\\ E_{n-r} \end{Vmatrix}$. E_r, E_{n-r} sont ici les matrices unités d'ordre r et $n-r$ respectivement, tandis que β est la matrice-colonne des nombres $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

La solution générale du système d'équations peut être obtenue sous les formes (4) et (5) à partir des systèmes d'équations (7), (10) sans recourir à la formule (8). La solution particulière peut être obtenue du système (7) en choisissant de façon arbitraire les valeurs des inconnues non principales (si on les rend toutes nulles, on obtient la solution particulière définie par la formule (9)). Les colonnes de la matrice fondamentale peuvent être obtenues comme solutions du système (10) à condition de donner, aux inconnues paramétriques, des valeurs qui forment une matrice régulière. En particulier, si l'on prend pour ${}^t\| x_{r+1} \ldots x_n \|$ les colonnes de la matrice unité, les solutions du système (10) forment la matrice fondamentale (9).

Remarque. Si le système donné d'équations est compatible, mais les r premières colonnes de la matrice principale ne sont pas des colonnes principales,

on peut adopter l'un des deux procédés pour résoudre le système des équations simplifiées.

Procédé 1. On écrit le système simplifié et on prend pour inconnues principales les inconnues qui correspondent aux colonnes principales de la matrice du système. On exprime les inconnues principales en fonction des autres inconnues (non principales) et on met la solution générale sous la forme (4) ou (5).

Procédé 2. On désigne par $y_1, \ldots, y_r$ les inconnues correspondant aux colonnes principales de la matrice du système, les autres inconnues étant notées $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Après ce changement d'inconnues, on obtient un système simplifié d'équations de la forme (7), on le résout et procède à la substitution inverse.

Il existe donc plusieurs façons pour obtenir la solution générale du système d'équations linéaires, et beaucoup de formes pour présenter cette solution.

Faisons encore quelques remarques sur la présentation de la matière dans ce chapitre. Tous les systèmes d'équations intervenant dans les exercices et dans les réponses correspondantes ne sont pas donnés sous les formes développées (1) et (8). Une partie des systèmes d'équations est définie au moyen de la matrice complète. Dans les réponses à ces exercices, on indique la matrice fondamentale de solutions du système d'équations homogènes et la matrice-colonne de l'une des solutions particulières du système non homogène. Les matrices ne figurent pas explicitement dans les problèmes et les réponses, mais leurs numéros permettent de les trouver dans la liste jointe à la fin du livre.

§ 17. Systèmes d'équations linéaires à déterminant différent de zéro

17.1. Ecrire la matrice complète du système d'équations. Résoudre le système.

1) $2x_1 + x_2 = 10,\quad x_1 + x_2 = 17;$ 2) $3x + 5y = 2,\quad 5x + 9y = 4;$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 = 2,\quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3,\quad x_1 + x_2 = 3;$ 4) $y + 3z = -1,\quad 2x + 3y + 5z = 3,\quad 3x + 5y + 7z = 6;$

5) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16,\quad x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23,\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10,\quad 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1;$

6) $2x + 3y + 4z + 5t = 30,\quad 3x + 3y + 4z + 5t = 34,\quad 4x + 4y + 4z + 5t = 41,\quad x + y + z + t = 10;$

7) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,\quad x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -3,\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,\quad x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -2;$

8) $x_1 + x_2 = 3,\quad x_1 + x_3 = 4,\quad x_1 + x_4 = -2,\quad x_1 + x_5 = -1,\quad x_1 + x_6 = 0,\quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1.$

17.2. Ecrire le système d'équations linéaires correspondant à la matrice complète donnée. Résoudre le système en se servant de la règle de Cramer.

1) $\| A_{40} \mid c_7 \|$; 2) $\| A_6 \mid c_9 \|$; 3) $\| A_{202} \mid c_{54} \|$;

4) $\| A_{209} \mid c_{55} \|$; 5) $\| A_{204} \mid c_{56} \|$;

6) $\| A_{203} \mid c_{53} \|$; 7) $\| A_{203} \mid o \|$.

17.3. Démontrer les assertions:

1) Si les équations du système (B) sont des combinaisons linéaires des équations du système linéaire compatible (A), l'ensemble des solutions du système (B) contient celui de (A).

2) On aboutit à un système équivalent si on joint au système compatible d'équations linéaires une combinaison linéaire de ses équations.

3) On obtient un système équivalent au système compatible d'équations linéaires si on fait les transformations élémentaires des lignes de la matrice complète associée à ce système.

17.4. Comment varient les solutions du système d'équations linéaires si on fait les transformations élémentaires des colonnes de la matrice principale?

17.5. Quel système d'équations simplifiées peut-on obtenir en appliquant l'algorithme de Gauss aux lignes de la matrice complète associée au système donné de n équations linéaires à n inconnues, si la matrice principale est régulière?

17.6. Ecrire le système d'équations linéaires d'après la matrice complète donnée et le résoudre. (Les matrices ci-dessous sont partagées en 4 groupes, suivant l'ordre de la matrice principale.)

$n = 2$:

1) $\| A_{18} \mid c_{10} \|$; 2) $\| A_8 \mid c_{12} \|$; 3) $\| A_{10} \mid c_{12} \|$;

$n = 3$;

4) $\| A_{216} \mid c_{59} \|$; 5) $\| A_{217} \mid c_{60} \|$; 6) $\| A_{218} \mid c_{61} \|$;

7) $\| A_{219} \mid c_{98} \|$; 8) $\| A_{220} \mid c_{63} \|$;

$n = 4$:

9) $\| A_{446} \mid c_{154} \|$; 10) $\| A_{447} \mid c_{155} \|$; 11) $\| A_{448} \mid c_{185} \|$:

12) $\| A_{449} \mid c_{157} \|$; 13) $\| A_{442} \mid c_{158} \|$; 14) $\| A_{442} \mid c_{159} \|$;

15) $\| A_{439} \mid c_{160} \|$;

$n = 5$:

16) $\| A_{537} \mid c_{232} \|$; 17) $\| A_{538} \mid c_{238} \|$;

18) $\| A_{539} \mid c_{233} \|$; 19) $\| A_{540} \mid c_{234} \|$;

20) $\| A_{541} \mid c_{235} \|$; 21) $\| A_{542} \mid c_{236} \|$;

22) $\| A_{542} \mid c_{237} \|$; 23) $\| A_{543} \mid c_{268} \|$.

§ 18. Systèmes d'équations linéaires homogènes

18.1. Ecrire la matrice des coefficients du système donné d'équations linéaires homogènes. Résoudre le système.

1) $x - y = 0$; 2) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$;

3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$;

4) $x + 3y + 2z = 0,$ $2x + 4y + 3z = 0$; 5) $5x - 8y + 3z = 0,$ $2x - 3y + z = 0$;

6) $x + 2y + 3z = 0,$ $2x + 3y + 4z = 0,$ $x + y + z = 0$;

7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0,$ $4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$;

8) $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0.$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$;

9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0,$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,$ $3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0,$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$;

10) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 0$;

11) $x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0,$ $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 0,$ $x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 = 0$;

12) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0,$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0,$ $3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0,$ $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$

18.2. Démontrer que:

1) la somme de deux solutions du système d'équations linéaires homogènes est une solution du même système;

2) le produit d'une solution quelconque du système d'équations linéaires homogènes par un nombre est une solution du même système.

18.3. Soit k le nombre maximal des solutions linéairement indépendantes du système d'équations linéaires homogènes. Exprimer k en fonction des dimensions et du rang de la matrice du système. Dans quel cas $k = 0$?

18.4. Combien de solutions linéairement indépendantes possède le système d'équations linéaires homogènes si sa matrice est régulière?

18.5. Est-ce qu'un système d'équations linéaires homogènes peut s'avérer incompatible?

18.6. Formuler les conditions auxquelles doit satisfaire le système d'équations linéaires homogènes (et vérifier qu'elles sont né-

cessaires et suffisantes) pour que ce système possède 1) une solution unique; 2) une infinité de solutions.

18.7. Ecrire et résoudre le système d'équations linéaires homogènes s'il est défini par sa matrice des coefficients:

1) $\| 1\ 2 \|$; 2) $\| 1\ 1\ 1 \|$; 3) $\| 1\ 3\ 0\ 1 \|$;
4) A_{391}; 5) A_{455}; 6) A_{500}; 7) A_{514};
8) A_{519}; 9) A_{573}; 10) A_{582}; 11) A_{583}.

18.8. Ecrire le système d'équations linéaires homogènes d'après la matrice des coefficients contenant un paramètre. Résoudre le système pour toutes les valeurs possibles du paramètre:

1) $A = A_{221} - \lambda E$; 2) $A = A_{212} - \lambda E$;
3) $A = A_{222} - \lambda E$; 4) $A = A_{365}$;
5) $A = A_{213} - \lambda E$; 6) $A = A_{363}$.

18.9. Résoudre le système d'équations linéaires homogènes si on connaît sa matrice des coefficients. Former et résoudre le système adjoint:

1) A_{114}; 2) A_{115}; 3) A_{118}; 4) A_{205}; 5) A_{209};
6) A_{368}; 7) A_{408}; 8) A_{145}; 9) A_{146}; 10) A_{443}; 11) A_{587}; 12) A_{536}.

18.10. Est-ce que le système donné d'équations linéaires homogènes et son système adjoint peuvent avoir le même nombre des solutions linéairement indépendantes?

18.11. Est-ce que les ensembles des solutions du système donné d'équations linéaires homogènes et de son système adjoint peuvent coïncider?

18.12. Démontrer que le système d'équations linéaires homogènes possède une solution non triviale si et seulement si les lignes de la matrice principale du système adjoint sont linéairement dépendantes.

18.13. Connaissant une matrice fondamentale Φ, trouver la forme générale d'une matrice fondamentale quelconque du même système d'équations.

18.14. La matrice donnée est une matrice fondamentale d'un système d'équations linéaires homogènes. Trouver au moins une matrice fondamentale normale:

1) A_{117}; 2) A_{118}; 3) A_{397}.

18.15. La matrice donnée est une matrice fondamentale d'un système d'équations linéaires. Trouver toutes les matrices fondamentales normales de ce système d'équations:

1) A_{119}; 2) c_{197}; 3) A_{112}; 4) A_{398}.

18.16. Dans le système d'équations $Ax = o$ (x est une matrice-colonne) dont la matrice fondamentale est Φ, on a effectué le changement des inconnues $x = Sy$ ($\det S \neq 0$). Quel système obtient-on pour y? Indiquer une matrice fondamentale de solutions de ce système.

18.17. Trouver au moins un système d'équations linéaires homogènes pour lequel la matrice proposée est fondamentale:

1) A_{110}; 2) A_{147}; 3) c_{197}; 4) (s) A_{148}; 5) A_{411}.

§ 19. Systèmes d'équations linéaires de forme générale

Systèmes d'équations linéaires non homogènes (problèmes 19.1 à 19.12)

19.1. Résoudre le système d'équations linéaires:

1) $2x - 3y = 4$; 2) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$;

3) $2x + y + z = 4,$
$3x + z = 4;$

4) $(\sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{2} - 1)y - \sqrt{2}z = 1 + \sqrt{2},$
$x + (3 - 2\sqrt{2})y + (\sqrt{2} - 2)z = 1;$

5) $x + 2y + 3z = -4,$
$2x + 3y + 4z = 1,$
$3x + 4y + 5z = 6;$

6) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1;$

7) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3,$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4;$

8) $3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2,$
$5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2,$
$6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4,$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2;$

9) $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$
$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8;$

10) $6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 = 2,$
$20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 20,$
$13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 = 11,$
$4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 = -12,$
$x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7.$

19.2. Démontrer que:

1) la différence de deux solutions du système d'équations linéaires non homogènes est une solution du système homogène associé;

2) la somme de toute solution du système d'équations linéaires non homogènes et de toute solution du système homogène associé est encore une solution du système non homogène donné.

19.3. De combien d'unités le rang de la matrice principale d'un système peut-il différer du rang de la matrice complète?

19.4. On sait que le système de m équations linéaires à n inconnues est incompatible et que sa matrice principale est de rang n. Quelle est la plus simple forme à laquelle on peut réduire ce système d'équations en appliquant l'algorithme de Gauss aux lignes de la matrice complète?

19.5. Formuler la condition nécessaire et suffisante pour que le système de m équations linéaires à n inconnues possède une solution unique.

19.6. Ecrire le système d'équations linéaires d'après la matrice complète donnée. Résoudre le système ou constater son incompatibilité. (Les matrices ci-dessous sont partagées en 4 groupes, suivant le nombre des colonnes de la matrice principale. Au sein de chaque groupe, les matrices sont ordonnées selon le nombre des lignes.)

$n = 3$:

1) $\| A_{232} \mid c_{64} \|$; 2) $\| A_{232} \mid c_{65} \|$; 3) $\| A_{238} \mid c_{66} \|$;
4) $\| A_{239} \mid c_{67} \|$; 5) $\| A_{241} \mid c_{68} \|$; 6) $\| A_{233} \mid c_{70} \|$;
7) $\| A_{206} \mid c_{55} \|$; 8) $\| A_{206} \mid c_{51} \|$; 9) $\| {}^tA_{206} \mid c_{70} \|$;
10) $\| A_{400} \mid c_{162} \|$; 11) $\| A_{408} \mid c_{243} \|$;
12) $\| {}^tA_{585} \mid c_{240} \|$; 13) $\| {}^tA_{581} \mid c_{239} \|$.

$n = 4$:

14) $\| {}^tA_{145} \mid c_{14} \|$; 15) $\| A_{506} \mid c_{13} \|$;
16) $\| {}^tA_{149} \mid c_{15} \|$; 17) $\| A_{501} \mid c_{16} \|$;
18) $\| A_{502} \mid c_{17} \|$; 19) $\| A_{510} \mid c_{73} \|$;
20) $\| A_{511} \mid c_{74} \|$; 21) $\| A_{512} \mid c_{75} \|$;
22) $\| A_{513} \mid c_{62} \|$; 23) $\| A_{517} \mid c_{63} \|$;
24) $\| {}^tA_{399} \mid c_{50} \|$; 25) $\| {}^tA_{444} \mid c_{167} \|$;
26) $\| A_{520} \mid c_{244} \|$; 27) $\| A_{521} \mid c_{244} \|$;
28) $\| A_{523} \mid c_{241} \|$; 29) $\| A_{524} \mid c_{242} \|$;
30) $\| {}^tA_{587} \mid c_{245} \|$.

$n = 5$:

31) $\| A_{574} \mid c_{18} \|$; 32) $\| A_{575} \mid c_{46} \|$; 33) $\| A_{576} \mid c_{33} \|$;
34) $\| A_{581} \mid c_{77} \|$; 35) $\| A_{581} \mid c_{76} \|$: 36) $\| {}^tA_{422} \mid c_{72} \|$;
37) $\| A_{577} \mid c_{78} \|$; 38) $\| A_{584} \mid c_{79} \|$; 39) $\| A_{578} \mid c_{80} \|$;
40) $\| A_{579} \mid c_{81} \|$; 41) $\| A_{580} \mid c_{82} \|$;
42) (s) $\| A_{581} \mid c_{58} \|$; 43) $\| {}^tA_{522} \mid c_{163} \|$;
44) $\| {}^tA_{523} \mid c_{164} \|$; 45) $\| {}^tA_{524} \mid c_{165} \|$;
46) $\| A_{588} \mid c_{166} \|$; 47) $\| {}^tA_{520} \mid c_{170} \|$;
48) $\| A_{544} \mid c_{246} \|$; 49) $\| A_{533} \mid c_{247} \|$.

$n = 6$:

50) $\| A_{591} \mid c_{271} \|$.

19.7. Ecrire le système d'équations linéaires d'après la matrice complète donnée à un paramètre. Trouver toutes les valeurs du paramètre pour lesquelles le système est compatible et résoudre ce dernier.

1) $\| A_{223} \mid c_{85} \|$; 2) $\| A_{224} \mid c_{86} \|$; 3) $\| A_{225} \mid c_{87} \|$;
4) $\| A_{226} \mid c_{88} \|$.

19.8. Décrire toutes les combinaisons linéaires des solutions d'un système donné d'équations linéaires non homogènes, qui sont encore des solutions de ce système.

19.9. Décrire toutes les combinaisons linéaires des solutions d'un système donné d'équations linéaires non homogènes, qui sont des solutions du système homogène associé.

19.10. On sait que la colonne des termes constants du système d'équations linéaires est égale à la somme des colonnes de sa matrice principale. Indiquer l'une quelconque des solutions particulières du système.

19.11. On sait que la colonne des termes constants du système d'équations linéaires coïncide avec la dernière colonne de sa matrice principale. Indiquer l'une quelconque des solutions particulières du système.

19.12. Soient x, y les colonnes des solutions des systèmes d'équations $Ax = a$, $Ay = b$ respectivement et α, β des nombres quelconques. Quel système d'équations est vérifié par:

1) $z = \alpha x$; 2) $z = x + y$; 3) $z = \alpha x + \beta y$?

Conditions de compatibilité du système d'équations linéaires (problèmes 19.13 à 19.20)

19.13. Démontrer que le système d'équations linéaires admet au plus une solution si les colonnes de la matrice principale sont linéairement indépendantes.

19.14. Démontrer que le système d'équations linéaires est compatible pour toute colonne des termes constants si les lignes de la matrice principale sont linéairement indépendantes.

19.15. Démontrer l'assertion suivante: si le système d'équations linéaires est compatible pour toute colonne des termes constants, les lignes de sa matrice principale sont linéairement indépendantes.

19.16. Démontrer qu'on a toujours l'une des deux possibilités: soit le système d'équations linéaires est compatible pour toute colonne des termes constants, soit son système homogène adjoint a une solution non nulle (*alternative de Fredholm*).

19.17. Formuler les conditions auxquelles doit satisfaire la matrice principale (et démontrer que ces conditions sont nécessaires et suffisantes) pour que le nombre des solutions du système d'équations linéaires soit égal, selon la colonne b des termes constants, à:

1) 0 ou 1; 2) 1 ou ∞; 3) 0 ou ∞; 4) 1 pour toute b.

19.18. Le système d'équations linéaires est défini par sa matrice complète. Etudier la compatibilité de ce système en se basant sur le théorème de Fredholm et sur le résultat du problème 18.9 pour le système adjoint correspondant:

1) $\| A_{114} | c_{89} \|$; 2) $\| A_{118} | c_{90} \|$; 3) $\| A_{587} | c_{171} \|$.

19.19. Le système d'équations est défini par sa matrice complète contenant un paramètre. En appliquant le théorème de Fredholm, trouver toutes les valeurs du paramètre pour lesquelles le système est compatible et résoudre ce système:

1) $\| A_{205} \mid c_{91} \|$; 2) $\| A_{515} \mid c_{91} \|$; 3) $\| A_{507} \mid c_{91} \|$.

19.20. Le système d'équations est défini par sa matrice complète $\| A_{644} \mid c_{282} \|$ qui dépend des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$. Décrire l'ensemble des valeurs des paramètres, pour lesquelles le système est compatible et résoudre le système.

Systèmes équivalents d'équations (problèmes 19.21 à 19.29)

19.21. Démontrer que si les systèmes compatibles d'équations linéaires non homogènes sont équivalents, il en est de même des systèmes homogènes associés.

19.22. 1) Démontrer que les équations non triviales *) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ et $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0$ sont équivalentes si et seulement si

$$\operatorname{Rg} \begin{Vmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{Vmatrix} = 1.$$

2) Démontrer que les équations non triviales $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$ et $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = b$ sont équivalentes si et seulement si

$$\operatorname{Rg} \begin{Vmatrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ b_1 & \ldots & b_n & b \end{Vmatrix} = 1.$$

3) Formuler le critère d'équivalence de k équations linéaires prises deux à deux.

19.23. 1) Démontrer que les systèmes d'équations linéaires $Ax = \boldsymbol{o}$, $Bx = \boldsymbol{o}$ (x est une matrice-colonne) sont équivalents si et seulement si

$$\operatorname{Rg} \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}^{\square} = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B.$$

2) Démontrer que les systèmes compatibles d'équations linéaires $Ax = \boldsymbol{a}$, $Bx = \boldsymbol{b}$ (x est une matrice-colonne) sont équivalents si et seulement si

$$\operatorname{Rg} \begin{Vmatrix} A & \boldsymbol{a} \\ B & \boldsymbol{b} \end{Vmatrix}^{\square} = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B.$$

---

*) Une équation linéaire est *non triviale* si au moins un des coefficients des inconnues est différent de zéro.

19.24. Vérifier l'équivalence des systèmes d'équations 18.1, 11) et 18.1, 12).

19.25. Vérifier si les systèmes d'équations définis par les matrices complètes sont équivalents:

1) $(A_{502} \mid c_{17})$ et $(A_{503} \mid c_{12})$; 2) $(A_{239} \mid c_{67})$ et $(A_{240} \mid c_{147})$;

3) $(A_{581} \mid c_{69})$ et $({}^tA_{422} \mid c_{72})$.

19.26. Vérifier l'équivalence de trois systèmes d'équations (chaque système est défini par la matrice complète): $(A_{501} \mid c_{16})$, $(A_{509} \mid c_{67})$ et $(A_{510} \mid c_{73})$.

19.27. 1) On admet que l'adjonction d'un certain nombre d'équations linéaires homogènes à un système donné d'équations linéaires homogènes ne modifie pas l'ensemble de ses solutions. Démontrer que les équations ajoutées sont des combinaisons linéaires des équations du système proposé.

2) Démontrer la même assertion pour un système compatible d'équations linéaires non homogènes. Comparer avec le problème 17.3, 2).

19.28. 1) On admet que chaque solution du système d'équations linéaires homogènes (A) est solution du système d'équations linéaires homogènes (B). Démontrer que chaque équation du système (B) est alors une combinaison linéaire des équations du système (A).

2) Démontrer la même assertion pour des systèmes compatibles d'équations linéaires non homogènes. Comparer avec le problème 17.3, 1).

19.29. 1) Démontrer que deux systèmes d'équations linéaires homogènes sont équivalents si et seulement si les équations de chaque système sont des combinaisons linéaires des équations de l'autre système.

2) Démontrer la même assertion pour des systèmes compatibles d'équations linéaires non homogènes.

Annexe
(problèmes 19.30 à 19.49)

19.30 (s). Soit $Ax = b$ un système arbitraire d'équations linéaires (x est une matrice-colonne). Démontrer que le système d'équations $({}^tAA)\,x = {}^tAb$ est compatible.

19.31 (s). Etant donné une matrice carrée $A = \| a_{ik} \|$, démontrer que $\det A \neq 0$ si pour tout i on a $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$.

19.32. Démontrer que pour tous nombres $a_1, \ldots, a_{n+1}$ distincts deux à deux et tous nombres $b_1, \ldots, b_{n+1}$ il existe un polynôme unique $f(t)$ de degré au plus égal à n, tel que $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_{n+1}) = b_{n+1}$.

19.33. Trouver un polynôme $f(t)$ de troisième degré, tel que $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = 7$.

Les problèmes 19.34 à 19.49 donnés ci-dessous se rapportent à la droite, au cercle, au plan et à la sphère. On conseille au lecteur de prendre, à titre de définition de l'ensemble considéré, son équation algébrique et d'utiliser la théorie des systèmes d'équations linéaires sans recourir aux méthodes de la géométrie analytique.

19.34. 1) (s) Formuler en termes de rangs et démontrer la condition nécessaire et suffisante, imposée aux coordonnées cartésiennes (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) de trois points du plan, pour que ces derniers ne soient pas alignés.

2) Résoudre le même problème pour quatre points du plan.

19.35 (s). Démontrer que par deux points distincts de coordonnées cartésiennes (a_1, b_1), (a_2, b_2) passe une droite et une seule. Trouver son équation.

19.36. Montrer que par trois points non alignés de coordonnées (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) passe un seul cercle. Ecrire son équation si le repère est orthonormé.

19.37. 1) Trois droites du plan sont définies dans un repère cartésien par les équations $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Formuler en termes de rangs et démontrer la condition nécessaire et suffisante imposée aux coefficients des équations pour que ces droites ne soient pas concourantes.

2) Résoudre le même problème pour quatre droites.

19.38. En se basant sur les résultats du problème 19.37, déterminer si les droites considérées possèdent un point commun:

1) $2x + 3y + 1 = 0$, $7x + 11y + 4 = 0$,
$3x + 4y + 1 = 0$;

2) $x + 8y + 1 = 0$, $7x - y + 1 = 0$,
$11x - 26y - 1 = 0$, $8x + 7y + 2 = 0$.

19.39. 1) Quatre points sont définis par leurs coordonnées cartésiennes (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Formuler en termes de rangs et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que ces points n'appartiennent pas à un même plan.

2) Résoudre le même problème pour cinq points.

19.40. Sur la base du résultat du problème 19.39 déterminer si les points donnés appartiennent à un même plan:

1) (7, —1, 2), (2, 3, 1), (0, 10, 0), (3, 4, 1), (6, —2, 2);

2) (6, 1, 2), (2, 3, 1), (3, 4, 1), (6, 2, 2).

19.41. Montrer que par quatre points de coordonnées (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3, 4$, n'appartenant pas à un même plan il passe une sphère unique. Ecrire son équation si le repère est orthonormé.

19.42. Trois points sont définis par leurs coordonnées cartésiennes (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3$.

1) (s) Formuler en termes de rangs et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que ces points ne soient pas alignés.

2) Résoudre le même problème pour m points ($m \geqslant 4$).

19.43. En se basant sur le résultat du problème 19.42, déterminer si les points donnés sont alignés:

1) (2, 3, 1), (3, 4, 2), (0, 1, —1), (—2, —1, —3), (—6, —5, —7);
2) (2, 3, 1), (3, 4, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 3), (6, 5, 4).

19.44. Démontrer que par trois points non alignés de coordonnées cartésiennes (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3$, passe un plan unique. Trouver son équation.

19.45. Deux plans sont définis dans un repère cartésien par les équations $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$. Formuler en termes de rangs et démontrer les conditions nécessaires et suffisantes imposées aux coefficients des équations pour que ces plans:

1) coïncident;
2) aient une droite commune unique;
3) soient parallèles et ne coïncident pas.

19.46. Trois plans sont définis dans un repère cartésien par les équations $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Formuler en termes de rangs et démontrer les conditions nécessaires et suffisantes imposées aux coefficients des équations pour que ces plans:

1) coïncident;
2) aient un point commun unique;
3) aient une droite commune unique;
4) soient parallèles et ne coïncident pas;
5) forment un prisme.

19.47. Sur la base du résultat obtenu au problème 19.46, déterminer la position relative des plans:

1) $3x + 2y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y + 3z + 1 = 0$, $9x + 16y + 13z + 1 = 0$;
2) $x - y - z + 1 = 0$, $5x - 21y - 17z + 1 = 0$, $6x - 26y - 21z + 1 = 0$.

19.48. Quatre plans sont définis dans un repère cartésien par les équations $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sachant que les couples correspondant à $i = 1, 2$ et $i = 3, 4$ définissent des droites, formuler en termes de rangs et démontrer les conditions nécessaires et suffisantes imposées aux coefficients des équations pour que ces droites soient:

1) concourantes;
2) parallèles non confondues;
3) confondues;
4) non coplanaires.

19.49. Sur la base du résultat obtenu dans le problème 19.48, déterminer la position relative des droites

1) $\begin{cases} 3x+2y+5z-1=0, \\ -x+2y+3z-1=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-6y+7z+2=0, \\ 5x+3y-8z-3=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y+3z-2=0, \\ x-9y-6z-5=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-14y-9z-9=0, \\ 4x+2y+z-7=0. \end{cases}$

CHAPITRE VIII

ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre, on utilise les notions et termes fondamentaux suivants: *espace vectoriel réel* (*espace vectoriel sur le corps des nombres réels*), *espace vectoriel complexe* (*espace vectoriel sur le corps des nombres complexes*), *combinaisons linéaires de vecteurs*, *système de vecteurs linéairement dépendents*, *base de l'espace vectoriel*, *coordonnées du vecteur dans la base*, *colonne des coordonnées du vecteur*, *espace vectoriel de dimension finie et sa dimension*, *espace arithmétique* (*réel et complexe*), *espace vectoriel de dimension infinie*, *matrice de passage d'une base à l'autre*, *sous-espace vectoriel*, *sous-espace nul*, *enveloppe linéaire d'un système de vecteurs* (*sous-espace vectoriel engendré par ce système de vecteurs*), *somme et intersection d'une famille finie de sous-espaces*, *somme directe d'une famille finie de sous-espaces.*

Enumérons les principaux exemples d'espaces vectoriels:

1) Espace vectoriel arithmétique n-dimensionnel $\mathcal{R}_n$ sur le corps des nombres réels (espace arithmétique réel), c'est-à-dire l'espace des matrices-colonnes à n éléments réels. L'addition des matrices-colonnes et la multiplication de la matrice-colonne par un nombre s'effectuent élément par élément. La base de cet espace, composée des colonnes de la matrice unité, est dite *canonique*. Les coordonnées de la matrice-colonne par rapport à la base canonique sont les éléments de cette matrice.

2) Espace vectoriel arithmétique n-dimensionnel $\mathcal{C}_n$ sur le corps des nombres complexes (espace arithmétique complexe), c'est-à-dire l'espace des matrices-colonnes à n éléments complexes. Les opérations et la base canonique sont définies comme dans $\mathcal{R}_n$.

3) Espace $\mathcal{R}_{(m,\,n)}$ des matrices réelles de type (m, n) sur le corps des nombres réels, muni des opérations d'addition des matrices et de multiplication de la matrice par un nombre. La dimension de l'espace $\mathcal{R}_{(m,\,n)}$ vaut mn. On appelle *base canonique* de l'espace $\mathcal{R}_{(m,\,n)}$ la base engendrée par les matrices E_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ (voir introduction au § 15). Les matrices de base sont ordonnées de la façon suivante: $E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{m1}, E_{12}, \ldots, E_{m2}, \ldots \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{mn}$ *).

4) Espace $\mathcal{C}_{(m,\,n)}$ des matrices complexes de type (m, n) sur le corps des nombres complexes. Les opérations, la dimension, la base canonique sont les mêmes que pour $\mathcal{R}_{(m,\,n)}$.

5) Espace $\mathcal{P}^{(n)}$ des polynômes d'une seule variable t à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas le nombre donné n. Les opérations dans $\mathcal{P}^{(n)}$ sont les opérations ordinaires d'addition des polynômes et de multiplication du polynôme par un nombre. La dimension de l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$ vaut $n + 1$. La base canonique est la base des polynômes $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

On désigne en général un espace vectoriel par la lettre $\mathcal{L}$ et sa dimension par dim $\mathcal{L}$. Si dim $\mathcal{L} = n$, on écrit $\mathcal{L}_n$. Les éléments de l'espace vectoriel

---

*) Ces matrices peuvent être ordonnées d'une autre manière (voir introduction au chapitre XII).

sont appelés *vecteurs*, leurs coordonnées sont écrites sous la forme de matrices-colonnes.

Soit $\xi = {}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. On a

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = e\xi, \tag{1}$$

où e est interprété comme matrice-ligne des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. La formule (1) est appelée *formule de décomposition du vecteur x suivant la base e*.

Soient $e'_1, \ldots, e'_n$ les vecteurs de la base e' dont on connaît les coordonnées par rapport à la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} e_k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

La matrice S dont les colonnes sont les colonnes des coordonnées des nouveaux vecteurs de base $e'_1, \ldots, e'_n$ par rapport à l'ancienne base e est appelée *matrice de passage de la base e à la base e'*. L'égalité (2) s'écrit encore:

$$e' = eS. \tag{3}$$

Cette égalité se conserve si au lieu des matrices-lignes des vecteurs de e et de e' on considère les matrices engendrées par les colonnes des coordonnées des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_n$ dans une base fixée.

Si un vecteur x est défini par les matrices-colonnes ξ et ξ' de ses coordonnées dans les bases respectives e et e' et si S est la matrice de passage de la base e à la base e', on a

$$\xi = S\xi'. \tag{4}$$

Etant donné une base de l'espace, il existe une correspondance biunivoque entre les combinaisons linéaires des vecteurs et les combinaisons linéaires des matrices-colonnes des coordonnées de ces vecteurs.

On donne ci-dessous les schémas de résolution de quelques importants types de problèmes.

1) Les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ de la base f et le vecteur x sont définis par les matrices-colonnes de leurs coordonnées rapportées à la base e. Trouver la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x par rapport à la base f.

S o l u t i o n. La matrice-colonne ξ' s'obtient à partir de l'équation matricielle (4), où ξ est la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x dans la base e, et S est la matrice engendrée par les colonnes des coordonnées des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ rapportés à la base e. Pour calculer ξ', on simplifie la matrice $\| S \mid \xi \|$ par des transformations élémentaires des lignes de telle sorte que S devienne une matrice unité. On trouve alors la matrice recherchée ξ' à la place de la colonne ξ.

2) Les vecteurs des bases $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ sont définis par les matrices-colonnes de leurs coordonnées par rapport à la troisième base $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Trouver la matrice de passage S de la base f à la base g.

S o l u t i o n. Soient F et G les matrices engendrées par les colonnes des coordonnées des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_n$. En utilisant l'équation matricielle (3) on obtient $G = FS$.

La matrice $S = F^{-1}G$ peut être calculée à l'aide des transformations élémentaires des lignes de la matrice $\| F \mid G \|$. Si, après les transformations élémentaires des lignes, on obtient la matrice unité à la place de la matrice F, la matrice recherchée S apparaît à la place de G.

3) Les vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ sont définis par les matrices-colonnes de leurs coordonnées rapportées à une base e. Vérifier si les vecteurs donnés engendrent

une base de l'espace, établir les dépendances linéaires entre ces vecteurs et trouver une base de l'enveloppe linéaire du système $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

S o l u t i o n. Soit A la matrice formée par les colonnes des coordonnées des vecteurs proposés. La transformation élémentaire des lignes de A est équivalente à la multiplication de A à gauche par la matrice régulière T. Dans ce cas, toutes les colonnes de A sont également multipliées à gauche par T, et les dépendances linéaires entre les colonnes de la matrice ne varient pas.

Les vecteurs donnés constituent une base de $\mathscr{L}_n$ si et seulement si $k = n$ et $\det A \neq 0$. Désignons l'enveloppe linéaire de $a_1, \ldots, a_k$ par $\mathscr{P}$. La base de $\mathscr{P}$ est composée des vecteurs a_i dont les colonnes de coordonnées sont les colonnes principales de la matrice A. Les autres vecteurs se décomposent suivant ces derniers avec les coefficients qui figurent dans les décompositions des colonnes de coordonnées correspondantes suivant les colonnes principales de A. Pour trouver ces coefficients, on doit réduire la matrice A à la forme simplifiée par les transformations élémentaires des lignes.

Soient, par exemple,

$$\left\|\begin{matrix}1\\-1\\1\\0\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}1\\1\\0\\1\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}2\\0\\1\\1\end{matrix}\right\|$$

les matrices-colonnes des coordonnées des vecteurs a_1, a_2, a_3 d'un espace quadridimensionnel rapporté à une base e. La matrice

$$A = \left\|\begin{matrix}1 & 1 & 2\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$$

se réduit par les transformations élémentaires des lignes à la forme

$$\tilde{A} = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

Il va de soi que la troisième colonne de la matrice $\tilde{A}$ est égale à la somme des deux premières. Il en est donc de même pour la matrice A, d'où $a_3 = a_1 + a_2$.

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à n inconnues peut être assimilé à un ensemble de matrices-colonnes des coordonnées des vecteurs d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n$. En ce sens, chaque système d'équations linéaires homogènes à n inconnues définit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n$. La base de ce sous-espace est un ensemble de vecteurs dont les colonnes de coordonnées constituent une famille fondamentale de solutions du système donné d'équations linéaires homogènes.

4) Les vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ sont définis par les matrices-colonnes de leurs coordonnées rapportées à la base e de l'espace $\mathscr{L}_n$. Trouver le système d'équations linéaires qui définit l'enveloppe linéaire $\mathscr{P}$ des vecteurs proposés.

S o l u t i o n. Soit A la matrice formée des colonnes des coordonnées de $a_1, \ldots, a_k$ et soit $\operatorname{Rg} A = r$. Pour que le vecteur de matrice-colonne $\xi = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ appartienne au sous-espace $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que le rang de la matrice $\tilde{A} = \| A \mid \xi \|$ soit aussi égal à r. Par des transformations élémentaires des lignes de la matrice A on peut la réduire à la forme en escalier et donc faire annuler ses $n-r$ dernières lignes. Si l'on fait les mêmes transformations

avec la matrice $\tilde{A}$, on voit apparaître, à la $(k+1)$-ième place dans les $n-r$ dernières lignes, certaines combinaisons linéaires des nombres $x_1, \ldots, x_n$. En les égalant à zéro, on obtient le système recherché d'équations linéaires.

Proposons-nous d'écrire par exemple le système d'équations définissant l'enveloppe linéaire du système des vecteurs a_1, a_2, a_3 du problème précédent. La matrice

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array} \right\|$$

se réduit à la forme en escalier

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array} \right\|.$$

Sans la quatrième colonne, le rang de cette matrice vaut 2; pour que le rang de la matrice entière soit aussi égal à 2, il faut et il suffit que $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$. C'est justement le système recherché d'équations linéaires définissant l'enveloppe linéaire des vecteurs a_1, a_2, a_3 dans la base e.

On appelle *somme* d'une famille finie de sous-espaces $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ..., $\mathcal{P}$ l'enveloppe linéaire de la réunion des ensembles $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ..., $\mathcal{P}$. La somme $\mathcal{M} + \mathcal{N} + \ldots + \mathcal{P}$ d'une famille finie de sous-espaces vectoriels est dite *directe* si l'intersection de chacun des sous-espaces $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ..., $\mathcal{P}$ avec la somme des autres est nulle. La somme directe est notée: $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}$.

Si $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, on appelle projection du vecteur $x \in \mathcal{L}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ parallèlement au sous-espace vectoriel $\mathcal{N}$ le terme x_1 de la décomposition $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \mathcal{M}$, $x_2 \in \mathcal{N}$.

Arrêtons-nous sur les principaux problèmes liés aux notions de somme et d'intersection de sous-espaces.

5) Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont définis comme enveloppes linéaires des vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ et $b_1, \ldots, b_l$ respectivement. Trouver une base de la somme $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$.

S o l u t i o n. Le sous-espace $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ est une enveloppe linéaire du système des vecteurs $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$. Le problème se réduit donc au problème 3).

6) Les sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont définis par les systèmes d'équations linéaires homogènes. Trouver l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

S o l u t i o n. Le sous-espace $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est défini par le système des équations appartenant aux deux systèmes proposés. La dimension du sous-espace $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ peut être calculée d'après la *formule de Grassman*:

$$\dim (\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} - \dim (\mathcal{P} + \mathcal{Q}).$$

§ 20. Exemples d'espaces vectoriels. Base et dimension

20.1. L'ensemble donné est-il un espace vectoriel:
1) l'ensemble vide;
2) l'ensemble composé du seul élément nul?

20.2. Peut-on définir dans l'ensemble de deux éléments les opérations d'addition et de multiplication par un nombre pour que cet ensemble devienne un espace vectoriel ?

20.3. Démontrer que :

1) le système de vecteurs est lié s'il contient un sous-ensemble de vecteurs linéairement dépendants ;

2) tout sous-ensemble du système de vecteurs linéairement indépendants est libre ;

3) le vecteur a_0 est une combinaison linéaire des vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ si les vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ sont linéairement indépendants et les vecteurs $a_0, a_1, \ldots, a_k$ linéairement dépendants.

20.4. Etablir si l'ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace n-dimensionnel et s'il l'est, déterminer sa dimension :

1) l'ensemble des vecteurs dont toutes les coordonnées sont égales ;

2) l'ensemble des vecteurs dont la première coordonnée est 0 ;

3) l'ensemble des vecteurs dont la somme des coordonnées est égale à zéro ;

4) l'ensemble des vecteurs dont la somme des coordonnées vaut 1 ;

5) l'ensemble des vecteurs du plan, qui sont parallèles à une droite donnée ;

6) l'ensemble des vecteurs de l'espace tridimensionnel, perpendiculaires à une droite donnée ;

7) l'ensemble des vecteurs du plan, dont le module ne dépasse pas 1 ;

8) l'ensemble des vecteurs du plan, qui forment un angle α avec la droite donnée ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$).

20.5. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{M}_{(m,\,n)}$ des matrices de type (m, n) est un espace vectoriel pour les opérations d'addition des matrices et de multiplication de la matrice par un nombre. Trouver la dimension et une base de cet espace.

20.6. Etablir si l'ensemble donné de matrices carrées d'ordre n est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les matrices carrées d'ordre n et s'il l'est, trouver sa dimension :

1) l'ensemble des matrices dont la première ligne est nulle ;

2) l'ensemble des matrices diagonales ;

3) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ;

4) l'ensemble des matrices symétriques ;

5) l'ensemble des matrices symétriques gauches ;

6) l'ensemble des matrices singulières.

20.7. Etablir si l'ensemble donné de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ est un espace vectoriel pour les opérations d'addition et de multiplication par un nombre :

1) l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$;

2) l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a, b]$;

3) l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$;

4) l'ensemble des fonctions bornées sur $[a, b]$;

5) l'ensemble des fonctions telles que $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| \leqslant 1$;

6) l'ensemble des fonctions positives sur $[a, b]$;

7) l'ensemble des fonctions telles que $f(a) = 0$;

8) l'ensemble des fonctions telles que $f(a) = 1$;

9) l'ensemble des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$;

10) l'ensemble des fonctions croissantes monotones sur $[a, b]$;

11) l'ensemble des fonctions monotones sur $[a, b]$.

20.8. Démontrer que l'ensemble donné de fonctions est pour tout n naturel un espace vectoriel de dimension finie; trouver la dimension et indiquer une base de cet espace:

1) l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n (noté $\mathcal{P}^n$);

2) l'ensemble des polynômes pairs de degré au plus égal à n;

3) l'ensemble des polynômes impairs de degré au plus égal à n;

4) l'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre au plus égal à n, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;

5) l'ensemble des polynômes trigonométriques pairs d'ordre au plus égal à n;

6) l'ensemble des polynômes trigonométriques impairs d'ordre au plus égal à n;

7) l'ensemble des fonctions de la forme $f(t) = e^{\alpha t}(a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, où α est un nombre réel fixé.

20.9. Démontrer que l'ensemble donné de fonctions a une structure d'espace vectoriel de dimension infinie:

1) l'ensemble de tous les polynômes;

2) l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques;

3) l'ensemble des fonctions continues sur un segment.

20.10. Calculer la combinaison linéaire des matrices-colonnes:

1) $3c_1 - \frac{1}{3} c_2$; 2) $-c_{29} + c_{33} + 2c_{31}$;

3) $\frac{1}{2} c_{143} - \frac{1}{2} c_{138}$; 4) $c_{206} - 3c_{198} + 2c_{199}$.

20.11. Calculer la combinaison linéaire des matrices

$$\frac{1}{3} A_{215} - \frac{1}{2} A_{252} + A_{253} - A_{254}.$$

20.12. Déterminer la matrice-colonne x satisfaisant à l'équation:

1) $c_{28} + c_{29} - 2x = c_{32}$; 2) $\frac{c_{141} + x}{2} - \frac{c_{136} + x}{3} = c_{142}$;

3) $3(c_{197} + x) + 2(c_{202} - x) = 4(c_{204} - x)$.

20.13. Trouver les dépendances linéaires des matrices-colonnes données:

1) c_{34}, c_{35}, c_{29}; 2) c_{84}, c_{83}, c_{120};
3) c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201}; 4) c_{166}, c_{197}, c_{205}, c_{206}.

20.14. Trouver la dimension et la base de l'enveloppe linéaire du système donné de matrices-colonnes:

1) c_1, c_2; 2) c_{31}, c_{28}, c_{30}; 3) c_{31}, c_{30}, c_{32};
4) c_{121}, c_{124}, c_{118}; 5) c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201};
6) c_{196}, c_{198}, c_{202}; 7) c_{166}, c_{196}, c_{197}, c_{198};
8) o; 9) c_{166}, c_{203}, c_{204}, c_{197}.

20.15. Trouver la dimension et la base de l'enveloppe linéaire du système des matrices A_{391}, A_{390}, A_{389}.

20.16. Trouver la dimension et la base de l'enveloppe linéaire du système des polynômes $(1 + t)^3$, t^3, 1, $t + t^2$.

20.17. Démontrer que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ forment une base de l'espace arithmétique n-dimensionnel et trouver la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x dans cette base:

1) $n = 1$, $e_1 = c_1$, $x = c_2$;
2) $n = 2$, $e_1 = c_{28}$, $e_2 = c_{29}$, $x = c_{30}$;
3) $n = 3$, $e_1 = c_{116}$, $e_2 = c_{120}$, $e_3 = c_{122}$, $x = c_{49}$;
4) $n = 4$, $e_1 = c_{196}$, $e_2 = c_{197}$, $e_3 = c_{198}$, $e_4 = c_{199}$, $x = c_{200}$;
5) $n = 5$, $e_1 = c_{255}$, $e_2 = c_{263}$, $e_3 = c_{264}$, $e_4 = c_{265}$, $e_5 = c_{266}$, $x = c_{267}$.

20.18. Démontrer que les matrices A_5, A_{10}, A_{13}, A_6 forment une base dans l'espace des matrices carrées d'ordre 2. Trouver la colonne des coordonnées de la matrice A_{26} dans cette base.

20.19. Démontrer que les matrices A_{200}, A_{202}, A_{205}, A_{204}, A_{203}, A_{242} forment une base dans l'espace des matrices symétriques d'ordre 3. Trouver la colonne des coordonnées de la matrice A_{215} dans cette base.

20.20. Démontrer que les polynômes 1, $t - \alpha$, $(t - \alpha)^2, \ldots$ $\ldots, (t - \alpha)^n$ forment une base dans l'espace des polynômes de degré au plus égal à n. Trouver la colonne des coordonnées d'un polynôme arbitraire $p_n(t)$ de degré $\leqslant n$ dans cette base.

20.21 (s). Démontrer que les polynômes $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$ forment une base dans l'espace des polynômes impairs de degré $\leqslant 5$. Déterminer la colonne des coordonnées du polynôme $5t - t^3 + 2t^5$ dans cette base.

20.22. Trouver la dimension et la base de l'espace vectoriel défini dans une certaine base par le système d'équations linéaires:

1) $A_{27}x = o$; 2) $A_{238}x = o$; 3) $A_{249}x = o$;
4) $A_{391}x = o$; 5) $A_{110}x = o$; 6) $A_{442}x = o$; 7) $A_{577}x = o$.

20.23. Ecrire le système d'équations définissant l'enveloppe linéaire de la famille donnée des matrices-colonnes:

1) c_{66}, c_{83}; 2) c_{31}, c_{30}; 3) c_{30}, c_{29};

4) c_{166}, c_{196}; 5) c_{197}; 6) c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201};
7) c_{166}, c_{196}, c_{197}, c_{198}; 8) ${}^t(0, 0, 0, 0)$.

20.24. Démontrer que chacun des deux systèmes de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_n\}$ et $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de l'espace arithmétique n-dimensionnel. Trouver la matrice de passage de la première base à la seconde. Exprimer les coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ d'un vecteur dans la première base en fonction de ses coordonnées $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ dans la seconde.

1) $n = 1$, $f_1 = c_1$, $g_1 = c_3$;
2) $n = 2$, $f_1 = c_{29}$, $f_2 = c_{33}$, $g_1 = c_{32}$, $g_2 = c_{28}$;
3) $n = 3$, $f_1 = c_{116}$, $f_2 = c_{117}$, $f_3 = c_{94}$, $g_1 = c_{119}$, $g_2 = c_{84}$, $g_3 = c_{83}$;
4) $n = 4$, $f_1 = c_{166}$, $f_2 = c_{196}$, $f_3 = c_{197}$, $f_4 = c_{198}$, $g_1 = c_{199}$, $g_2 = c_{200}$, $g_3 = c_{202}$, $g_4 = c_{203}$.

20.25. Démontrer que chacun des deux systèmes de matrices $\{A_{132}, A_{143}, A_{134}, A_{133}, A_{110}, A_{135}\}$ et $\{A_{136}, A_{137}, A_{112}, A_{138}, A_{139}, A_{113}\}$ est une base dans l'espace des matrices à trois lignes et deux colonnes. Déterminer la matrice de passage de la première base à la seconde. Exprimer les coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_6$ d'une matrice de ce type dans la première base par l'intermédiaire de ses coordonnées $\xi'_1, \ldots, \xi'_6$ dans la seconde base.

20.26 (s). Démontrer que chacun des deux systèmes de matrices $\{A_{250}, A_{251}, A_{252}\}$et $\{A_{253}, A_{254}, A_{255}\}$ est une base dans l'espace des matrices symétriques gauches d'ordre 3. Trouver la matrice de passage de la première base à la seconde. Exprimer les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'une matrice symétrique gauche d'ordre 3 dans la première base en fonction de ses coordonnées ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 dans la seconde base.

20.27. Démontrer que chacun des deux systèmes de fonctions $\{t - t^2, t^3, 1 + 5t + t^3, (1 + t)^3\}$ et $\{(1 + t)^3, (1 - t)^3, t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2 + t^3\}$ est une base dans l'espace des polynômes de degré $\leqslant 3$. Trouver la matrice de passage de la première base à la seconde. Exprimer les coordonnées $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ d'un polynôme de degré $\leqslant 3$ dans la première base par ses coordonnées $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ dans la seconde base.

20.28. Démontrer que chacun des deux systèmes de fonctions $\{(1 + t^2)^2, (1 - t^2)^2, 1\}$ et $\{1 + t^2 + t^4, 1 - t^2 + t^4, t^4\}$ est une base dans l'espace des polynômes pairs de degré $\leqslant 4$. Déterminer la matrice de passage de la première base à la seconde. Trouver les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'un polynôme pair de degré $\leqslant 4$ dans la première base à partir de ses coordonnées ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 dans la seconde base.

20.29. Comment change la matrice de passage d'une base à l'autre si :

1) on permute le i-ième et le j-ième vecteur de la première base ;
2) on permute le i-ième et le j-ième vecteur de la seconde base ;
3) on écrit les vecteurs des deux bases dans l'ordre inverse ?

20.30. S_1 est la matrice de passage de la première base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de l'espace vectoriel n-dimensionnel à la seconde base $\{f_1, \ldots, f_n\}$, et S_2 la matrice de passage de la deuxième base à la troisième base $\{g_1, \ldots, g_n\}$. Trouver la matrice de passage:

1) de la première base à la troisième;
2) de la deuxième base à la première.

20.31. Décrire la position relative de deux bases d'un espace vectoriel tridimensionnel si la matrice de passage de la première base à la deuxième est:

1) diagonale;
2) triangulaire supérieure;
3) triangulaire inférieure.

§ 21. Somme et intersection de sous-espaces

21.1. Démontrer que l'espace des matrices carrées d'ordre n est la somme directe du sous-espace des matrices symétriques et du sous-espace des matrices symétriques gauches du même ordre.

21.2. Démontrer que l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$ est la somme directe du sous-espace des polynômes pairs de degré $\leqslant n$ et du sous-espace des polynômes impairs de degré $\leqslant n$.

21.3. Démontrer que l'espace vectoriel n-dimensionnel est la somme directe du sous-espace des vecteurs dont toutes les coordonnées sont égales entre elles et du sous-espace des vecteurs dont la somme des coordonnées est égale à 0.

21.4. Démontrer que l'espace arithmétique n-dimensionnel est la somme directe de sous-espaces vectoriels engendrés par les systèmes de vecteurs $\{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_l\}$:

1) $n = 2$, $a_1 = c_{30}$, $a_2 = c_{32}$, $b_1 = c_{35}$;
2) $n = 3$, $a_1 = c_{141}$, $a_2 = c_{146}$, $b_1 = c_{66}$, $b_2 = c_{140}$;
3) $n = 4$, $a_1 = c_{198}$, $a_2 = c_{196}$, $b_1 = c_{197}$, $b_2 = c_{166}$, $b_3 = c_{206}$;
4) $n = 4$, $a_1 = c_{196}$, $a_2 = c_{198}$, $a_3 = c_{202}$, $a_4 = c_{199}$, $b_1 = c_{166}$, $b_2 = c_{204}$.

21.5. Décomposer le vecteur donné x de l'espace arithmétique n-dimensionnel en somme de deux vecteurs dont le premier appartient à $\mathcal{P}$ et le second à $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ étant l'enveloppe linéaire du système des vecteurs $a_1, \ldots, a_k$, et $\mathcal{Q}$ celle du système des vecteurs $b_1, \ldots, b_l$. Vérifier que cette décomposition est unique.

1) $n = 2$, $x = c_{29}$, $a_1 = c_{28}$, $b_1 = c_{30}$;
2) $n = 3$, $x = c_{120}$, $a_1 = c_{84}$, $a_2 = c_{83}$, $b_1 = c_{66}$;
3) $n = 3$, $x = c_{145}$, $a_1 = c_{84}$, $a_2 = c_{83}$ $b_1 = c_{66}$;
4) $n = 3$, $x = c_{139}$, $a_1 = c_{84}$, $a_2 = c_{83}$, $b_1 = c_{66}$;
5) $n = 4$, $x = c_{200}$, $a_1 = c_{166}$, $a_2 = c_{198}$, $a_3 = c_{207}$, $b_1 = c_{202}$, $b_2 = c_{205}$.

21.6. Trouver la projection du vecteur donné x de l'espace arithmétique n-dimensionnel sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ parallèlement

au sous-espace vectoriel $\mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ est l'enveloppe linéaire du système des vecteurs $a_1, \ldots, a_k$, et $\mathcal{Q}$ celle du système des vecteurs $b_1, \ldots$ $\ldots, b_l$:

1) $n = 2$, $x = c_{32}$, $a_1 = c_{30}$, $b_1 = c_{34}$;
2) $n = 2$, $x = c_{37}$, $a_1 = c_{30}$, $b_1 = c_{34}$;
3) $n = 2$, $x = c_{35}$, $a_1 = c_{30}$, $b_1 = c_{34}$;
4) $n = 3$, $x = c_{146}$, $a_1 = c_{66}$, $a_2 = c_{121}$, $a_3 = c_{122}$, $b_1 = c_{145}$;
5) $n = 4$, $x = c_{201}$, $a_1 = c_{166}$, $a_2 = c_{199}$, $b_1 = c_{197}$, $b_2 = c_{198}$.

21.7. Trouver la dimension et une base de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace arithmétique n-dimensionnel, engendrés par les systèmes de vecteurs $\{a_1, \ldots$ $\ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_l\}$:

1) $n = 2$, $a_1 = c_{34}$, $a_2 = c_{37}$, $a_3 = c_{35}$, $b_1 = c_{30}$, $b_2 = c_{36}$, $b_3 = c_{32}$;
2) $n = 3$, $a_1 = c_{116}$, $a_2 = c_{121}$, $a_3 = c_{119}$, $b_1 = c_{122}$, $b_2 = c_{125}$, $b_3 = c_{138}$;
3) $n = 3$, $a_1 = c_{66}$, $a_2 = c_{139}$, $a_3 = c_{140}$, $b_1 = c_{94}$, $b_2 = c_{141}$, $b_3 = c_{117}$;
4) (s) $n = 3$, $a_1 = c_{83}$, $a_2 = c_{142}$, $a_3 = c_{143}$, $b_1 = c_{84}$, $b_2 = c_{144}$, $b_3 = c_{117}$;
5) $n = 3$, $a_1 = c_{66}$, $a_2 = c_{116}$, $a_3 = c_{145}$, $b_1 = c_{122}$, $b_2 = c_{146}$, $b_3 = c_{147}$;
6) $n = 3$, $a_1 = c_{83}$, $a_2 = c_{84}$, $a_3 = c_{120}$, $b_1 = c_{66}$, $b_2 = c_{121}$, $b_3 = c_{122}$;
7) $n = 4$, $a_1 = c_{196}$, $a_2 = c_{200}$, $a_3 = c_{127}$, $b_1 = c_{211}$, $b_2 = c_{218}$, $b_3 = c_{219}$;
8) $n = 4$, $a_1 = c_{196}$, $a_2 = c_{198}$, $a_3 = c_{202}$, $b_1 = c_{166}$, $b_2 = c_{204}$, $b_3 = c_{197}$;
9) $n = 4$, $a_1 = c_{166}$, $a_2 = c_{196}$, $a_3 = c_{197}$, $b_1 = c_{203}$, $b_2 = c_{205}$, $b_3 = c_{206}$;
10) $n = 4$, $a_1 = c_{166}$, $a_2 = c_{198}$, $a_3 = c_{196}$, $a_4 = c_{202}$, $b_1 = c_{207}$, $b_2 = c_{204}$, $b_3 = c_{197}$, $b_4 = c_{205}$.

21.8. Trouver la dimension et une base de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de l'espace des matrices carrées d'ordre 3, engendrés par les systèmes de matrices $\{A_{202}, A_{201}, A_{209}, A_{204}\}$ et $\{A_{256}, A_{205}, A_{257}, A_{258}\}$.

21.9. Déterminer la dimension et trouver une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels de l'espace des polynômes de degré $\leqslant 3$ si ces sous-espaces sont engendrés par $\{1 + 2t + t^3, 1 + t + t^2, t - t^2 + t^3\}$ et $\{1 + t^2, 1 + 3t + t^3, 3t - t^2 + t^3\}$.

21.10. S'inspirant de la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels, démontrer l'inégalité $\text{Rg}\,(A + B) \leqslant \text{Rg}\,A + \text{Rg}\,B$, où A et B sont deux matrices de même type (m, n).

21.11. Démontrer que la somme $\mathcal{L}$ de deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est directe si et seulement si au moins un des vecteurs

$x \in \mathscr{L}$ peut être représenté de façon univoque sous la forme $x = y + z$, où $y \in \mathscr{P}$, $z \in \mathscr{Q}$.

21.12. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que:

1) l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ contient un vecteur non nul si la somme des dimensions de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est strictement supérieure à la dimension de l'espace;

2) l'un de ces sous-espaces est contenu dans l'autre si la dimension de la somme de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ dépasse d'une unité la dimension de leur intersection.

21.13. Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel $\mathscr{P}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ de dimension finie il existe un sous-espace $\mathscr{Q} \subset \mathscr{L}$ tel que l'espace $\mathscr{L}$ soit la somme directe de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

21.14. Soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ trois sous-espaces vectoriels; $\mathscr{P} = (\mathscr{L} \cap \mathscr{N}) + (\mathscr{M} \cap \mathscr{N})$, $\mathscr{Q} = (\mathscr{L} + \mathscr{M}) \cap \mathscr{N}$.

1) Démontrer que $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$.

2) Le cas $\mathscr{P} \neq \mathscr{Q}$ est-il possible? Donner l'exemple correspondant.

21.15. Démontrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}^{(1)}, \ldots, \mathscr{L}^{(k)}$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs de la forme $x = x_1 + \ldots + x_k$, où $x_i \in \mathscr{L}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$.

21.16. Soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ trois sous-espaces vectoriels. Démontrer que

$$\mathscr{L} + \mathscr{M} + \mathscr{N} = (\mathscr{L} + \mathscr{M}) + \mathscr{N} = \mathscr{L} + (\mathscr{M} + \mathscr{N}).$$

21.17. Démontrer que la somme $\mathscr{L}$ des sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}^{(1)}, \ldots, \mathscr{L}^{(k)}$ est directe si et seulement si au moins un des vecteurs $x \in \mathscr{L}$ peut être représenté de façon univoque sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_k$, où $x_i \in \mathscr{L}^{(i)}$ (généralisation du problème 21.11).

§ 22. Espaces vectoriels complexes

22.1. Calculer la combinaison linéaire des matrices-colonnes:
1) $(1 + i)\, c_4 - ic_{53}$; 2) $2ic_{42} + (3 + i)\, c_{30} - c_{41}$;
3) $(1 - 2i)\, c_{148} + \frac{3}{2} c_{152}$.

22.2. Calculer la combinaison linéaire des matrices

$$(2 + i)\, A_{89} + iA_{10} + A_{27} - 2A_{91}.$$

22.3. Trouver la matrice-colonne x vérifiant l'équation:
1) $(1 + i)(x - c_{44}) - (2 + i)(x + c_{45}) = c_{43}$;
2) $2c_{153} - c_{149} + ix = c_{150}$.

22.4. Trouver les dépendances linéaires des matrices-colonnes suivantes:
1) c_{26}, c_{29}, c_{43}; 2) c_{26}, c_{30}, c_{40}; 3) $c_{131}, c_{132}, c_{133}$.

22.5. Trouver la dimension et une base de l'enveloppe linéaire du système donné des matrices-colonnes:

1) c_5; 2) c_{27}, c_{39}; 3) c_{26}, c_{43}, c_{44}; 4) $c_{134}, c_{151}, c_{152}$;
5) $c_{275}, c_{215}, c_{276}$; 6) $c_{166}, c_{215}, c_{196}, c_{193}, c_{216}$.

22.6. Démontrer que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ forment une base de l'espace arithmétique complexe n-dimensionnel. Déterminer la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x dans cette base:

1) $n = 1$, $e_1 = c_4$, $x = c_5$;
2) $n = 2$, $e_1 = c_{31}$, $e_2 = c_{35}$, $x = c_{39}$;
3) $n = 2$, $e_1 = c_{26}$, $e_2 = c_{40}$, $x = c_{41}$;
4) $n = 2$, $e_1 = c_{26}$, $e_2 = c_{27}$, $x = c_{38}$;
5) $n = 3$, $e_1 = c_{126}$, $e_2 = c_{127}$, $e_3 = c_{128}$, $x = c_{273}$;
6) $n = 4$, $e_1 = c_{166}$, $e_2 = c_{207}$, $e_3 = c_{274}$, $e_4 = c_{275}$, $x = c_{276}$.

22.7. Trouver la dimension et la base de l'espace vectoriel défini dans une certaine base par le système d'équations linéaires:

1) $A_{90}x = o$; 2) $A_{91}x = o$; 3) $A_{369}x = o$;
4) $A_{371}x = o$; 5) $A_{525}x = o$.

22.8. Ecrire le système d'équations qui définit l'enveloppe linéaire des matrices-colonnes données:

1) c_{40}, c_{42}; 2) c_{26}, c_{42}; 3) c_{215}; 4) c_{128}, c_{273};
5) $c_{275}, c_{276}, c_{214}, c_{215}$.

22.9. Démontrer que chacun des deux systèmes de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_n\}$ et $\{g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de l'espace arithmétique complexe n-dimensionnel. Trouver la matrice de passage de la première base à la seconde. Déterminer les coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ d'un vecteur dans la première base à partir de ses coordonnées $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ dans la seconde base.

1) $n = 1$, $f_1 = c_4$, $g_1 = c_6$;
2) $n = 2$, $f_1 = c_{31}$, $f_2 = c_{45}$, $g_1 = c_{44}$, $g_2 = c_{39}$;
3) $n = 3$, $f_1 = c_{129}$, $f_2 = c_{128}$, $f_3 = c_{130}$, $g_1 = c_{122}$, $g_2 = c_{126}$, $g_3 = c_{94}$.

22.10. Trouver la projection du vecteur x de l'espace arithmétique complexe bidimensionnel sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ parallèlement au sous-espace vectoriel $\mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ est engendré par le vecteur c_{44}, et $\mathcal{Q}$ par le vecteur c_{40}:

1) $x = c_{26}$; 2) $x = c_{42}$; 3) $x = c_{45}$.

22.11. Déterminer la dimension et trouver une base de la somme et de l'intersection des sous-espaces vectoriels de l'espace arithmétique complexe n-dimensionnel en sachant que ces sous-espaces sont engendrés par les systèmes de vecteurs $\{a_1, \ldots, a_k\}$ et $\{b_1, \ldots, b_l\}$.

1) $n = 3$, $a_1 = c_{83}$, $a_2 = c_{134}$, $a_3 = c_{148}$, $b_1 = c_{132}$, $b_2 = c_{149}$, $b_3 = c_{150}$;
2) $n = 3$, $a_1 = c_{131}$, $a_2 = c_{132}$, $a_3 = c_{133}$, $b_1 = c_{134}$, $b_2 = c_{135}$, $b_3 = c_{136}$;

3) $n = 4$, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{c}_{220}$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{c}_{216}$, $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{c}_{215}$, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{c}_{221}$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{c}_{222}$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{c}_{223}$, $\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{c}_{214}$.

22.12. 1) Démontrer qu'un espace vectoriel complexe n-dimensionnel a une structure d'espace vectoriel réel $2n$-dimensionnel si la multiplication d'un vecteur par un nombre n'est définie que pour les nombres réels.

2) On considère, dans l'espace arithmétique complexe bidimensionnel, la multiplication des vecteurs par les seuls nombres réels. Trouver une base de l'espace réel obtenu et calculer la colonne des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{c}_{27}$ dans cette base.

22.13. Démontrer que l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients complexes peut être considéré soit comme un espace vectoriel complexe, soit comme un espace vectoriel réel. Dans les deux cas, trouver:

1) une base et la dimension de l'espace;

2) la colonne des coordonnées du polynôme $1 - 2i + (3 + i)t - 3t^2$ dans la base trouvée (pour $n = 2$).

CHAPITRE IX

APPLICATIONS ET TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

§ 23. Propriétés principales des applications et transformations linéaires

Les notions générales sur les applications sont introduites au § 12. Dans le présent paragraphe, on utilise les notions suivantes: *application linéaire, transformation linéaire, rang et noyau d'une application linéaire, isomorphisme, matrice associée à une application linéaire dans un couple de bases, matrice associée à une transformation linéaire dans une base donnée, somme et produit d'applications linéaires, produit de l'application linéaire par un nombre, transformations linéaires et matrices semblables.*

Soient $\mathscr{L}$, $\widetilde{\mathscr{L}}$ des espaces vectoriels sur un même corps (ils sont tous deux réels ou complexes). L'application $\varphi: \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ est dite *linéaire* si pour tous vecteurs $x, y \in \mathscr{L}$ et tout nombre α on a

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x). \tag{1}$$

Si les espaces $\mathscr{L}$ et $\widetilde{\mathscr{L}}$ coïncident, les conditions (1) définissent une transformation linéaire de $\mathscr{L}$. On utilise de même souvent les termes: *opérateur linéaire de $\mathscr{L}$ dans $\widetilde{\mathscr{L}}$* et *opérateur linéaire dans l'espace $\mathscr{L}$*, surtout pour les opérateurs différentiels et intégraux dans les espaces de fonctions.

L'ensemble $\varphi(\mathscr{L}) = \operatorname{Im}\varphi$ des valeurs de l'application linéaire $\varphi: \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ est un sous-espace vectoriel de $\widetilde{\mathscr{L}}$. Sa dimension est le *rang* de l'application φ et est noté $\operatorname{Rg}\varphi$. On appelle *noyau* de l'application linéaire φ l'ensemble $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathscr{L} \mid \varphi(x) = o\}$. L'application φ est dite *singulière* (*dégénérée*) si $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{o\}$ et régulière dans le cas contraire.

L'application linéaire bijective de l'espace $\mathscr{L}$ sur l'espace $\widetilde{\mathscr{L}}$ s'appelle *isomorphisme* de $\mathscr{L}$ sur $\widetilde{\mathscr{L}}$. S'il existe un isomorphisme de $\mathscr{L}$ sur $\widetilde{\mathscr{L}}$, les espaces $\mathscr{L}$ et $\widetilde{\mathscr{L}}$ sont dits *isomorphes*.

Soient $\varphi: \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ une application linéaire, $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace $\mathscr{L}$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de l'espace $\widetilde{\mathscr{L}}$. On appelle *matrice de l'application linéaire* φ dans le couple de bases $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ la matrice $A = A_\varphi$ dont les colonnes sont les colonnes des coordonnées des vecteurs $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ dans la base $\boldsymbol{f}$. On appelle *matrice de la transformation linéaire* φ dans la base $\boldsymbol{e}$ la matrice de l'application linéaire $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ dans le couple de bases $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$.

Si ξ est la matrice-colonne des coordonnées du vecteur $x \in \mathscr{L}$ dans la base $\boldsymbol{e}$, et η celle de son image $\varphi(x) \in \widetilde{\mathscr{L}}$ dans la base $\boldsymbol{f}$, on a

$$\eta = A\xi. \tag{2}$$

Soient $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ deux bases de l'espace $\mathscr{L}$, $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f}'$ deux bases de l'espace $\widetilde{\mathscr{L}}$, S et T les matrices de passage de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{e}'$ et de $\boldsymbol{f}$ à $\boldsymbol{f}'$ respectivement. Si A et A' sont

les matrices associées à l'application linéaire $\varphi: \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ dans les couples de bases (e, f) et (e', f'), il vient

$$A' = T^{-1}AS. \tag{3}$$

En particulier, si A et A' sont les matrices associées à la transformation linéaire dans les bases respectives e et e', et S la matrice de passage de e à e', on obtient

$$A' = S^{-1}AS. \tag{4}$$

Les matrices A, A' liées par la relation (4) pour une matrice régulière S sont dites *semblables* $(A' \sim A)$.

Les transformations linéaires φ, ψ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ sont dites *semblables* s'il existe une transformation linéaire inversible $\omega: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ telle que

$$\psi = \omega^{-1}\varphi\omega. \tag{5}$$

Notation: $\psi \sim \varphi$.

Soit φ une application linéaire définie par la matrice A dans le couple de bases (e, f). Le noyau de φ est défini dans la base e par le système d'équations $A\xi = o$. L'ensemble des valeurs de φ est l'enveloppe linéaire du système des vecteurs dont les colonnes des coordonnées dans la base f sont les colonnes de la matrice A. Le rang de l'application φ est égal au rang de sa matrice.

L'*application nulle* $: \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ est définie par la formule $o(x) = o$ pour tous les $x \in \mathcal{L}$. Rappelons que la transformation linéaire identique de l'espace $\mathcal{L}$ est noté ι. L'*injection canonique* $\varphi: \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ du sous-espace vectoriel $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ se définit par l'égalité $\varphi(x) = x$ pour $x \in \mathcal{M}$. L'*homothétie* (*traction*, *similitude*) de rapport $\lambda \neq 0$ dans l'espace $\mathcal{L}$ se définit par la formule $\varphi(x) = \lambda x$ $(x \in \mathcal{L})$.

Si $\mathcal{L}$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels non nuls $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$, tout vecteur $x \in \mathcal{L}$ peut être représenté de façon univoque sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \mathcal{L}'$, $x_2 \in \mathcal{L}''$. On appelle *projection* de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$ parallèlement à $\mathcal{L}''$ la transformation π de $\mathcal{L}$ définie par l'égalité $\pi(x_1 + x_2) = x_1$. La projection peut aussi être traitée comme application surjective de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}'$. On appelle *symétrie* de $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathcal{L}'$ parallèlement à $\mathcal{L}''$ la transformation $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ définie par l'égalité $\varphi(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$.

L'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des vecteurs du plan ou de l'espace tridimensionnel, muni du produit scalaire est dénommé, dans la suite, *espace géométrique* (bidimensionnel ou tridimensionnel). On peut y étudier les transformations de projections orthogonale et de symétrie orthogonale. Pour plus de détails sur ces transformations voir introduction au chapitre XII.

On appelle *somme* de deux applications linéaires $\varphi, \psi: \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ l'application $\varphi + \psi$ telle que pour tout $x \in \mathcal{L}$

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Le *produit de l'application* φ *par le nombre* α est défini pour tout $x \in \mathcal{L}$ par l'égalité $(\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$.

Exemples de transformations et d'applications linéaires. Noyau, ensembles des valeurs. Matrices d'applications et de transformations linéaires (problèmes 23.1 à 23.51)

23.1. Soit $x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vecteur de l'espace arithmétique n-dimensionnel. Etudier la linéarité de la transformation φ si :

1) $\varphi(x) = {}^t(x_2, x_1 - x_2)$ $(n = 2)$;
2) $\varphi(x) = {}^t(x_2, x_1x_2)$ $(n = 2)$;

3) $\varphi(x) = {}^t(x_2, x_1 - 3, x_3)$ $(n = 3)$;
4) $\varphi(x) = {}^t(2x_3 + x_1, 2x_3x_1, x_1 - x_2)$ $(n = 3)$;
5) $\varphi(x) = {}^t(0, \ldots, 0)$;
6) $\varphi(x) = {}^t(0, x_1 + 3x_2, x_2^2)$ $(n = 3)$;
7) $\varphi(x) = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$;
8) $\varphi(x) = {}^t(\sin x_1, \cos x_2, x_2)$ $(n = 3)$;
9) $\varphi(x) = {}^t(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$;
10) $\varphi(x) = {}^t(2x_1, 2\,|x_2|, 2x_3)$ $(n = 3)$.

23.2. Démontrer que l'application donnée est linéaire, trouver sa matrice, étudier si cette application est surjective, injective ou isomorphe:

1) l'application nulle;
2) la transformation identique;
3) l'homothétie.

23.3. Soit φ une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathscr{L}$ dans un espace vectoriel $\tilde{\mathscr{L}}$. Démontrer que:

1) $\varphi(o) = o$;
2) le noyau de φ est un sous-espace vectoriel de $\tilde{\mathscr{L}}$;
3) l'image $\varphi(\mathscr{M})$ du sous-espace vectoriel $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{L}$ est un sous-espace de $\tilde{\mathscr{L}}$ et $\dim \varphi(\mathscr{M}) \leqslant \dim \mathscr{M}$;
4) φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi = \{o\}$.

23.4. Soit $\mathscr{M}$ un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$. Montrer que l'injection canonique de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}$ est une application linéaire injective. A quelle condition doit satisfaire $\mathscr{M}$ pour que l'application φ soit un isomorphisme?

23.5. Soit $\mathscr{M}$ un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$. L'application $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ est définie par les égalités: $\varphi(x) = x$ pour $x \in \mathscr{M}$, $\varphi(x) = o$ pour $x \notin \mathscr{M}$. Est-ce que l'application φ est linéaire?

23.6. Soient **x** un vecteur quelconque et **a**, **n** des vecteurs fixés non nuls de l'espace géométrique (bidimensionnel ou tridimensionnel). Vérifier si la transformation définie par la formule suivante est linéaire et trouver sa représentation géométrique:

1) $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$; 2) $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

3) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

4) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

23.7. Vérifier la linéarité et donner une interprétation géométrique de la transformation φ de l'espace géométrique tridimensionnel, qui est définie par la formule suivante (**a**, **u**, **v** étant des vecteurs fixés):

1) $\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ $(|\mathbf{a}| = 1)$;
2) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ $([\mathbf{u}, \mathbf{v}] \neq 0)$.

23.8. Soient **r**, **x** des vecteurs arbitraires et **a**, **n** des vecteurs non nuls de l'espace géométrique tridimensionnel. Exprimer l'image du vecteur **x**, déterminer le noyau, l'ensemble des valeurs et le rang de la transformation linéaire φ si φ est:

1) la projection orthogonale sur le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;
2) la projection orthogonale sur la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;
3) la projection sur le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ parallèlement au vecteur $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;
4) la projection sur la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ parallèlement au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;
5) la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;
6) la symétrie orthogonale par rapport à la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$;
7) la symétrie par rapport au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ parallèlement au vecteur $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;
8) la symétrie par rapport à la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$ parallèlement au plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$.

Dans les problèmes 23.9 à 23.14, les sous-espaces vectoriels de l'espace géométrique tridimensionnel $\mathscr{E}_3$ sont définis par leurs équations dans une base orthonormée.

23.9. Calculer la matrice de la projection orthogonale de $\mathscr{E}_3$ sur le sous-espace $\mathscr{L}$ si $\mathscr{L}$ est:

1) la droite $x = z = 0$;
2) la droite $x = y = z$;
3) le plan $x + y + z = 0$;
4) le plan engendré par les vecteurs $\mathbf{a}$ $(-1, 1, -1)$ et $\mathbf{b}$ $(1, -3, 2)$.

23.10. Calculer la matrice de la projection de $\mathscr{E}_3$ sur le sous-espace $\mathscr{L}$ parallèlement au sous-espace $\mathscr{M}$ si

1) $\mathscr{L}$ est défini par l'équation $x = 0$, et $\mathscr{M}$ par les équations $2x = 2y = -z$;
2) $\mathscr{L}$ est défini par l'équation $x = y$, et $\mathscr{M}$ par le système d'équations $x + y + z = 0$, $2x + y + 4z = 0$;
3) $\mathscr{L}$ est défini par les équations $-20x = 15y = 12z$, et $\mathscr{M}$ par l'équation $2x + 3y - z = 0$;
4) $\mathscr{L}$ est défini par le système d'équations $x - y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, et $\mathscr{M}$ par l'équation $2x + 3y - 4z = 0$.

23.11. On traite les transformations de l'espace $\mathscr{E}_3$ (voir problèmes 23.9 et 23.10) comme applications linéaires surjectives de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{L}$. Calculer la matrice de chacune de ces applications.

23.12. Calculer la matrice de la transformation linéaire φ si φ est une symétrie orthogonale dans l'espace $\mathscr{E}_3$:

1) par rapport au plan $x = 0$;
2) par rapport à la droite $x = 2y = z$;
3) par rapport au plan engendré par les vecteurs $\mathbf{a}$ $(1, 0, -1)$ et $\mathbf{b}$ $(1, 1, -2)$.

23.13. Calculer la matrice de la symétrie dans l'espace $\mathscr{E}_3$:

1) par rapport au plan $x = 0$ parallèlement à la droite $2x = y = -z$;

2) par rapport à la droite $x = z$, $x - y + z = 0$ parallèlement au plan $x + y = 0$.

23.14. Soit $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ une base orthonormée de l'espace géométrique tridimensionnel $\mathscr{E}_3$. Calculer la matrice de la rotation dans $\mathscr{E}_3$:

1) d'angle α autour du vecteur $\mathbf{e}_3$;

2) d'angle $\pi/2$ autour du vecteur $\mathbf{e}_1$;

3) d'angle $2\pi/3$ autour de la droite d'équation $x = y = z$.

23.15. On sait que l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ est la somme directe des sous-espaces non nuls $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$.

1) Démontrer que la projection φ de $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$ est une transformation linéaire. Trouver le noyau et l'ensemble des valeurs de φ. Ecrire la matrice associée à φ dans la base composée des bases des sous-espaces $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}''$.

2) Résoudre le problème en traitant φ comme application surjective de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{L}'$.

23.16. On sait que l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ est la somme directe des sous-espaces non nuls $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$. Démontrer que la symétrie φ par rapport à $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$ est une transformation linéaire de l'espace $\mathscr{L}$. Trouver son noyau et l'ensemble des valeurs. Est-ce que φ est un isomorphisme? Ecrire la matrice de φ dans la base composée des bases des sous-espaces $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$.

23.17. Soit $\varphi\colon \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ une application linéaire, et soit $\mathscr{M} = \varphi(\mathscr{L})$. On considère φ comme application linéaire $\tilde{\varphi}\colon \mathscr{L} \to \mathscr{M}$. Démontrer que:

1) les noyaux des applications φ et $\tilde{\varphi}$ coïncident, ainsi que leurs rangs;

2) $\tilde{\varphi}$ est surjective;

3) φ est injective si et seulement si $\tilde{\varphi}$ est injective;

4) si $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$, les applications φ et $\tilde{\varphi}$ sont toutes deux isomorphes;

5) établir la relation entre les matrices des applications φ et $\tilde{\varphi}$.

23.18. Démontrer que le rang de la matrice d'une application linéaire ne dépend pas du choix du couple de bases dans les espaces vectoriels.

23.19. Démontrer que:

1) le rang de la matrice d'une application linéaire surjective est égal au nombre de ses lignes;

2) le rang de la matrice d'une application linéaire injective est égal au nombre de ses colonnes.

23.20. Soient $\varphi\colon \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ une application linéaire, $\dim \mathscr{L} = n$,

$\dim \tilde{\mathscr{L}} = m$, A la matrice de φ dans un couple de bases, $\operatorname{Rg} A = r$. Démontrer que:

1) $\operatorname{Rg} \varphi = r$; 2) $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r$.

23.21. Démontrer que:

1) l'application réciproque de l'isomorphisme existe et elle est également un isomorphisme;

2) l'application linéaire qui n'est pas un isomorphisme ne possède pas d'application réciproque.

23.22. 1) Quels sont le rang et le noyau de l'application linéaire $\varphi: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ si elle est un isomorphisme?

2) Comment sont liées les matrices A, B d'une application linéaire et de sa réciproque?

23.23. Soient $\varphi: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ une application linéaire et $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$. Démontrer l'équivalence des assertions:

1) φ est un isomorphisme;

2) φ est une injection;

3) φ est une surjection.

Montrer que pour $\dim \mathscr{L} \neq \dim \tilde{\mathscr{L}}$, l'assertion 1) ne découle pas de 2) ou de 3).

23.24. Soient $\varphi: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ une application linéaire et $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$. Démontrer les assertions:

1) Pour que l'équation $\varphi(x) = y$ $(x \in \mathscr{L})$ ait une solution pour tout $y \in \tilde{\mathscr{L}}$ il faut et il suffit que l'équation homogène $\varphi(x) = o$ ne possède que la solution nulle.

2) Si l'équation $\varphi(x) = y$ a une solution pour tous les $y \in \tilde{\mathscr{L}}$, elle possède pour chaque y une solution unique.

3) On admet que l'équation $\varphi(x) = y$ n'a pas de solutions pour tous les $y \in \tilde{\mathscr{L}}$ mais en possède une pour un certain y. Dans ce cas, sa solution n'est pas unique.

23.25. Soit $\mathscr{L}$ un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$:

1) est le noyau d'une transformation linéaire de $\mathscr{L}$;

2) est l'ensemble des valeurs d'une transformation linéaire de $\mathscr{L}$.

23.26. La transformation linéaire d'un espace arithmétique tridimensionnel est définie dans une base canonique par la matrice A. Trouver les images des vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ et donner une interprétation géométrique de la transformation (à l'exception de 3)):

1) $A = A_{261}$, $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(3, 4, 3)$;

2) $A = A_{221}$, $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(1, 2, 4)$;

3) $A = A_{241}$, $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(2, 1, 0)$;

4) $A = A_{262}$, $a_1 = {}^t(0,\ 1,\ 1)$, $a_2 = {}^t(2,\ 2,\ 3+i)$, $a_3 = {}^t(2,\ 2,\ 3-i)$;

5) $A = A_{263}$, $a_1 = {}^t(1,\ 1,\ -1)$, $a_2 = {}^t(1+i,\ 1,\ -i)$, $a_3 = {}^t(1-i,\ 1,\ i)$.

23.27. L'application linéaire d'un espace arithmétique n-dimensionnel dans un espace m-dimensionnel est définie par la matrice A. Calculer les images des vecteurs donnés.

1) $m = 3$, $n = 4$, $A = A_{507}$, $a = {}^t(4,\ -1,\ -1,\ 3)$;
2) $m = 4$, $n = 4$, $A = A_{455}$, $a = {}^t(-1,\ 1,\ 1,\ -1)$;
3) $m = 5$, $n = 4$, $A = A_{522}$, $a = {}^t(-2,\ 1,\ 3,\ -1)$;
4) $m = n$, $A = A_{625}$, $a_1 = {}^t(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$, $a_2 = {}^t(1,\ -1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\ldots$, $a_n = {}^t(1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ -1)$.

23.28. La transformation linéaire d'un espace vectoriel n-dimensionnel $\mathcal{L}$ est définie par la matrice A. Trouver son noyau et l'ensemble des valeurs. Voir si la transformation donnée est un isomorphisme:

1) $n = 2$, $A = A_{30}$; 2) $n = 3$, $A = A_{236}$;
3) $n = 3$, $A = A_{264}$; 4) $n = 4$, $A = A_{465}$;
5) $n = 4$, $A = A_{466}$; 6) $n = 5$, $A = A_{547}$.

23.29. L'application linéaire d'un espace vectoriel n-dimensionnel dans un espace vectoriel m-dimensionnel est définie par la matrice A. Trouver son noyau et l'ensemble de ses valeurs. Voir si l'application donnée est une surjection ou une injection:

1) $m = 3$, $n = 4$, $A = A_{526}$; 2) $m = 4$, $n = 3$, $A = A_{405}$;
3) $m = 4$, $n = 3$, $A = A_{406}$; 4) $m = 2$, $n = 5$, $A = A_{576}$;
5) $m = 5$, $n = 3$, $A = A_{420}$; 6) $m = 3$, $n = 5$, $A = A_{585}$.

23.30. L'application linéaire d'un espace arithmétique n-dimensionnel dans un espace arithmétique m-dimensionnel est définie dans les bases canoniques de ces espaces par la matrice A. Calculer l'image réciproque du vecteur a si:

1) $n = 4$, $m = 3$, $A = A_{513}$, $a = {}^t(-1,\ 0,\ 1)$;
2) $n = 5$, $m = 3$, $A = A_{581}$, $a = {}^t(1,\ 2,\ 1)$;
3) $n = 3$, $m = 5$ $A = A_{421}$, $a = {}^t(4,\ 2,\ 9,\ -20,\ -3)$;
4) $n = 4$, $m = 5$, $A = A_{522}$, $a = {}^t(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ -1)$.

23.31. L'application linéaire d'un espace arithmétique n-dimensionnel dans un espace arithmétique m-dimensionnel est définie par la matrice A. Trouver l'image réciproque du sous-espace $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}_m$ si:

1) $m = 2$, $n = 5$, $A = A_{576}$ et $\mathcal{M}$ est engendré par le vecteur ${}^t(3,\ -1)$;

2) $m = 3$, $n = 4$, $A = A_{517}$ et $\mathcal{M}$ est défini dans la base canonique par le système d'équations $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$;

3) $m = n = 6$, $A = A_{592}$ et $\mathcal{M}$ est défini dans la base canonique par le système d'équations $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$, $-x_2 + 2x_4 - x_6 = 0$, $x_5 = 0$.

23.32. Démontrer que tout espace vectoriel n-dimensionnel est isomorphe à l'espace arithmétique n-dimensionnel sur le même corps

et que, par suite, tous les espaces vectoriels de même dimension (sur un même corps) sont isomorphes.

23.33. Soit $a = {}^t(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Montrer que l'application $f(a) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ est un isomorphisme de l'espace arithmétique $(n+1)$-dimensionnel sur l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

23.34. L'application de l'espace arithmétique réel bidimensionnel dans l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 est définie par la formule $\varphi\left(\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|\right) = \left\| \begin{matrix} x & -y \\ y & x \end{matrix} \right\|$. Démontrer que φ est une injection linéaire. Calculer sa matrice dans le couple des bases canoniques de ces espaces.

23.35. L'application de l'espace arithmétique réel tridimensionnel dans l'espace des matrices d'ordre 2 fait correspondre au vecteur ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ la matrice $\left\| \begin{matrix} x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 \end{matrix} \right\|$. Démontrer que cette application est une injection linéaire. Calculer sa matrice dans le couple de bases canoniques de ces espaces.

23.36. Soit $\mathcal{M}_{(2,2)}$ l'ensemble des matrices complexes d'ordre 2, qui a une structure d'espace vectoriel réel et soit $(E_{11}, iE_{11}, E_{21}, iE_{21}, E_{12}, iE_{12}, E_{22}, iE_{22})$ la base canonique de cet espace (voir problème 22.12). L'application $\varphi: \mathcal{R}_3 \to \mathcal{M}_{(2,2)}$ fait correspondre au vecteur ${}^t(x_1, x_2, x_3)$ la matrice $\left\| \begin{matrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{matrix} \right\|$. Démontrer que l'application φ est linéaire et injective. Trouver sa matrice dans le couple de bases canoniques de ces espaces.

23.37. L'application $\varphi: \mathcal{R}_4 \to \mathcal{M}_{(2,2)}$ (voir problème 23.36) fait correspondre au vecteur ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la matrice $\left\| \begin{matrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{matrix} \right\|$, où $a = x_1 + ix_2$, $\bar{a} = x_1 - ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Démontrer que φ est linéaire et injective, trouver sa matrice dans le couple de bases canoniques de ces espaces.

23.38. Démontrer que l'ensemble donné des matrices carrées est un espace vectoriel réel isomorphe à l'espace arithmétique $\mathcal{R}_3$:

1) l'ensemble de toutes les matrices réelles d'ordre 2 ayant la trace nulle;

2) l'ensemble de toutes les matrices réelles symétriques gauches d'ordre 3;

3) l'ensemble de toutes les matrices complexes de la forme $\left\| \begin{matrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{matrix} \right\|$, où x_1, x_2, x_2 sont des nombres réels.

23.39. Soit $D = \frac{d}{dt}$ l'opération de dérivation qui associe à la fonction $f(t)$ sa dérivée $f'(t)$. Montrer que D est une transformation linéaire de l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle $]a, b[$.

23.40. Soit $\mathcal{P}^{(m)}$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant m$.

1) Vérifier que la dérivation (définie dans le problème 23.39) est une transformation linéaire $D: \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, trouver son noyau et l'ensemble des valeurs. Calculer la matrice de la transformation D :

a) dans la base canonique $(1, t, \ldots, t^m)$;

b) dans la base $(1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^m)$;

c) dans la base $\left(1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}\right)$.

2) En traitant la dérivation comme application linéaire $D: \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m-1)}$, trouver sa matrice dans le couple des bases $\left(1, t, \ldots, \frac{t^m}{m!}\right)$ et $\left(1, t, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right)$.

23.41. Montrer que la dérivation (voir problème 23.39) définit une application linéaire:

1) de l'espace des polynômes pairs de degré $\leqslant 2n$ dans l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes impairs de degré $\leqslant 2n - 1$;

2) de l'espace des polynômes impairs de degré $\leqslant 2n + 1$ dans l'espace $\mathcal{Q}$ des polynômes pairs de degré $\leqslant 2n$.

Trouver le noyau, l'ensemble des valeurs et le rang de l'application. Ecrire sa matrice A dans le couple de bases canoniques de ces espaces.

23.42. Vérifier que les fonctions $e^{\lambda t} p(t)$, où λ est un nombre fixé et $p(t)$ un polynôme de degré $\leqslant n$, constituent un espace vectoriel et que la dérivation est sa transformation linéaire. Calculer la matrice associée à cette transformation dans la base $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}$ $(k = 0, 1, \ldots \ldots, n)$.

23.43. 1) Montrer que la dérivation est une transformation linéaire de l'espace des polynômes trigonométriques $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ d'ordre $\leqslant n$ (voir problème 20.8,4)). Trouver la matrice de la transformation D dans la base canonique $(1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt)$ de cet espace.

2) Démontrer que la dérivation D définit un isomorphisme entre les espaces vectoriels des polynômes trigonométriques impairs $b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \ldots + b_n \sin nt$ et des polynômes trigonométriques pairs $a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots + a_n \cos nt$ (n est un nombre fixé). Calculer les matrices de l'application D et de son inverse dans les bases $(\sin t, \ldots, \sin nt)$ et $(\cos t, \ldots, \cos nt)$.

23.44. Soit $f(t)$ une fonction continue ($t \in \mathbb{R}$). Etudions l'opération d'intégration $I: f(t) \mapsto \int_0^t f(\xi)\, d\xi$.

1) Vérifier que l'intégration définit une application linéaire $I: \mathcal{P}^{(n-1)} \to \mathcal{P}^{(n)}$ ($n \geqslant 1$), trouver son noyau, l'ensemble des valeurs et le rang. Ecrire la matrice de l'application I dans le couple de bases canoniques.

2) On considère l'intégration en tant que transformation linéaire de l'espace $\mathcal{P}$ de tous les polynômes réels. Déterminer son ensemble des valeurs. Est-ce que cette transformation est surjective, injective, un isomorphisme?

3) Soient $\mathcal{M}$ l'espace des polynômes dont le terme constant est nul, $I: \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ l'intégration et $D: \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ la dérivation. Démontrer que chacune de ces applications linéaires est l'inverse de l'autre.

23.45. Soient $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions $f(t)$ continues sur l'intervalle $[-1, 1]$, $\tilde{\mathcal{F}}$ l'espace vectoriel des fonctions $f(t)$ continûment dérivables sur $[-1, 1]$, telles que $f(0) = 0$, et soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ les sous-ensembles des fonctions paires et impaires respectivement dans $\mathcal{F}$.

1) L'intégration I du problème 23.44 ($-1 \leqslant t \leqslant 1$) est traitée comme transformation linéaire de l'espace $\mathcal{F}$. Est-ce que cette transformation est injective, surjective? Est-elle inversible?

2) Démontrer que l'intégration définit un isomorphisme $I: \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$. Trouver son application réciproque I^{-1}.

3) Montrer que l'intégration I définit deux applications linéaires $I_1: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ et $I_2: \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Sont-elles injectives, surjectives, inversibles?

23.46. Soit une transformation linéaire de l'espace de tous les polynômes en t qui fait correspondre à chaque polynôme t^k le polynôme t^{2k} ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Se convaincre que cette transformation est injective mais qu'elle n'est pas surjective. Trouver l'ensemble de ses valeurs.

23.47. Soit $\mathcal{R}_{(m,n)}$ l'espace vectoriel des matrices de type (m, n).

1) Démontrer que la multiplication à gauche des matrices de type (m, n) par une matrice donnée A de type (k, m) définit une application linéaire $\varphi: \mathcal{R}_{(m,n)} \to \mathcal{R}_{(k,n)}$. Calculer la matrice de l'application dans les bases canoniques si $n = 2$, $A = A_{27}$. Trouver le noyau et l'ensemble des valeurs de cette application.

2) Démontrer que la multiplication à droite des matrices de type (m, n) par une matrice donnée B de type (n, k) définit une application $\varphi: \mathcal{R}_{(m,n)} \to \mathcal{R}_{(m,k)}$. Calculer la matrice de l'application φ dans les bases canoniques si $m = 2$, $B = A_{126}$. Trouver le noyau et l'ensemble des valeurs de l'application φ.

23.48. Soient $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de la matrice $X = \| X_1 \ldots X_n \|$ de type (m, n) et soit $Y = \| X_1 \ldots X_{n-1} \|$. L'application $\varphi: \mathscr{R}_{(m,n)} \to \mathscr{R}_{(m,n-1)}$ est définie par la formule $\varphi(X) = Y$.

1) Démontrer que l'application φ est linéaire, trouver son noyau et l'ensemble des valeurs.

2) Calculer la matrice de l'application φ dans les bases canoniques de ces espaces.

3) Montrer que φ est l'une des applications définies dans le problème 23.47.

23.49. Soient $M_1, \ldots, M_n$ les matrices données d'ordre m, et soit $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. L'application $\varphi: \mathscr{R}_n \to \mathscr{R}_{(m,n)}$ est définie par la formule $\varphi(x) = x_1 M_1 + \ldots + x_n M_n$. Démontrer que φ est linéaire. Trouver le noyau, l'ensemble des valeurs, le rang et calculer la matrice A de φ dans le couple de bases canoniques si $n = 4$, $M_1 = A_{12}$, $M_2 = A_{13}$, $M_3 = A_{16}$, $M_4 = A_{20}$.

23.50. La transformation φ de l'espace vectoriel des polynômes réels $p(x, y)$ de deux variables x, y est définie par la formule $\varphi(p(x, y)) = p(x + a, y + b)$, où a, b sont des nombres fixés. Montrer que φ définit une transformation linéaire de l'espace des polynômes de degré $\leqslant 2$ et calculer sa matrice dans la base $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$.

23.51. Montrer que les polynômes homogènes $p(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k$ de degré n engendrent un sous-espace vectoriel $\mathscr{H}^{(n)}$ de l'espace de tous les polynômes de deux variables. La transformation φ est définie par l'une des formules suivantes:

$$1)\ \varphi(p) = x\frac{\partial p}{\partial y}; \quad 2)\ \varphi(p) = y\frac{\partial p}{\partial x}; \quad 3)\ \varphi(p) = x\frac{\partial p}{\partial x} - y\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Démontrer que φ est une transformation linéaire de $\mathscr{H}^{(n)}$ et calculer sa matrice dans la base $(x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n)$. Trouver le noyau et l'ensemble des valeurs de φ.

Matrices des applications et des transformations linéaires dans différentes bases. Matrices semblables (problèmes 23.52 à 23.77)

23.52. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$ et $f_1, \ldots, f_n$ des vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel $\widetilde{\mathscr{L}}$. Démontrer qu'il existe une application linéaire $\varphi: \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$, et une seule, telle que $\varphi(e_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

23.53. 1) Soient $a_1, \ldots, a_k$ des vecteurs linéairement indépendants de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$, et $b_1, \ldots, b_k$ des vecteurs de l'espace $\widetilde{\mathscr{L}}$. Démontrer qu'il existe une application linéaire $\varphi: \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$

telle que $\varphi(a_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Dans quel cas l'application φ est-elle unique?

2) Soient $a_1, \ldots, a_k$ des vecteurs de $\mathscr{L}$ et $b_1, \ldots, b_k$ des vecteurs de $\widetilde{\mathscr{L}}$. Formuler les conditions nécessaires et suffisantes pour que a) il existe une application linéaire $\varphi : \mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ telle que $\varphi(a_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$; b) l'application φ soit unique.

23.54. Soient A une matrice régulière d'ordre n, B une matrice à m lignes et n colonnes. Démontrer qu'il existe une application linéaire, et une seule, de l'espace arithmétique n-dimensionnel dans l'espace arithmétique m-dimensionnel, qui associe aux colonnes de la matrice A les colonnes correspondantes de la matrice B. Trouver la matrice de cette application:

1) dans le couple de bases canoniques des espaces;

2) dans la base de $\mathscr{R}_n$ composée des colonnes de A et la base canonique de $\mathscr{R}_m$;

3) dans la base de $\mathscr{R}_n$ composée des colonnes de A et la base de $\mathscr{R}_m$ composée des colonnes de B (à condition que $m = n$ et que B soit régulière).

23.55. Soient A et B des matrices régulières d'ordre n. Démontrer qu'il existe une transformation linéaire, et une seule, de l'espace arithmétique n-dimensionnel faisant correspondre aux colonnes de la matrice A les colonnes correspondantes de la matrice B. Trouver la matrice de cette transformation:

1) dans la base canonique;

2) dans la base des colonnes de A;

3) dans la base des colonnes de B.

23.56. La transformation linéaire φ de l'espace arithmétique bidimensionnel fait correspondre au vecteur $\boldsymbol{a}_i$ le vecteur $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$. Calculer la matrice de φ dans la base canonique si

1) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(-1, 2)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(2, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(-3, 1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(4, -3)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(2, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(-2, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(4, 4)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(-5, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(-3, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(4, 15)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(0, 1)$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(0, \sqrt{2})$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

23.57. Les colonnes des matrices A, B sont composées des coordonnées des vecteurs a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 dans une base $\boldsymbol{e}$ de l'espace vectoriel tridimensionnel $\mathscr{L}$. Vérifier dans chacun des cas mentionnés ci-dessous qu'il existe une transformation linéaire φ, et une seule, de l'espace $\mathscr{L}$ qui fait correspondre aux vecteurs a_i les vecteurs b_i $(i = 1, 2, 3)$. Calculer la matrice de la transformation φ: a) dans la base $\boldsymbol{e}$, b) dans la base (a_1, a_2, a_3) si:

1) $A = A_{265}$, $B = A_{266}$; 2) $A = A_{268}$, $B = A_{269}$;

3) $A = A_{270}$, $B = A_{271}$; 4) $A = A_{229}$, $B = A_{272}$.

23.58. Montrer qu'il existe une application linéaire unique $\varphi : \mathscr{R}_n \to \mathscr{R}_m$ qui fait correspondre aux colonnes de la matrice A

les colonnes respectives de la matrice B. Calculer la matrice de l'application φ:

1) dans les bases canoniques des espaces $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{R}_m$;

2) dans la base de $\mathcal{R}_n$ composée des colonnes de la matrice A et la base canonique de $\mathcal{R}_m$.

a) $n = 2$, $m = 3$, $A = A_{33}$, $B = A_{140}$;
b) $n = 3$, $m = 2$, $A = A_{276}$, $B = A_{394}$;
c) $n = 2$, $m = 5$, $A = A_{34}$; $B = A_{171}$;
d) $n = 4$, $m = 2$, $A = A_{467}$, $B = A_{505}$;
e) $n = 3$, $m = 4$, $A = A_{227}$, $B = A_{407}$;
f) $n = 4$, $m = 3$, $A = A_{484}$, $B = A_{518}$.

23.59. Existe-t-il une transformation linéaire φ faisant correspondre aux colonnes de la matrice A les colonnes respectives de la matrice B ? Si elle existe, calculer sa matrice dans la base canonique.

1) $A = A_5$, $B = A_{35}$; 2) $A = A_5$, $B = A_{12}$;
3) $A = A_{277}$, $B = A_{278}$; 4) $A = A_{213}$, $B = A_{279}$.

23.60. L'application linéaire $\varphi: \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$ associe aux colonnes de la matrice A les colonnes respectives de la matrice B. Etablir si l'application φ est injective ou surjective. Déterminer la dimension du noyau et le rang de φ. Calculer l'image du vecteur $\boldsymbol{a}$ si:

1) $A = A_{123}$, $B = A_{24}$, $\boldsymbol{a} = {}^t(1, 7, 3)$;
2) $A = A_{392}$, $B = A_{230}$, $\boldsymbol{a} = {}^t(3, 1)$;
3) $A = A_{422}$, $B = A_{201}$, $\boldsymbol{a} = {}^t(4, -4, -3, 12, 2)$;
4) $A = A_{241}$, $B = A_{420}$, $\boldsymbol{a} = {}^t(16, 5, -6)$.

23.61. Montrer qu'il existe une transformation linéaire unique de l'espace arithmétique complexe $\mathcal{C}_n$ faisant correspondre aux colonnes de la matrice donnée A les colonnes respectives de la matrice B. Calculer la matrice de cette transformation dans la base canonique si :

1) $n = 2$, $A = A_{92}$, $B = A_{93}$;
2) $n = 2$, $A = A_{94}$, $B = A_{95}$;
3) $n = 2$, $A = A_{96}$, $B = A_{97}$;
4) $n = 3$, $A = A_{373}$, $B = A_{374}$.

23.62. La transformation linéaire φ est définie dans la base donnée par la matrice A. Les colonnes des coordonnées des nouveaux vecteurs de base forment la matrice S. Calculer la matrice de φ dans la nouvelle base si:

1) $A = A_{36}$, $S = A_{33}$; 2) $A = A_{37}$, $S = A_{16}$;
3) $A = A_{38}$, $S = A_{39}$; 4) $A = A_{40}$, $S = A_{104}$;
5) $A = A_{280}$, $S = A_{203}$; 6) $A = A_{281}$, $S = A_{282}$;
7) $A = A_{283}$, $S = A_{284}$; 8) $A = A_{285}$, $S = A_{265}$;
9) $A = A_{469}$, $S = A_{470}$; 10) $A = A_{471}$, $S = A_{439}$.

23.63. La transformation linéaire de l'espace arithmétique complexe est définie dans la base canonique par la matrice A. La nouvelle base est définie par la matrice de passage S. Calculer la matrice de la transformation dans la nouvelle base:

1) $A = A_{87}$, $S = A_{94}$;
2) $A = A_{79}$, $S = A_{80}$ ($\varepsilon = e^{2\pi i/3}$);
3) $A = A_{263}$, $S = A_{375}$;
4) $A = A_{259}$, $S = A_{363}$ ($\omega = e^{2\pi i/3}$);
5) $A = A_{472}$, $S = A_{473}$; 6) $A = A_{474}$, $S = A_{475}$.

23.64. L'application linéaire de l'espace arithmétique n-dimensionnel dans l'espace arithmétique m-dimensionnel est définie dans les bases canoniques par la matrice A. Les colonnes des nouveaux vecteurs de base $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_m$ composent les matrices S et T respectivement. Calculer la matrice de l'application dans les bases f et g.

1) $n = 3$, $m = 2$, $A = A_{392}$, $S = A_{286}$, $T = A_{42}$;
2) $n = 4$, $m = 2$, $A = A_{502}$, $S = A_{476}$, $T = A_{10}$;
3) $n = 2$, $m = 3$, $A = A_{117}$, $S = A_{9}$, $T = A_{227}$;
4) $n = 3$, $m = 4$, $A = A_{403}$, $S = A_{285}$, $T = A_{495}$.

23.65. Calculer la matrice associée à la transformation linéaire φ de l'ensemble des vecteurs du plan dans une base donnée si φ est:

1) la symétrie plane par rapport à la droite $x + 2y = 0$ parallèlement à la droite $x + 3y = 0$;

2) la projection du plan sur la droite $x + y = 0$ parallèlement à la droite $4x + 5y = 0$;

3) la contraction de rapport $\lambda = 2$ vers la droite $3x - 2y = 0$ parallèlement à la droite $x - y = 0$.

23.66. Calculer la matrice de la transformation linéaire φ de l'espace géométrique tridimensionnel (rapporté à une base orthonormée donnée) en faisant le changement de base approprié, si φ est:

1) la projection sur le plan $3x - y = 0$ parallèlement à la droite $x + z = 0$, $x + y + 2z = 0$;

2) la symétrie dans l'espace par rapport à la droite $x = y = -2z$ parallèlement au plan $x + y + 3z = 0$;

3) la contraction de rapport $\lambda = 2$ vers le plan $x - 2z = 0$ parallèlement à la droite $x = y = z$;

4) la rotation autour de la droite $x = y = -z$ d'angle $\pi/2$;

5) la rotation autour de la droite $x + y = 0$, $y - z = 0$, qui applique le premier des deux plans donnés sur le second.

23.67. Soit D la dérivation dans l'espace des polynômes de degré au plus égal à m. Calculer la matrice de la transformation D si la base est composée des polynômes:

1) $1 + t$, $t + 2t^2$, $3t^2 - 1$ ($m = 2$);
2) $t^3 + 1$, $1 - t$, $1 - t + t^2$, $1 - t + t^2 - t^3$ ($m = 3$);
3) 1, $1+t$, $1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}$, $\ldots$, $1+\frac{t}{1!}+\cdots+\frac{t^m}{m!}$ ($m \geqslant 1$);
4) 1, $1 + t$, $1 + t + t^2$, $\ldots$, $1 + t + \ldots + t^m$ ($m \geqslant 1$);
5) 1, $t - 1$, $t^2 - t$, $\ldots$, $t^m - t^{m-1}$ ($m \geqslant 1$).

23.68. Calculer la matrice de la dérivation dans l'espace des polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$ (voir problème 23.43) si la base est composée des fonctions:

1) 1, $\cos t - \sin t$, $\cos t + \sin t$, . . ., $\cos nt - \sin nt$, $\cos nt + \sin nt$ $(n \geqslant 1)$;

2) 1, $1 + \cos t$, . . ., $1 + \cos t + \ldots + \cos nt$, $\sin t$, ..., $\sin t + \ldots + \sin nt$;

3) $2 \cos^2 t$, $2 \sin^2 t$, $\sin t + \cos t$, $\sin t - \cos t$, $(\sin t + \cos t)^2$ $(n = 2)$.

23.69. Comment varie la matrice associée à l'application linéaire dans le couple des bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_m)$ si:

1) on permute les vecteurs e_i et e_j;

2) on permute les vecteurs f_k et f_l;

5) on multiplie le vecteur e_i par le nombre $\lambda \neq 0$, et f_k par $\mu \neq 0$;

4) on remplace le vecteur e_i par $e_i + e_j$, et le vecteur f_k par $f_k - f_l$ $(i \neq j,\ k \neq l)$?

23.70. Comment varie la matrice associée à la transformation linéaire dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ si:

1) on permute les vecteurs e_i et e_j;

2) on multiplie le vecteur e_i par le nombre $\lambda \neq 0$;

3) on remplace le vecteur e_i par $e_i + e_j$;

4) on passe à la base $(e_n, e_1, \ldots, e_{n-1})$;

5) on passe à la base $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$?

23.71. 1) Soient A et B des matrices associées à l'application linéaire dans deux couples de bases. Démontrer que B peut être obtenue de A par les transformations élémentaires des lignes et des colonnes.

2) Soient A et B des matrices associées à la transformation linéaire dans deux bases. Démontrer que B peut être obtenue de A par les transformations élémentaires, compatibles l'une avec l'autre, des lignes et des colonnes.

23.72. Soit $\varphi: \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ une application linéaire. Démontrer que:

1) si un vecteur de base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ appartient au noyau de φ, la colonne correspondante de la matrice de l'application est nulle;

2) si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de l'espace $\mathcal{L}$ et que les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ $(r \leqslant n)$ constituent une base du noyau de φ, les vecteurs $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$ forment une base de $\varphi(\mathcal{L})$.

23.73. Démontrer que pour toute application linéaire φ il existe deux bases dans lesquelles la matrice de φ est de la forme la plus simple

$$\begin{Vmatrix} E & O \\ O & O \end{Vmatrix}.$$

Quel est l'ordre de la matrice E?

23.74. L'application linéaire φ est définie dans les bases canoniques des espaces arithmétiques $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{R}_m$ par la matrice A. Trouver deux bases dans lesquelles la matrice de φ est de la forme la plus simple (voir problème 23.73):

1) $A = A_{12}$; 2) $A = A_{32}$; 3) $A = A_{253}$;

4) $A = A_{288}$; 5) $A = A_{576}$; 6) $A = A_{420}$.

23.75. Soit A la matrice de la transformation linéaire dans une certaine base. Démontrer que la matrice obtenue de A par symétrie centrale est une matrice de la même transformation dans une autre base.

23.76. Démontrer que les matrices suivantes sont semblables:

1) A_{77} et son inverse; 2) A_{259} et A_{260}.

23.77. Trouver toutes les matrices semblables à elles-mêmes.

Opérations sur les applications et les transformations linéaires (problèmes 23.78 à 23.104)

23.78. Soient $\varphi: \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$, $\psi: \mathcal{R}_l \to \mathcal{R}_k$ deux applications linéaires.

1) Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes imposées à m, n, k, l pour que les produits $\varphi\psi$ et $\psi\varphi$ existent?

2) Soit $\chi = \varphi\psi$. Montrer que χ est une application linéaire. Quelle relation existe-t-il entre les matrices des applications φ, ψ, χ?

23.79. Soient φ, ψ, χ des applications linéaires d'espaces vectoriels arithmétiques, et soit α un nombre. Quelles sont les conditions imposées aux dimensions des espaces pour que chacune des égalités suivantes soit vérifiée?

1) $\varphi(\psi\chi) = (\varphi\psi)\chi$; 2) $\varphi(\psi + \chi) = \varphi\psi + \varphi\chi$;

3) $(\varphi + \psi)\chi = \varphi\chi + \psi\chi$; 4) $\alpha(\varphi + \psi) = \alpha\varphi + \alpha\psi$.

Montrer que les matrices des applications proposées vérifient les égalités analogues.

23.80. Démontrer que toute application linéaire peut être représentée sous la forme du produit d'applications linéaires surjective et injective.

23.81. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, où $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ sont des sous-espaces non nuls de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$. Montrer que la transformation identique est la somme $\iota = \pi_1 + \pi_2$, où π_1 (resp. π_2) est la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}'$ (resp. $\mathcal{L}''$) parallèlement à $\mathcal{L}''$ (resp. $\mathcal{L}'$).

23.82. Les colonnes des coordonnées des vecteurs a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 engendrent respectivement les matrices A_{289}, A_{229}, A_{285}. La transformation linéaire φ fait correspondre aux vecteurs a_1, a_2, a_3 les vecteurs b_1, b_2, b_3, et la transformation linéaire ψ fait correspondre aux vecteurs b_1, b_2, b_3 les vecteurs c_1, c_2, c_3 respectivement. Trouver la matrice de la transformation $\psi\varphi$:

1) dans la base initiale;

2) dans la base (a_1, a_2, a_3);
3) dans la base (b_1, b_2, b_3).

23.83. Soient φ, ψ deux transformations linéaires de l'espace arithmétique bidimensionnel, φ étant définie par la matrice A_{44} dans la base canonique, et ψ par la matrice A_{107} dans la base engendrée par les colonnes de la matrice A_{45}. Calculer la matrice de la transformation :

1) $\varphi^2 - 6\varphi + 9\iota$; 2) $\psi^2 + 4\psi + 4\iota$;
3) $\varphi^2 - \psi^2$ dans la base canonique;
4) $4\varphi\psi^{-1}$ dans la base engendrée par les colonnes de la matrice A_{45};
5) $(\varphi + \psi)^4$ dans la base engendrée par les colonnes ${}^t(1, 2)$, ${}^t(0, -1)$.

23.84. Soit $\mathcal{P}^{(n)}$ l'espace des polynômes de degré au plus égal à n $(n \geqslant 1)$ avec des coefficients réels. Définissons les applications

$$\varphi: \mathcal{P}^{(n-1)} \to \mathcal{P}^{(n)}, \quad \psi: \mathcal{P}^{(n)} \to \mathcal{P}^{(n-1)}$$

par les formules

$$\varphi(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1}) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_{n-1}t,$$
$$\psi(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 + \ldots + a_n t^{n-1}.$$

Se convaincre de la linéarité des applications et montrer que $\psi\varphi$ est une transformation identique, tandis que $\varphi\psi$ ne l'est pas.

23.85. Soient $\mathcal{L}$ un espace vectoriel de fonctions, e sa base, D la dérivation. Trouver la matrice de la transformation D^k $(k = 1, 2, \ldots)$ si :

1) $\mathcal{L}$ est l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$, $e = (1, t, \ldots, t^n/n!)$;
2) $\mathcal{L}$ est l'espace des polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$ (voir problème 23.43), $e = (1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt)$.

23.86. Soient dans l'espace de tous les polynômes en t, deux transformations linéaires : la multiplication τ, définissant le produit par t, et la dérivation $\mathrm{D} = \frac{d}{dt}$.

1) Trouver la transformation : a) $\tau\mathrm{D}$; b) $\mathrm{D}\tau$; c) le commutateur $[\mathrm{D}, \tau] = \mathrm{D}\tau - \tau\mathrm{D}$.
2) Démontrer l'égalité $\mathrm{D}^m\tau - \tau\mathrm{D}^m = m\mathrm{D}^{m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots; \mathrm{D}^0 = \iota)$.

23.87. Démontrer que le commutateur $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ de deux transformations linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie ne peut pas être une transformation identique (cf. problème 15.130).

23.88. Démontrer que les matrices des transformations linéaires semblables sont elles-mêmes semblables.

23.89. Démontrer que la relation de similitude entre les transformations linéaires est une relation d'équivalence (c'est-à-dire que $\varphi \sim \varphi$; $\varphi \sim \psi$ entraîne $\psi \sim \varphi$; $\varphi \sim \psi$ et $\psi \sim \chi$ entraînent $\varphi \sim \chi$).

23.90. Soient φ, ψ des transformations linéaires de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$. Démontrer que:

1) si ψ est semblable à φ, il existe pour toute base e de l'espace $\mathscr{L}$ une base e' telle que la matrice de ψ dans e' coïncide avec la matrice de φ dans e;

2) φ et ψ sont semblables s'il existe dans $\mathscr{L}$ deux bases e et e' telles que la matrice de φ dans e coïncide avec la matrice de ψ dans e'.

23.91. Supposons que les transformations linéaires φ et ψ sont semblables. Montrer qu'il en est de même des transformations:

1) $p(\varphi) = a_0\iota + a_1\varphi + \ldots + a_n\varphi^n$ et $p(\psi)$, où $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ est un polynôme arbitraire;

2) φ^{-1} et ψ^{-1} si φ et ψ sont inversibles.

23.92. Soient φ et ψ des transformations linéaires d'un espace vectoriel, dont au moins une est régulière.

1) Démontrer que les transformations $\varphi\psi$ et $\psi\varphi$ sont semblables.

2) Formuler et démontrer la variante matricielle de cette assertion.

23.93. Démontrer que l'application linéaire de rang r peut être représentée sous la forme d'une somme de r applications linéaires de rang 1, mais ne peut pas être représentée sous la forme de somme d'un nombre inférieur de telles applications (cf. problème 16.33).

23.94. Soient φ, ψ deux applications linéaires de $\mathscr{L}$ dans $\widetilde{\mathscr{L}}$. Démontrer que $\mathrm{Rg}\,(\varphi + \psi) \leqslant \mathrm{Rg}\,\varphi + \mathrm{Rg}\,\psi$ (cf. problème 16.34,6)).

23.95. Soient $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{M}$, $\psi: \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ des applications linéaires et soit $\dim \mathscr{M} = m$. Démontrer que:

1) $\mathrm{Rg}\,\varphi + \mathrm{Rg}\,\psi - m \leqslant \mathrm{Rg}\,(\psi\varphi) \leqslant \min\,(\mathrm{Rg}\,\varphi,\ \mathrm{Rg}\,\psi)$ (double inégalité de Sylvester);

2) $\dim \mathrm{Ker}\,(\psi\varphi) \geqslant \dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\psi$;

3) $\mathrm{Rg}\,\varphi + \mathrm{Rg}\,\psi \leqslant m$ si $\psi\varphi = o$ (rappelons que o désigne l'application nulle).

23.96. Soit $\varphi: \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ une transformation linéaire. Démontrer que pour tout k tel que $\mathrm{Rg}\,\varphi \leqslant k \leqslant n = \dim \mathscr{L}$ il existe une transformation linéaire ψ telle que $\psi\varphi = o$ et $\mathrm{Rg}\,\varphi + \mathrm{Rg}\,\psi = k$.

23.97. Démontrer que quelles que soient les transformations linéaires commutables φ et ψ, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Ker}\,\psi \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi\psi)$.

23.98. Soit φ une transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel, telle que $\varphi^2 = \iota$. Démontrer que:

1) $\mathrm{Rg}\,(\varphi + \iota) + \mathrm{Rg}\,(\varphi - \iota) = n$;

2) $\dim \mathrm{Ker}\,(\varphi + \iota) + \dim \mathrm{Ker}\,(\varphi - \iota) = n$.

23.99. Soient φ, ψ, χ des applications linéaires telles que le produit $\varphi\psi\chi$ existe. Démontrer que

$$\mathrm{Rg}\,(\varphi\psi) + \mathrm{Rg}\,(\psi\chi) \leqslant \mathrm{Rg}\,\varphi + \mathrm{Rg}\,(\varphi\psi\chi).$$

23.100. Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ des espaces vectoriels réels et $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ l'ensemble de toutes les applications linéaires $\varphi: \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$.

1) Démontrer que $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ est un espace vectoriel pour les opérations d'addition de deux applications linéaires et de multiplication d'une application par un nombre.

2) Soient $\dim \mathcal{P} = n$, $\dim \mathcal{Q} = m$. Construire une base de l'espace $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ et déterminer sa dimension.

3) Montrer que dans les conditions du point 2) l'espace $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{R}_{(m,n)}$ des matrices réelles à m lignes et n colonnes.

23.101. L'ensemble donné d'applications linéaires est-il un sous-espace vectoriel de $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ (voir problème 23.100):

1) l'ensemble de toutes les applications de rang $k \geqslant 1$;

2) l'ensemble de toutes les applications de rang au plus égal à $k \geqslant 1$;

3) l'ensemble de toutes les applications dont les noyaux contiennent un sous-espace fixé de $\mathcal{P}$;

4) l'ensemble de toutes les applications injectives;

5) l'ensemble de toutes les applications surjectives;

6) l'ensemble de toutes les applications dont les ensembles des valeurs sont contenus dans le sous-espace fixé de $\mathcal{Q}$?

23.102. Soit e une base d'un espace vectoriel $\mathcal{L}$. Démontrer que l'ensemble donné de transformations linéaires de $\mathcal{L}$ est un groupe pour la multiplication des transformations:

1) l'ensemble de toutes les transformations régulières;

2) l'ensemble de toutes les transformations de déterminant 1;

3) l'ensemble de toutes les transformations régulières dont les matrices sont triangulaires supérieures dans la base e;

4) l'ensemble de toutes les transformations régulières définies dans la base e par des matrices diagonales;

5) l'ensembles des homothéties $\lambda\iota$, où λ est un nombre différent de zéro;

6) l'ensemble de toutes les transformations définies dans la base e par des matrices de permutation.

23.103. On donne la base e d'un espace vectoriel $\mathcal{L}$. Est-ce que l'ensemble donné de transformations linéaires de $\mathcal{L}$ est un groupe pour la multiplication:

1) l'ensemble de toutes les transformations linéaires;

2) l'ensemble de toutes les transformations dont les matrices sont diagonales dans la base e;

3) l'ensemble de toutes les transformations régulières définies dans la base e par des matrices entières, c'est-à-dire par les matrices $\| a_{ij} \|$, où a_{ij} sont des nombres entiers;

4) l'ensemble de toutes les transformations dont les matrices sont entières dans la base e et possèdent des déterminants égaux à 1 ou —1;

5) l'ensemble de toutes les transformations dont les matrices ont le déterminant donné d;

6) l'ensemble de toutes les transformations régulières définies dans la base e par des matrices dont chaque ligne et chaque colonne contiennent un élément non nul et un seul?

23.104. On utilise en technique un réflecteur à coins. C'est un trièdre dont les faces sont des miroirs perpendiculaires deux à deux. Démontrer que le rayon de lumière qui part d'un point intérieur à ce trièdre est renvoyé dans le sens opposé après être réfléchi par les trois faces.

§ 24. Sous-espaces invariants, vecteurs propres et valeurs propres des transformations linéaires

On utilise dans ce paragraphe les notions: *sous-espace invariant, restriction de la transformation linéaire au sous-espace invariant, valeur propre, vecteur propre* et *sous-espace propre de la transformation linéaire, polynôme caractéristique* et *nombre caractéristique de la matrice de la transformation linéaire, transformation linéaire diagonalisable.*

Le sous-espace $\mathcal{M}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ est dit *invariant par la transformation linéaire* φ si tout $x \in \mathcal{M}$ vérifie la relation $\varphi(x) \in \mathcal{M}$. On appelle *restriction* de la transformation φ au sous-espace invariant $\mathcal{M}$ la transformation $\varphi_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ définie par l'égalité $\varphi_{\mathcal{M}}(x) = \varphi(x)$ pour $x \in \mathcal{M}$.

Le vecteur non nul $x \in \mathcal{L}$ est appelé *vecteur propre de la transformation linéaire* φ, *associé à la valeur propre* λ si $\varphi(x) = \lambda x$. L'enveloppe linéaire de tous les vecteurs propres associés à une même valeur propre λ s'appelle *sous-espace propre* de la transformation linéaire φ correspondant à cette valeur propre et se note $\mathcal{L}_\lambda$.

Indiquons la méthode de recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la transformation linéaire définie par sa matrice. Soit $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ la transformation linéaire et soit une base de $\mathcal{L}$ dans laquelle A est la matrice de φ, et ξ est la matrice colonne des coordonnées du vecteur propre associé à la valeur propre λ. Dans ce cas, ξ est solution du système d'équations linéaires

$$(A - \lambda E)\,\xi = o. \tag{1}$$

Pour qu'il existe une solution non nulle du système (1), il faut que

$$\det (A - \lambda E) = 0. \tag{2}$$

On dit que l'équation (2) est l'*équation caractéristique de la matrice A* et ses racines les *nombres caractéristiques.* Dans un espace vectoriel complexe, tous les nombres caractéristiques de la matrice d'une transformation linéaire sont ses valeurs propres, tandis que dans l'espace réel, ce sont les seuls nombres caractéristiques réels.

Le premier membre de l'équation (2) est un polynôme en λ de degré $n = \dim \mathcal{L}$:

$$\det (A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{tr} A\,(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A. \tag{3}$$

Ce polynôme est appelé *polynôme caractéristique de la matrice A*. Si A est la matrice de la transformation linéaire, son polynôme caractéristique ne varie pas avec le changement de base, et par suite, ne varient pas les coefficients de l'équation (2), en particulier la trace et le déterminant de la matrice A, ainsi que les nombres caractéristiques. D'où la raison d'appeler *polynôme caractéristique, nombres caractéristiques, déterminant* et *trace de la transformation linéaire* les objets correspondants de la matrice associée à la transformation dans une base quelconque.

Les vecteurs propres d'une transformation linéaire définie géométriquement ou par une formule explicite peuvent parfois être obtenus directement sans le calcul de sa matrice.

La résolution du *problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres* d'une transformation linéaire φ comprend : a) le calcul des racines de son polynôme caractéristique ; b) en cas d'espace réel, la sélection des racines réelles car elles seules sont les valeurs propres ; c) la recherche d'un système maximal de vecteurs propres linéairement indépendants de la transformation φ, qui se compose de bases des sous-espaces propres $\mathcal{L}_\lambda$ pour chaque valeur propre λ.

La matrice de la transformation linéaire φ est diagonale dans une base si et seulement si tous les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de φ. Dans ce cas, la diagonale de la matrice se compose des valeurs propres correspondantes. La transformation linéaire de l'espace $\mathcal{L}$ est dite *diagonalisable* (ou *de structure simple*) s'il existe une base de $\mathcal{L}$ dans laquelle sa matrice est diagonale. La matrice semblable à la matrice diagonale est dite diagonalisable (ou de structure simple). La propriété d'une matrice d'être diagonalisable dépend du corps sur lequel est défini l'espace $\mathcal{L}$. Une matrice réelle ayant des nombres caractéristiques complexes n'est pas diagonalisable en tant que matrice de la transformation linéaire dans un espace réel, mais elle l'est sur le corps des nombres complexes.

Réduire la transformation linéaire (ou *sa matrice*) *à la forme diagonale* c'est obtenir une base formée par des vecteurs propres de cette transformation et écrire la matrice de la transformation dans cette base.

On appelle *bloc de Jordan d'ordre n à élément diagonal* λ la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{Vmatrix} = A_{612}.$$

Vecteurs propres et valeurs propres (problèmes 24.1 à 24.65)

24.1. Démontrer que tous les vecteurs propres de la transformation linéaire, associés à une même valeur propre, forment avec le vecteur nul un ensemble qui coïncide avec le sous-espace propre.

24.2. Démontrer que :

1) le noyau de la transformation linéaire coïncide avec le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle ;

2) si λ_0 est une valeur propre de la transformation φ, Ker $(\varphi - \lambda_0\iota)$ est le sous-espace propre de φ associé à cette valeur propre.

24.3. Soient A une matrice et λ une valeur propre de la transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel. Quelle est la dimension du sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ si le rang de la matrice $A - \lambda E$ vaut r?

24.4. Quelle est la forme de la matrice d'une transformation linéaire si les k premiers vecteurs de base sont ses vecteurs propres ?

24.5. Démontrer que la dimension du sous-espace propre correspondant à la racine donnée du polynôme caractéristique ne dépasse pas la multiplicité de cette racine.

24.6. Soient x, y des vecteurs propres de la transformation linéaire, associés aux valeurs propres distinctes et soient α et β des nombres différents de zéro. Démontrer que le vecteur $\alpha x + \beta y$ n'est pas un vecteur propre.

24.7. Démontrer que la transformation linéaire non nulle pour laquelle tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres est une homothétie.

24.8. Démontrer que les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes deux à deux de la transformation linéaire sont linéairement indépendants.

24.9. Démontrer que la matrice de la transformation linéaire est diagonale dans une base si et seulement si tous les vecteurs de cette base sont propres.

24.10. Démontrer que la transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel est diagonalisable si elle a n valeurs propres distinctes.

24.11. Soit φ une transformation linéaire d'un espace vectoriel $\mathcal{L}$ de dimension finie. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

1) φ est diagonalisable;

2) il existe dans $\mathcal{L}$ une base formée de vecteurs propres de la transformation φ;

3) la réunion des bases des sous-espaces propres est une base de $\mathcal{L}$;

4) la multiplicité de chaque racine λ de l'équation caractéristique est égale à la dimension du sous-espace propre $\mathcal{L}_\lambda$;

5) $\mathcal{L}$ est la somme directe des sous-espaces propres.

24.12. Démontrer que:

1) dans un espace vectoriel complexe, chaque nombre caractéristique de la matrice d'une transformation linéaire est une valeur propre, de sorte que toute transformation linéaire possède au moins un vecteur propre;

2) dans un espace vectoriel réel, chaque nombre caractéristique réel est une valeur propre.

24.13. Démontrer que toute transformation linéaire d'un espace vectoriel réel de dimension impaire (par exemple tridimensionnel) possède au moins un vecteur propre.

24.14. 1) Démontrer que le polynôme caractéristique, le déterminant et la trace de la matrice d'une transformation linéaire ne dépendent pas du choix de la base.

2) Trouver les expressions des coefficients du polynôme caractéristique, en particulier les expressions de la trace et du déterminant de la matrice d'ordre n, par l'intermédiaire des nombres caractéristiques.

24.15. Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de chacune des transformations suivantes:

1) transformation nulle; 2) transformation identique; 3) homothétie.

24.16. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation linéaire définie dans une base de l'espace vectoriel n-dimensionnel par la matrice $A_{612} = J_n(\lambda)$.

24.17. On sait que la transformation linéaire est définie dans une base par une matrice triangulaire supérieure ou inférieure à éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Trouver toutes les valeurs propres de cette transformation.

24.18. Soit $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$, où $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ sont des sous-espaces non nuls. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de la transformation linéaire φ; démontrer que φ a une base formée des vecteurs propres et indiquer la forme diagonale de sa matrice si φ est:

1) la projection sur $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$;

2) la symétrie par rapport à $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$.

24.19. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres, réduire à la forme diagonale les matrices des transformations linéaires définies dans le problème 23.65.

24.20. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres, réduire à la forme diagonale la matrice de la transformation linéaire définie dans le problème:

1) 23.9,1); 2) 23.9,2); 3) 23.9,3); 4) 23.9,4); 5) 23.10,1); 6) 23.10,2); 7) 23.10,3); 8) 23.10,4); 9) 23.12,1); 10) 23.12,2); 11) 23.12,3); 12) 23.13,1); 13) 23.13,2).

24.21. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation linéaire définie dans le problème;

1) 23.14,1); 2) 23.14,2); 3) 23.14,3); 4) 23.66,1); 5) 23.66,2); 6) 23.66,3); 7) 23.66,4); 8) 23.66,5). Peut-on construire une base à partir des vecteurs propres de la transformation ?

24.22. 1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation linéaire φ définie par la matrice

$$A = {}^t(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) \neq O.$$

2) Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation φ soit diagonalisable.

3) Etablir si les transformations définies par les matrices suivantes sont diagonalisables: a) A_{213}; b) A_{222}.

24.23. Soient k, m, n des entiers naturels, $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. Donner un exemple de la transformation linéaire d'un espace vectoriel n-dimensionnel pour laquelle le nombre donné λ est une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique, et le sous-espace propre qui lui correspond est de dimension k.

24.24. Soit φ une transformation linéaire de l'espace vectoriel complexe tridimensionnel, qui, dans une base, possède une matrice

réelle dont l'un au moins des nombres caractéristique n'est pas réel. Démontrer que φ est diagonalisable.

24.25. Soit x un vecteur propre de la transformation linéaire, associé à la valeur propre λ et soit $p(t)$ un polynôme. Démontrer que x est un vecteur propre de la transformation $p(\varphi)$ et qu'il est associé à la valeur propre $p(\lambda)$.

24.26. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les nombres caractéristiques de la transformation linéaire φ d'un espace vectoriel n-dimensionnel. A quoi sont égaux les nombres caractéristiques (compte tenu de leur multiplicité) de la transformation:

1) (s) φ^2; 2) (s) φ^m (m est un entier naturel);

3) φ^{-1} (à condition que φ soit inversible);

4) $p(\varphi)$, où $p(t)$ est un polynôme arbitraire (à condition que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soient distincts)?

24.27. On sait que les polynômes caractéristiques des matrices carrées A et B possèdent des racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ respectivement. Trouver les nombres caractéristiques du produit kroneckerien $A \otimes B$ des matrices A, B.

24.28. On suppose que la transformation linéaire φ d'un espace vectoriel $\mathscr{L}$ est diagonalisable. Démontrer les assertions:

1) Im φ est l'enveloppe linéaire de tous les vecteurs propres associées aux valeurs propres non nulles;

2) $\mathscr{L} = \text{Im}\,\varphi \oplus \text{Ker}\,\varphi$.

24.29. Donner un exemple de la transformation linéaire φ de l'espace $\mathscr{R}_n$ pour laquelle $\mathscr{R}_n \neq \text{Im}\,\varphi \oplus \text{Ker}\,\varphi$.

24.30. La transformation linéaire d'un espace vectoriel réel n-dimensionnel est définie par sa matrice. Calculer les valeurs propres et trouver un système maximal libre de vecteurs propres de la transformation. Si le système trouvé est une base, écrire dans cette dernière la matrice de la transformation et donner une interprétation géométrique de celle-ci.

$n = 2$:

1) A_{46}; 2) A_{14}; 3) A_{36}; 4) A_{47}; 5) A_{48};
6) A_{13}; 7) A_{12}; 8) A_5; 9) A_{30}; A_{49};

$n = 3$:

11) A_{261}; 12) A_{243}; 13) A_{290}; 14) A_{291}; 15) A_{292};
16) A_{293}; 17) A_{294}; 18) A_{295}; 19) A_{221}; 20) A_{267};
21) A_{296}; 22) A_{297}; 23) A_{298}; 24) A_{273}; 25) A_{235};
26) A_{230}; 27) A_{237}; 28) A_{299}; 29) A_{287}; 30) A_{283};

$n = 4$:

31) A_{477}; 32) A_{479}; 33) A_{480}; 34) A_{481}; 35) A_{482};
36) A_{449}; 37) A_{483}; 38) A_{484}; 39) A_{485}; 40) A_{469}.

24.31. La transformation linéaire d'un espace vectoriel complexe n-dimensionnel est définie par sa matrice. Trouver une base formée des vecteurs propres et écrire la matrice de la transformation dans cette base.

$n = 2$:
1) A_{20}; 2) A_{50}; 3) A_{82}; 4) A_{79} ($\varepsilon = e^{2\pi i/3}$);
5) A_{94}; 6) A_{77}; 7) A_{78} ($\varepsilon = e^{2\pi i/3}$); 8) A_{87};
$n = 3$:
9) A_{239}; 10) A_{262}; 11) A_{263}; 12) A_{300}; 13) A_{301};
14) A_{260}; 15) A_{363} ($\omega = e^{2\pi i/3}$); 16) A_{376}; 17) A_{377};
$n = 4$:
18) A_{432}; 19) A_{447}; 20) A_{486}; 21) A_{472}.

24.32. Trouver les valeurs propres et un système maximal libre de vecteurs propres de la transformation linéaire définie par sa matrice. Expliquer pourquoi la transformation n'est pas diagonalisable.
1) A_{51}; 2) A_{52}; 3) A_{286}; 4) A_{303}; 5) A_{289};
6) A_{236}; 7) A_{457}; 8) A_{487}; 9) A_{548}.

24.33. Déterminer les nombres caractéristiques de la transformation linéaire définie par sa matrice. Etablir si la transformation est diagonalisable: a) dans l'espace réel, b) dans l'espace complexe. Si elle l'est, trouver une base formée de vecteurs propres et écrire dans cette dernière la matrice de la transformation; si elle ne l'est pas, en expliquer la cause.
1) A_{45}; 2) A_{77}; 3) A_{259}; 4) A_{44}; 5) A_{253};
6) A_{98}; 7) A_{436}; 8) A_{430}; 9) A_{478}; 10) A_{474}.

24.34. Résoudre le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres et écrire la forme diagonale de la matrice d'une transformation linéaire définie dans la base canonique de l'espace arithmétique réel n-dimensionnel:
1) A_{604}; 2) A_{621} ($n = 2m$); 3) A_{625}; 4) A_{627};
5) A_{640}; 6) A_{639}; 7) A_{634}; 8) A_{620};
9) A_{606} ($\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 2$; $m = [(n+1)/2]$);
10) A_{606} ($\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$; $m = [(n+1)/2]$);
même question lorsque l'espace arithmétique n-dimensionnel est complexe:
11) A_{605} ($\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = -1$; $m = [(n+1)/2]$);
12) A_{614}; 13) A_{635}.

24.35. Calculer les nombres caractéristiques de la matrice:
1) A_{490}; 2) A_{491}; 3) A_{492}; 4) A_{549}; 5) A_{550};
6) A_{638}; 7) A_{643}; 8) A_{649}; 9) A_{645} (n est impair).

24.36. Calculer:

1) $2^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1}$; 2) $\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1}$;

3) $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k^2}$, où $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $n = 2m+1$;

4) $\prod\limits_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\varepsilon^k - \varepsilon^j)$, où $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $n = 2m+1$.

24.37. 1) Une des matrices A_{287}, A_{289} est semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$. Laquelle ? Confirmer la réponse sans recourir aux vecteurs propres et aux nombres caractéristiques.

2) La matrice $D = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$ est semblable à l'une des matrices A_{230}, A_{264}. Etablir à laquelle sans recourir aux valeurs propres et aux vecteurs propres.

3) Des deux matrices A_{304}, A_{305} l'une est semblable à la matrice $D_1 = \mathrm{diag}(1, -1, 0)$ et l'autre à la matrice $D_2 = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$. Etablir laquelle précisément sans recourir aux valeurs propres et aux vecteurs propres.

24.38. 1) La matrice A_{283} est semblable à l'une des matrices $-E$, $J_3(-1)$, $\mathrm{diag}(-1, J_2(-1))$. A laquelle précisément ?

2) Une des matrices A_{457}, A_{458}, A_{485} est semblable à la matrice $J_4(0)$. Laquelle précisément ?

Résoudre les problèmes 24.39 *à* 24.41 *comme des problèmes aux vecteurs propres et aux valeurs propres.*

24.39. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables (de rapport de similitude λ). Si les longueurs des côtés du triangle ABC sont a, b, c, celles des côtés respectifs du triangle $A'B'C'$ sont $3a + b + c$, $a + 3b + c$, $a + b + 3c$. Démontrer que les triangles sont équilatéraux et trouver λ.

24.40. La somme des entiers naturels distincts n_1, n_2, n_3, n_4 vaut 18. Après les avoir augmenté de λ fois, on a obtenu les nombres $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, $n_1 + n_2 - n_3 - n_4$, $n_1 - n_2 + n_3 - n_4$, $n_1 - 2n_2 - n_3 + 3n_4$. Calculer n_1, n_2, n_3, n_4, λ.

24.41. La suite $\{x_n\}$ est définie par la formule de récurrence: $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{1}{3} x_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $x_0 = a$, $x_1 = b$. Démontrer que la suite converge et trouver sa limite.

24.42. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres (les fonctions propres) de la dérivation D considérée comme transformation linéaire de chacun des espaces vectoriels suivants de fonctions réelles (n est un entier naturel fixé):

1) l'espace de tous les polynômes de degré $\leqslant n$;

2) l'espace de tous les polynômes trigonométriques de la forme $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;

3) l'enveloppe linéaire des fonctions $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres distincts deux à deux.

4) l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $e^{\lambda_0 t} p(t)$, où $p(t)$ est un polynôme quelconque de degré $\leqslant n$, λ_0 un nombre fixé ($\lambda_0 \neq 0$).

24.43. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation D^2 dans les espaces de fonctions du problème 24.42.

24.44. Vérifier que les fonctions de la forme $y = e^t p(t)$, où $p(t)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$, engendrent un espace vectoriel $\mathcal{L}$. S'assurer que φ est une transformation linéaire de $\mathcal{L}$ et résoudre pour φ le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres:

1) $\varphi(y) = y'' - 2y' + y$, c'est-à-dire $\varphi = D^2 - 2D + \iota$;
2) $\varphi = D^3 - 2D^2$;
3) $\varphi = D^3 - 3D^2 + 3D + \iota$.

24.45. Vérifier que les fonctions de la forme $y = e^{-t}(a \cos t + b \sin t)$ engendrent un espace vectoriel $\mathcal{M}$ et que $\varphi = p(D)$, où $p(t)$ est le polynôme donné et D la dérivation, est une transformation linéaire de $\mathcal{M}$. Résoudre pour φ le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres si:

1) $p(t) = (t+1)^2$; 2) $p(t) = t^2 - 1$.

24.46. Dans l'enveloppe linéaire des fonctions $\cos 2t$, $\sin 2t$, $t \cos 2t$, $t \sin 2t$, on définit la transformation linéaire $\varphi = p(D)$, où $p(t)$ est un polynôme, D la dérivation. Résoudre pour φ le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres si:

1) $p(t) = t^2 + 4$; 2) $p(t) = t^4 + 8t^2$.

24.47. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation linéaire φ de l'espace des polynômes réels $p(t)$ de degré $\leqslant 2$, si:

1) $\varphi(p) = tp'$; 2) $\varphi(p) = (tp)'$; 3) $\varphi(p) = t^2p'' - tp' + 2p$.

24.48. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation de dérivation dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite numérique entière.

24.49. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $y(t)$ indéfiniment dérivables sur $[0, \pi]$ et telles que $y(0) = y(\pi) = 0$.

1) Vérifier que $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel.

2) Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de la transformation linéaire φ de $\mathcal{L}$ définie par la formule $\varphi(y) = y''$.

24.50. Soient A, B des matrices carrées. Démontrer que si la matrice $\begin{Vmatrix} A & C \\ O & B \end{Vmatrix}$ est diagonalisable, il en est de même de A et B. Montrer sur un exemple que l'assertion réciproque est fausse.

24.51. Fixons le polynôme réel $p_0(t)$ de degré m $(m \geqslant 1)$. La division euclidienne par $p_0(t)$ permet de représenter univoquement tout polynôme $p(t)$ sous la forme

$$p(t) = q(t)\, p_0(t) + r(t) \tag{4}$$

(le degré du reste $r(t)$ est inférieur à celui de $p_0(t)$). La transformation φ de l'espace $\mathcal{P}$ de tous les polynômes réels est définie par la formule $\varphi(p(t)) = r(t)$.

1) Montrer que la transformation φ est linéaire et que $\varphi^2 = \varphi$.

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation φ.

3) Démontrer que la formule (4) définit la décomposition de l'espace $\mathcal{P}$ en somme directe des sous-espaces propres.

24.52. Soit φ une transformation dans l'espace des polynômes de degré $\leqslant 3$ qui à tout polynôme $p(t)$ fait correspondre le reste de sa division par $p_0(t)$ (voir problème 24.51). Trouver une base composée de vecteurs propres et écrire la matrice de la transformation φ dans cette base si:

1) $p_0(t) = t$; 2) $p_0(t) = t^2 + 1$; 3) $p_0(t) = (t - 1)^3$.

24.53. Dans l'espace $\mathcal{R}_{(n,n)}$ des matrices carrées d'ordre n, on considère l'opération de transposition τ: $A \mapsto {}^tA$. Vérifier que τ est une transformation linéaire et que $\tau^2 = \iota$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation τ. Décomposer l'espace $\mathcal{R}_{(n,n)}$ en somme directe des sous-espaces propres de la transformation τ.

24.54. L'ensemble des matrices complexes d'ordre n est étudié comme espace vectoriel réel $\mathcal{M}$ de dimension $2n^2$.

1) Vérifier que l'opération η: $A \mapsto A^* = {}^t\overline{A}$ est une transformation linéaire réelle de l'espace $\mathcal{M}$ et que $\eta^2 = \iota$.

2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation η.

3) Montrer que η n'est pas une transformation linéaire de l'espace complexe $\mathcal{C}_{(n,n)}$.

24.55. Soit A une matrice d'ordre 2. La formule $\varphi(X) = AX$ définit une transformation linéaire de l'espace des matrices d'ordre 2 (problème 23.47). Trouver les valeurs propres et un système maximal libre de vecteurs propres de la transformation φ. Dans le cas où ce système est une base, écrire dans cette dernière la matrice de φ.

1) $A = A_{46}$; 2) $A = A_{52}$;

3) $A = A_{50}$ (dans l'espace des matrices complexes).

24.56. Résoudre le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres pour la transformation $\varphi(X) = XB$ de l'espace des matrices d'ordre 2 si:

1) $B = A_{36}$; 2) $B = A_{51}$ (l'espace est réel);

3) $B = A_{45}$ (l'espace est complexe).

24.57. La transformation de l'espace des matrices d'ordre 2 est définie par la formule $\varphi(X) = AX - XA$, où A est une matrice donnée.

1) Montrer que la transformation φ est linéaire et écrire sa matrice dans la base canonique.

2) Résoudre pour la transformation φ le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres, si:

a) $A = A_{106}$; b) $A = A_{22}$ (l'espace est réel);

c) $A = A_{20}$ (l'espace est complexe).

24.58. Soit A une matrice régulière d'ordre 2. Montrer que la formule $\varphi(X) = A^{-1}XA$ définit une transformation linéaire de

l'espace des matrices d'ordre 2. Résoudre pour la transformation φ le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres si:

1) $A = A_{22}$; 2) $A = A_{13}$.

24.59. Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de la transformation de translation dans l'espace des polynômes de deux variables, qui a été définie dans le problème 23.50, si:

1) $a = 1$, $b = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$.

24.60. Résoudre le problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres pour les transformations linéaires de l'espace des polynômes homogènes de degré n à deux variables, qui ont été définies dans le problème 23.51.

24.61. Soit A une matrice d'ordre 2 et soit $(x^*, y^*) = (x, y)A$. On définit la transformation φ de l'espace des polynômes $p(x, y)$ de degré $\leqslant n$ par la formule $\varphi(p(x, y)) = p(x^*, y^*)$. Montrer que φ est une transformation linéaire. Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de φ si $n = 2$ et

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad 3)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

24.62. Soit $\mathcal{K}(x, y) = g_0(y) + xg_1(y) + x^2g_2(y)$, où $g_0(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que la transformation φ définie par la formule

$$\varphi(p(x)) = \int_{-1}^{1} \mathcal{K}(x, y)\, p(y)\, dy \tag{5}$$

est une transformation linéaire de l'espace des polynômes $p(x)$ de degré $\leqslant 2$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation φ si:

1) $\mathcal{K}(x, y) = 3x^2y + 5xy^2$;

2) $\mathcal{K}(x, y) = y^2 + 2x(y - 1) + (1 - 3y^2)x^2$.

24.63. Montrer que la formule

$$\varphi(f(x)) = \int_{0}^{\pi} \mathcal{K}(x, y)\, f(y)\, dy$$

définit une transformation linéaire φ de l'espace des polynômes trigonométriques de la forme:

1) $a \cos x + b \sin x$ si $\mathcal{K}(x, y) = \sin(x + y)$;

2) $a + b \cos 2x + c \sin 2x$ si $\mathcal{K}(x, y) = \cos^2(x - y)$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la transformation φ.

24.64. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ dans l'espace des polynômes $p(x, y)$ à coefficients réels.

25.65. Soient φ, ψ deux transformations semblables d'un espace vectoriel $\mathscr{L}$ (voir formule (5) de l'introduction au § 23). Démontrer que:

1) les polynômes caractéristiques des transformations φ et ψ coïncident;

2) si x est un vecteur propre de φ, il en est de même du vecteur $\omega^{-1}(x)$ pour ψ, les deux vecteurs étant associés à une même valeur propre;

3) s'il existe dans $\mathscr{L}$ une base dans laquelle la matrice de la transformation φ est diagonale (triangulaire), il en existe aussi une pour ψ.

4) Montrer sur un exemple que la coïncidence des polynômes caractéristiques de deux transformations linéaires n'entraîne pas la similitude de ces transformations.

Sous-espaces invariants. Transformations commutables (problèmes 24.66 à 24.112)

24.66. Démontrer que 1) le noyau et 2) l'ensemble des valeurs d'une transformation linéaire sont des sous-espaces invariants.

24.67. Démontrer que le sous-espace propre d'une transformation linéaire est invariant.

24.68. Soient φ une transformation linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ un sous-espace de $\mathscr{L}$ invariant par φ, et $p(t)$ un polynôme. Démontrer que le sous-espace donné de $\mathscr{L}$ est invariant par φ:

1) $\varphi(\mathscr{M})$; 2) $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ (si φ est inversible);

3) $\varphi^m(\mathscr{M})$ ($m \geqslant 1$); 4) $\operatorname{Ker} p(\varphi)$; 5) $p(\varphi)(\mathscr{M})$.

24.69. Démontrer que 1) la somme de deux (plus généralement d'une famille finie) et 2) l'intersection de deux (plus généralement d'une famille quelconque) sous-espaces invariants d'une transformation linéaire sont des sous-espaces invariants.

24.70. Soit φ une transformation linéaire de l'espace vectoriel. Démontrer que tout sous-espace contenant $\operatorname{Im} \varphi$ est invariant.

24.71. Démontrer que si la transformation linéaire φ est régulière, φ et φ^{-1} possèdent les mêmes sous-espaces invariants.

24.72. Quelle est la forme de la matrice de la transformation linéaire d'un espace vectoriel n-dimensionnel si:

1) les k premiers vecteurs de base;

2) les $n - k$ derniers vecteurs de base forment une base du sous-espace invariant?

24.73. 1) On sait qu'un espace vectoriel est la somme directe de deux sous-espaces invariants par une transformation linéaire. Démontrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de cette transformation est de la forme $\begin{Vmatrix} A & O \\ O & B \end{Vmatrix}$, où A, B sont des matrices carrées.

2) Formuler et démontrer l'assertion réciproque.

24.74. Démontrer que:

1) le polynôme caractéristique de la transformation linéaire est divisible par le polynôme caractéristique de sa restriction au sous-espace invariant;

2) si toutes les racines du polynôme caractéristique de la transformation linéaire φ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ appartiennent au corps sur lequel $\mathcal{L}$ est défini, tout sous-espace de $\mathcal{L}$ invariant par φ contient un vecteur propre de cette transformation;

3) si l'espace vectoriel est la somme directe des sous-espaces invariants par la transformation linéaire φ, le polynôme caractéristique de φ est égal au produit des polynômes caractéristiques des restrictions de φ à ces sous-espaces invariants.

24.75. Trouver tous les sous-espaces invariants par homothétie de l'espace vectoriel.

24.76. Trouver les sous-espaces invariants par une rotation d'angle α autour de l'origine des coordonnées.

24.77. Trouver les sous-espaces de l'espace géométrique tridimensionnel, qui sont invariants par une rotation d'angle α autour de la droite $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq 0)$.

24.78. On sait qu'une transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel possède n valeurs propres distinctes deux à deux. Trouver tous les sous-espaces invariants et calculer leur nombre.

24.79. Soit φ une transformation linéaire diagonalisable de l'espace vectoriel n-dimensionnel $\mathcal{L}$. Trouver tous les sous-espaces de $\mathcal{L}$ invariants par φ.

24.80. On sait que la transformation linéaire φ d'un espace vectoriel $\mathcal{L}$ est définie dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par la matrice:

1) $J_2(\lambda)$ $(n = 2)$; 2) $J_3(\lambda)$ $(n = 3)$; 3) $J_n(\lambda)$. Trouver tous les sous-espaces de $\mathcal{L}$ invariants par φ.

24.81. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Trouver les sous-espaces de $\mathcal{L}$ qui soient invariants par la transformation linéaire donnée:

1) la projection sur $\mathcal{L}_1$ parallèlement à $\mathcal{L}_2$;

2) la symétrie par rapport à $\mathcal{L}_1$ parallèlement à $\mathcal{L}_2$.

24.82. 1) Montrer que toute projection φ d'un espace vectoriel possède la propriété: $\varphi^2 = \varphi$.

2) Démontrer qu'une transformation linéaire non nulle $\varphi \neq \iota$ telle que $\varphi^2 = \varphi$ est la projection sur Im φ parallèlement à Ker φ.

24.83. 1) Montrer que la symétrie d'un espace vectoriel par rapport à l'un quelconque de ses sous-espaces possède la propriété $\varphi^2 = \iota$.

2) Démontrer qu'une transformation linéaire $\varphi \neq \pm\iota$ telle que $\varphi^2 = \iota$ est la symétrie par rapport au sous-espace des vecteurs immobiles parallèlement à un sous-espace supplémentaire.

24.84. Soit λ une valeur propre de la transformation linéaire φ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$. Démontrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ contenant Im $(\varphi - \lambda\iota)$ est invariant par φ.

24.85. Démontrer les assertions:

1) Si la transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel possède un vecteur propre, il existe un sous-espace invariant $(n-1)$-dimensionnel associé à ce vecteur.

2) Soient A la matrice associée à la transformation linéaire φ dans une base $\boldsymbol{e}$, λ une valeur propre, et $\boldsymbol{a}$ la matrice-ligne définie par l'équation $\boldsymbol{a}(A-\lambda E)=\boldsymbol{o}$. On affirme alors que l'équation $\boldsymbol{a}\xi=0$ définit dans la base $\boldsymbol{e}$ un sous-espace $(n-1)$-dimensionnel invariant par φ. Est-ce que l'assertion réciproque est vraie?

3) Tout sous-espace k-dimensionnel invariant par la transformation linéaire de l'espace complexe contient un sous-espace invariant $(k-1)$-dimensionnel.

24.86. La transformation linéaire φ de l'espace arithmétique $\mathcal{R}_n$ est définie dans la base canonique $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ par la matrice A. Trouver les sous-espaces invariants par φ si:

1) $A=A_{36}$; 2) $A=A_{51}$; 3) $A=A_{306}$; 4) $A=A_{287}$;
5) $A=A_{604}$; 6) $A=A_{621}$ $(n=2m)$; 7) $A=A_{625}$.

24.87. Trouver les sous-espaces $(n-1)$-dimensionnels de $\mathcal{R}_n$, invariants par la transformation linéaire définie par sa matrice A si:

1) $A=A_{241}$; 2) $A=A_{222}$; 3) $A=A_{238}$; 4) $A=A_{262}$;
5) $A=A_{487}$; 6) $A=A_{447}$; 7) $A=A_{549}$; 8) $A=A_{640}$.

24.88. 1) Soient $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ le nombre caractéristique de la matrice réelle A d'ordre n, $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$ le vecteur propre de la transformation linéaire de $\mathcal{C}_n$ définie par A ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ étant des vecteurs réels). Démontrer que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ forment une base du sous-espace bidimensionnel invariant par la transformation linéaire de $\mathcal{R}_n$ définie par la matrice A.

2) Trouver les sous-espaces bidimensionnels de $\mathcal{L}$ qui sont invariants par la transformation linéaire de $\mathcal{R}_n$ définie dans la base canonique par la matrice A_{474}.

24.89. 1) Soit φ la transformation linéaire de l'espace vectoriel n-dimensionnel $\mathcal{L}$ dont les sous-espaces invariants et distincts deux à deux forment une suite croissante $\mathcal{L}_1\subset\mathcal{L}_2\subset\ldots\subset\mathcal{L}_n=\mathcal{L}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}$ dans laquelle la matrice de la transformation φ est triangulaire supérieure.

2) On sait que la transformation φ de l'espace $\mathcal{L}$ est définie dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par une matrice triangulaire supérieure. Démontrer que les sous-espaces $\mathcal{L}_k=\mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_k\}$ $(k=1, \ldots, n)$ sont invariants par φ et que $\mathcal{L}_k\subset\mathcal{L}_{k+1}$ $(k=1, \ldots, n-1)$.

24.90. La transformation linéaire de l'espace $\mathcal{R}_3$ est définie par la matrice A dans une base canonique. Réduire la matrice de la transformation à la forme triangulaire si

1) $A=A_{241}$; 2) $A=A_{222}$;
3) $A=A_{283}$; 4) $A=A_{263}$.

24.91. 1) Soit $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{L}_r = \mathscr{L}$ une suite croissante de sous-espaces de l'espace vectoriel $\mathscr{L}$, invariants par la transformation linéaire φ, et soit $\dim \mathscr{L}_i = n_i$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_r = n)$. Admettons que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est choisie de telle sorte que les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n_i}$ appartiennent à $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Montrer que la matrice A_φ est une matrice triangulaire supérieure de matrices, dont les blocs diagonaux sont de type (k_i, k_i), où $k_i = n_i - n_{i-1}$ $(i = 2, \ldots, r)$, $k_1 = n_1$.

2) On sait que la transformation linéaire est définie dans une base par une matrice triangulaire supérieure de matrices. Démontrer qu'il existe une suite croissante de sous-espaces invariants par cette transformation. Exprimer leurs dimensions par les ordres des blocs diagonaux.

24.92. Soient $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables $f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, n un entier positif, et λ un nombre réel fixé. Démontrer que l'ensemble donné des fonctions est un sous-espace de $\mathscr{L}$ invariant par dérivation D :

1) l'ensemble de tous les polynômes;

2) l'ensemble de tous les polynômes de degré $\leqslant n$;

3) l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$;

4) l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des fonctions $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$;

5) l'ensemble de toutes les fonctions $f(t) = e^{\lambda t} p(t)$, où $p(t)$ est un polynôme quelconque;

6) l'ensemble de toutes les fonctions $f(t) = e^{\lambda t} T(t)$, où $T(t)$ est un polynôme trigonométrique quelconque;

7) l'ensemble de toutes les fonctions $p(t) \cos t$, $p(t) \sin t$, où $p(t)$ est un polynôme quelconque.

24.93. Soit $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel des fonctions du problème 24.92, et soit $\varphi = D^2$. Démontrer que l'ensemble proposé des fonctions est un sous-espace de $\mathscr{L}$ invariant par la transformation φ. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la restriction de φ à ce sous-espace :

1) l'ensemble de tous les polynômes pairs de degré $\leqslant 2n$;

2) l'ensemble de tous les polynômes impairs de degré $\leqslant 2n + 1$;

3) l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques pairs $a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt$;

4) l'ensemble de tous les polynômes trigonométrique impairs $b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin nt$.

24.94. Trouver tous les sous-espaces de l'espace vectoriel des polynômes, qui soient invariants par la dérivation.

24.95. Montrer qu'une transformation linéaire de l'espace des polynômes, qui fait correspondre à tout polynôme son produit par t n'a ni vecteurs propres, ni sous-espaces invariants (sauf le sous-espace nul et l'espace lui-même).

24.96. Trouver les sous-espaces invariants par la transformation φ (voir problème 24.51) dans l'espace de tous les polynômes.

24.97. Soit φ la transformation linéaire de l'espace des polynômes $p(x, y)$ qu'on a définie dans le problème 24.61. Démontrer que les sous-espaces des polynômes homogènes de degré n ($n = 0, 1, \ldots$) sont invariants par φ.

24.98. Trouver les sous-espaces de l'espace vectoriel des matrices d'ordre n qui soient invariants par transposition.

24.99. Soit dans l'espace $\mathscr{R}_{(n,n)}$ la transformation $\varphi(X) = AX$, où A est une matrice fixée. Démontrer que $\mathscr{R}_{(n,n)}$ est la somme directe de n sous-espaces invariants par φ.

24.100. Soit dans l'espace $\mathscr{R}_{(n,n)}$ la transformation $\varphi(X) = AX - XA$, où A est une matrice fixée. Démontrer que l'ensemble donné est un sous-espace invariant par φ:

1) l'ensemble de toutes les matrices dont la trace est nulle;

2) l'ensemble de toutes les matrices triangulaires supérieures (si A est une matrice triangulaire supérieure);

3) l'ensemble de toutes les matrices symétriques gauches (si A est une matrice symétrique gauche);

4) l'ensemble de toutes les matrices diagonales (si A est une matrice diagonale).

24.101. La transformation linéaire φ de l'espace $\mathscr{R}_{(n,n)}$ des matrices réelles d'ordre n est définie par la formule $\varphi(X) = {}^tAX + XA$, où A est une matrice fixée.

1) Démontrer que les matrices symétriques gauches forment un sous-espace de $\mathscr{R}_{(n,n)}$ invariant par φ;

2) exprimer les nombres caractéristiques de la restriction de φ à ce sous-espace par les nombres caractéristiques de la matrice A.

24.102. La transformation linéaire de l'espace des matrices d'ordre n est définie par la formule $\varphi(X) = A^{-1}XA$, où A est une matrice régulière. Démontrer que l'ensemble donné de matrices est un sous-espace invariant par φ:

1) l'ensemble de toutes les matrices ayant la trace nulle;

2) l'ensemble de toutes les matrices scalaires;

3) l'ensemble de toutes les matrices triangulaires supérieures (si A est une matrice triangulaire supérieure);

4) l'ensemble de toutes les matrices symétriques (si A est une matrice orthogonale);

5) l'ensemble de toutes les matrices symétriques gauches (si A est une matrice orthogonale);

6) l'ensemble de toutes les matrices hermitiennes (si A est une matrice unitaire et si l'ensemble est traité comme sous-espace de l'espace réel $2n^2$-dimensionnel des matrices complexes d'ordre n);

7) l'ensemble de toutes les matrices antihermitiennes (si la matrice A et l'ensemble donné sont les mêmes que dans 6)).

24.103. La transformation linéaire φ de l'espace complexe des matrices d'ordre 2 est définie par la formule $\varphi(X) = A^{-1}XA$, où $A = A_{77}$, α étant un nombre réel. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la restriction de φ au sous-espace:

1) des matrices symétriques;

2) des matrices de trace nulle.

24.104. Soient φ et ψ deux transformations linéaires commutables. Démontrer que:

1) le noyau et l'ensemble des valeurs de l'une de ces transformations sont invariants par l'autre;

2) les sous-espaces propres de φ sont invariants par ψ.

24.105. Soit λ_0 une valeur propre de la transformation linéaire φ.

1) Démontrer que les sous-espaces $\mathscr{L}_k = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0\iota)^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sont invariants par φ.

2) Montrer que $\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}_{k+1}$. Est-ce que l'inclusion peut être stricte?

24.106. Démontrer que:

1) deux transformations linéaires commutables quelconques d'un espace complexe possèdent un vecteur propre commun;

2) cette assertion est encore vraie pour un espace réel si tous les nombres caractéristiques des transformations sont réels.

24.107. Soit φ une transformation linéaire singulière d'un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que la transformation $\varphi + \varepsilon\iota$ est régulière pour tous les $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

24.108. Démontrer que les polynômes caractéristiques des transformations $\varphi\psi$ et $\psi\varphi$ coïncident quelles que soient les transformations linéaires φ et ψ de l'espace vectoriel.

24.109. Soient φ, ψ deux transformations linéaires commutables d'un espace n-dimensionnel. Etant donné que φ admet n valeurs propres distinctes, démontrer que tous les vecteurs propres de φ sont encore les vecteurs propres de ψ, de sorte que les matrices de φ et ψ sont diagonales dans une même base.

24.110. On sait que la transformation linéaire φ est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres est invariant par la transformation linéaire ψ. Démontrer que $\varphi\psi = \psi\varphi$.

24.111. Soit $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$, où $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ sont des sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathscr{L}$.

1) Soient φ la projection de $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$, et ψ une transformation linéaire dans $\mathscr{L}$. Démontrer que $\varphi\psi = \psi\varphi$ si et seulement si les sous-espaces $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}''$ sont invariants par ψ.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour la symétrie dans $\mathscr{L}$ par rapport à $\mathscr{L}'$ parallèlement à $\mathscr{L}''$.

24.112. Soient φ, ψ des transformations linéaires d'un espace vectoriel n-dimensionnel. Etant donné que $\varphi^n = o$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$ et $[\psi, \varphi] = \psi\varphi - \varphi\psi = \varphi$, démontrer que ψ possède n valeurs propres $\lambda, \lambda - 1, \ldots, \lambda - (n - 1)$, où λ est un nombre.

CHAPITRE X

ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS

Dans ce chapitre on utilise les notions fondamentales suivantes: *opération de multiplication scalaire euclidienne* dans un espace vectoriel réel, *opération de multiplication scalaire hermitienne* dans un espace vectoriel complexe, *produit scalaire* de deux vecteurs; *espace vectoriel muni du produit scalaire, espace euclidien, espace unitaire (hermitien), produit scalaire standard* dans l'espace arithmétique n-dimensionnel réel $\mathcal{R}_n$ (complexe $\mathcal{C}_n$) et dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{R}_{(m,n)}$ (complexe $\mathcal{C}_{(m,n)}$) des matrices réelles (complexes) de type (m, n), *matrice de Gram d'un système de vecteurs, matrice de Gram d'une base, longueur (norme) d'un vecteur, normalisation d'un vecteur, angle de deux vecteurs, orthogonalité de deux vecteurs, système orthogonal de vecteurs, système orthonormé de vecteurs, base orthonormée, orthogonalisation, systèmes biorthogonaux de vecteurs, bases biorthogonales, vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel, supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection orthogonale d'un vecteur sur le sous-espace et composante orthogonale du vecteur par rapport au sous-espace, deux sous-espaces orthogonaux, somme orthogonale de sous-espaces, angle du vecteur et du sous-espace, angle de deux sous-espaces.*

La *multiplication scalaire euclidienne* dans un espace vectoriel réel $\mathcal{L}$ fait correspondre à tout couple de vecteurs x et y de $\mathcal{L}$ un nombre réel, noté (x, y), tel que soient remplies les conditions suivantes: quels que soient les vecteurs x, y et z de $\mathcal{L}$ et les nombres réels α et β,

1) $(x, y) = (y, x)$ (*symétrie*);
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ (*linéarité* par rapport au premier argument, le second étant fixé);
3) $(x, x) > 0$ pour $x \neq o$ (*positivité stricte*).

La *multiplication scalaire hermitienne* dans un espace vectoriel complexe $\mathcal{L}$ fait correspondre à tout couple de vecteurs x et y de $\mathcal{L}$ un nombre complexe, noté (x, y), tel que soient remplies les conditions suivantes: quels que soient les vecteurs x, y et z de $\mathcal{L}$ et les nombres complexes α et β,

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (*symétrie hermitienne*)
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$;
3) $(x, x) > 0$ pour $x \neq o$.

Le nombre (x, y) s'appelle *produit scalaire euclidien* ou, respectivement, hermitien et sera par la suite appelé, tout simplement, produit scalaire de deux vecteurs x et y.

On appelle *espace euclidien* (resp. *hermitien*) un espace vectoriel réel (complexe) muni de l'opération de multiplication scalaire décrite plus haut.

En parlant d'un *espace vectoriel muni du produit scalaire*, on aura toujours en vue l'un de ces deux epaces. Les espaces euclidiens et hermitiens seront en général désignés par la lettre $\mathcal{E}$. Dans la suite, on utilise les *espaces euclidiens et hermitiens « standard »* suivants:

espace euclidien $\mathcal{R}_n$, c'est-à-dire l'espace arithmétique n-dimensionnel réel $\mathcal{R}_n$ muni du produit scalaire standard des vecteurs $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

espace hermitien $\mathscr{C}_n$, c'est-à-dire l'espace arithmétique n-dimensionnel complexe $\mathscr{C}_n$ muni du produit scalaire standard

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j,$$

espace euclidien $\mathscr{R}_{(m, n)}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel réel $\mathscr{R}_{(m, n)}$ des matrices réelles de type (m, n) muni du *produit scalaire standard des matrices* $X = \| x_{jk} \|$ et $Y = \| y_{jk} \|$

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} y_{jk},$$

espace hermitien $\mathscr{C}_{(m, n)}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel complexe $\mathscr{C}_{(m, n)}$ des matrices complexes de type (m, n) muni du produit scalaire

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \bar{y}_{jk}.$$

Dans un espace euclidien, le produit scalaire s'exprime au moyen des coordonnées des vecteurs par la formule

$$(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} g_{ij} \xi_i \eta_j = {}^t\xi \Gamma \eta,$$

et dans un espace hermitien par la formule

$$(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} g_{ij} \xi_i \bar{\eta}_j = {}^t\xi \Gamma \bar{\eta}$$

où $\xi = {}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\eta = {}^t(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sont les matrices-colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, et $\Gamma = \| g_{ij} \|$ est la matrice de Gram associée à la base e.

Soient Γ et Γ' les matrices de Gram associées respectivement aux bases e et e', et soit S la matrice de passage de e à e', de sorte que $e' = eS$. On a alors

$$\Gamma' = {}^tS \Gamma S \tag{1}$$

si l'espace est euclidien, et

$$\Gamma' = {}^tS \Gamma \bar{S} \tag{2}$$

si l'espace est hermitien.

On appelle *longueur* (ou *norme*) du vecteur x d'un espace vectoriel muni du produit scalaire le nombre $| x | = \sqrt{(x, x)}$. Le vecteur x est dit *normé* si $| x | = 1$. Tous vecteurs x et y de $\mathscr{E}$ vérifient l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$| (x, y) | \leqslant | x | \cdot | y |.$$

L'*angle de deux vecteurs* x et y d'un espace euclidien est défini par la formule

$$\varphi = \operatorname{Arc} \cos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Deux vecteurs x et y sont dits *orthogonaux* si $(x, y) = 0$. Le système des vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ est dit *orthogonal* si $(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, m$. Le système orthogonal de vecteurs normés est dit *orthonormé*.

Le *processus d'orthogonalisation* permet de construire le système orthogonal des vecteurs non nuls $g_1, \ldots, g_m$ à partir d'un système arbitraire des vecteurs.

$f_1, \ldots, f_m$ linéairement indépendents. Pour le faire, on pose tout d'abord $g_1 = f_1$. Les vecteurs $g_2, \ldots, g_m$ s'obtiennent à partir des formules de récurrence

$$g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{kj} g_j.$$

Les coefficients λ_{kj} se définissent univoquement par la condition d'orthogonalité du vecteur g_k aux vecteurs $g_1, \ldots, g_{k-1}$:

$$\lambda_{kj} = \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)}.$$

En normant les vecteurs $g_1, \ldots, g_m$, on aboutit à une base orthonormée de l'enveloppe linéaire du système initial des vecteurs $f_1, \ldots, f_m$.

Deux systèmes de vecteurs $\{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$ dans un espace euclidien ou hermitien n-dimensionnel (pour $m \leqslant n$) sont dits *biorthogonaux* si

$$(e_i, f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j \\ 1 \text{ pour } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, m).$$

On dit que le vecteur x est *orthogonal au sous-espace vectoriel* s'il est orthogonal à tout vecteur de ce sous-espace. On appelle *supplémentaire orthogonal* $\mathscr{L}^{\perp}$ du sous-espace vectoriel $\mathscr{L}$ d'un espace euclidien (ou hermitien) $\mathscr{E}$ l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathscr{E}$ orthogonaux à $\mathscr{L}$. Le supplémentaire orthogonal $\mathscr{L}^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel. Si un vecteur x est représenté sous la forme d'une somme $x = x' + x''$, où $x' \in \mathscr{L}$, $x'' \in \mathscr{L}^{\perp}$, on dit que le vecteur x' est le *projeté orthogonal* du vecteur x sur $\mathscr{L}$, et que le vecteur x'' est la *composante orthogonale du vecteur* x par rapport à $\mathscr{L}$.

Les sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ de l'espace euclidien (ou hermitien) sont dits *orthogonaux* si chacun des vecteurs de $\mathscr{L}_1$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{L}_2$.

La somme d'une famille finie de sous-espaces orthogonaux deux à deux $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_k$ est dénommée *somme orthogonale* et est notée

$$\mathscr{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{L}_k.$$

On appelle *angle du vecteur non nul x et du sous-espace vectoriel non nul $\mathscr{L}$* de l'espace euclidien la borne inférieure des valeurs des angles que le vecteur x forme avec les vecteurs non nuls de $\mathscr{L}$.

L'*angle des sous-espaces vectoriels non nuls* $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ de l'espace euclidien se définit de la façon suivante. Soit $\mathscr{D}$ l'intersection $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ et soient $\mathscr{L}_1^0$ et $\mathscr{L}_2^0$ les supplémentaires orthogonaux de $\mathscr{D}$ dans les sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ respectivement. Si $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$ ou $\mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1$, on pose que l'angle de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ est égal à zéro. Dans le cas contraire, les sous-espaces $\mathscr{L}_1^0$ et $\mathscr{L}_2^0$ sont tous deux non nuls et l'angle de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ est égal à la borne inférieure des valeurs des angles que forment les vecteurs non nuls x de $\mathscr{L}_1^0$ et y de $\mathscr{L}_2^0$.

§ 25. Produit scalaire. Matrice de Gram

25.1. 1) Déduire à partir des propriétés de la multiplication scalaire euclidienne $(x, y) = (y, x)$ et $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ que $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$ pour tous vecteurs x, y, z et tous nombres réels α, β.

2) Déduire à partir des propriétés de la multiplication scalaire hermitienne $(x, y) = \overline{(y, x)}$ et $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ que

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} (x, y) + \bar{\beta} (x, z)$$

pour tous vecteurs x, y, z et tous nombres complexes α, β.

3) Déduire à partir des propriétés de la multiplication scalaire hermitienne $(x, y) = \overline{(y, x)}$ que le carré scalaire de tout vecteur est un nombre réel.

4) Déduire à partir des propriétés de la multiplication scalaire $(x, x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ pour tous vecteurs x, y, z et tous nombres α, β que $(x, x) = 0$ si et seulement si le vecteur x est nul.

25.2. Montrer que le sous-espace vectoriel d'un espace euclidien (hermitien) est un espace euclidien (hermitien) s'il est muni du même produit scalaire.

25.3. Soit un espace vectoriel muni de deux opérations de multiplication scalaire $(x, y)_1$ et $(x, y)_2$. Montrer que $(x, y) = \lambda (x, y)_1 + \mu (x, y)_2$ est également une opération de multiplication scalaire quels que soient les nombres $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ simultanément non nuls.

25.4. Notons $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées des vecteurs x et y dans une base de l'espace vectoriel réel n-dimensionnel. Déterminer si la fonction donnée $F(x, y)$ peut définir le produit scalaire et, si elle ne le peut pas, indiquer les propriétés de la multiplication scalaire euclidienne qui ne se vérifient pas:

1) $F(x, y) = x_2 y_1$, $n = 2$;
2) $F(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 10x_2 y_2$, $n = 2$;
3) $F(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, $n = 2$;
4) $F(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$, a) $n = 2$, b) $n \geqslant 3$;
5) $F(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$, $n = 2$;
6) $F(x, y) = 7x_1 y_1 + 6x_1 y_2 + 6x_2 y_1 + 9x_2 y_2$, $n = 2$;
7) $F(x, y) = 9x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + x_2 y_2$, $n = 2$;
8) $F(x, y) = 2x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2$, $n = 2$;
9) $F(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 7x_3 y_3$, $n = 3$;
10) $F(x, y) = 5x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2 + 2x_1 y_3 + 2x_3 y_1 + 4x_3 y_3$, $n = 3$;
11) $F(x, y) = 4x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_3$, $n = 3$;
12) $F(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3$, $n = 3$.

25.5. Démontrer que dans un espace vectoriel réel bidimensionnel la fonction

$$F(x, y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

où x_1, x_2 et y_1, y_2 sont les coordonnées des vecteurs x et y dans une base, définit la multiplication scalaire euclidienne si et seulement si $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$ et $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

25.6. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées des vecteurs x et y dans une base de l'espace vectoriel complexe n-dimensionnel. Déterminer si la fonction $F(x, y)$ peut définir le produit scalaire et, si non, indiquer lesquelles des propriétés du produit scalaire hermitien ne se vérifient pas:

1) $F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$, $n = 2$;
2) $F(x, y) = x_1\bar{y}_2$, $n = 2$;
3) $F(x, y) = ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
4) $F(x, y) = ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
5) $F(x, y) = (3 + i)\, x_1\bar{y}_2 + (3 - i)\, x_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
6) $F(x, y) = 3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$, a) $n = 2$; b) $n \geqslant 3$;
7) $F(x, y) = 5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
8) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1 + i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 - i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
9) $F(x, y) = 5x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
10) $F(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2 - i)\, x_1\bar{y}_2 + (2 + i)\, x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
11) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
12) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1 - i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 + i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_3 - ix_3\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3$, $n = 3$.

25.7. Notons x_1, x_2 et y_1, y_2 les coordonnées des vecteurs x et y dans une base de l'espace vectoriel complexe bidimensionnel. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes imposées aux coefficients complexes a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} pour que la fonction

$$F(x, y) = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + a_{21}x_2\bar{y}_1 + a_{22}x_2\bar{y}_2$$

définisse le produit scalaire hermitien.

25.8. 1) Vérifier que le produit scalaire défini dans l'espace arithmétique réel n-dimensionnel $\mathscr{R}_n$ possède toutes les propriétés du produit scalaire euclidien.

2) Même question pour le produit scalaire défini dans l'espace vectoriel $\mathscr{R}_{(m,\, n)}$ des matrices de type (m, n).

25.9. Vérifier que le produit scalaire défini dans l'espace arithmétique complexe n-dimensionnel $\mathscr{C}_n$ possède toutes les propriétés du produit scalaire hermitien.

25.10. Est-il possible d'introduire l'opération de multiplication scalaire dans tout espace vectoriel de dimension finie?

25.11. Soit $F(X, Y)$ une fonction définie dans l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$). Déterminer si $F(X, Y)$ possède toutes les propriétés de la multiplication scalaire euclidienne si:

1) $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY$; 2) $F(X, Y) = \operatorname{tr} X\,({}^tY)$;
3) $F(X, Y) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$; 4) $F(X, Y) = \det XY$;

5) $F(X, Y) = \operatorname{tr}({}^tX)DY$ (D étant une matrice diagonale d'ordre n à éléments diagonaux strictement positifs).

25.12. Montrer que le produit scalaire standard (X, Y) défini dans l'espace vectoriel $\mathcal{R}_{(m,\ n)}$ des matrices réelles de type (m, n) vérifie les égalités

$$(X, Y) = \operatorname{tr}({}^tX)Y = \operatorname{tr} X({}^tY).$$

25.13. Lesquelles des fonctions définies dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}_{(m,\ n)}$ des matrices de type (m, n):

1) $F_1(X, Y) = \operatorname{tr} X({}^tY)$; 2) $F_2(X, Y) = \operatorname{tr} X(\overline{{}^tY})$;

3) $F_3(X, Y) = \operatorname{tr} \overline{X}({}^tY)$ peuvent servir de produit scalaire hermitien ?

25.14. Montrer que l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels peut être muni du produit scalaire:

1) $(p, q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$, où $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_0, \ldots, \beta_n$ sont les coefficients des polynômes p et q;

2) $(p, q) = \sum\limits_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)\,q^{(k)}(a)$, où $p^{(k)}(a)$ et $q^{(k)}(a)$ sont les valeurs des dérivées d'ordre k en un point a de l'axe réel.

25.15. Introduire dans l'espace vectoriel complexe des polynômes de degré $\leqslant n$ l'opération de multiplication scalaire hermitienne.

25.16. Soient $t_1, \ldots, t_m$ des nombres réels distincts deux à deux. Démontrer que l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n $(n < m)$ à coefficients réels peut être muni du produit scalaire

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\,g(t_k).$$

Est-ce que cette fonction définit le produit scalaire euclidien si $m \leqslant n$?

25.17. Vérifier que:

1) dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, muni des opérations d'addition et de multiplication par un nombre, le produit scalaire peut être défini par la formule

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt;$$

2) dans l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes d'une variable réelle continues sur $[a, b]$, le produit scalaire peut être défini par la formule

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt.$$

25.18. On munit l'espace arithmétique réel ou complexe d'un produit scalaire défini comme fonction des composantes $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des vecteurs x et y. Calculer les matrices de Gram associées à la base canonique et à la base formée par les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$. Exprimer le produit scalaire des vecteurs x, y en fonction de leurs composantes dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$.

1) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$; a) $f_1 = {}^t(1, 2)$, $f_2 = {}^t(2, 1)$; b) $f_1 = {}^t(1, 1)$, $f_2 = {}^t(1, -1)$;

2) $(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$; a) $f_1 = {}^t(1, -1)$, $f_2 = {}^t(1, 1)$; b) $f_1 = {}^t(1, -1)$, $f_2 = {}^t(1, 0)$;

3) $(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$; a) $f_1 = {}^t(1, 0)$, $f_2 = {}^t(1, -1)$; b) $f_1 = {}^t(1/2, 1/2)$, $f_2 = {}^t(-1/2, 1/2)$;

4) $(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1 + i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 - i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$; a) $f_1 = {}^t(1, 0)$, $f_2 = {}^t(1, -1)$; b) $f_1 = {}^t(1, 0)$, $f_2 = {}^t(-1, 1 + i)$;

5) $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$; a) $f_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $f_2 = {}^t(1, -1, 0)$, $f_3 = {}^t(0, 1, 1)$; b) $f_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $f_2 = {}^t(-1, 2, 0)$, $f_3 = {}^t(-1, 2, 2)$;

6) $(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + (2 + i)\, x_2\bar{y}_3 + (2 - i)\, x_3\bar{y}_2 + 6x_3\bar{y}_3$; a) $f_1 = {}^t(1, 1, 0)$, $f_2 = {}^t(-1, 1, 0)$, $f_3 = {}^t(0, 0, 1)$; b) $f_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $f_2 = {}^t(-i, 1, 0)$, $f_3 = {}^t(1 + 2i, -2 + i, 1)$.

25.19. Calculer la matrice de Gram Γ associée à la base $(1, t, \ldots, t^n)$ dans l'espace euclidien des polynômes de degré $\leqslant n$, muni du produit scalaire:

1) du problème 25.14, 1);

2) du problème 25.14, 2) (étudier séparément le cas de $a = 0$);

3) du problème 25.16 ($m > n$).

25.20. Calculer la matrice de Gram Γ de la base $(1, t, \ldots, t^n)$ dans l'espace euclidien des polynômes de degré $\leqslant n$ muni du produit scalaire $(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ et exprimer celui-ci en fonction des coordonnées des vecteurs f, g dans cette base si:

1) $a = 0$, $b = 1$; 2) $a = -1$, $b = 1$.

25.21. 1) Démontrer la formule (1) citée dans l'introduction du chapitre X.

2) Démontrer la formule (2).

3) Comment sont liés les déterminants des matrices Γ et Γ'?

25.22. 1) Démontrer qu'un système fini de vecteurs d'un espace vectoriel muni du produit scalaire est lié si et seulement si le déterminant de la matrice de Gram de ce système vaut 0.

2) Démontrer que le déterminant de la matrice de Gram de tout système fini libre de vecteurs d'un espace vectoriel muni du produit scalaire est strictement positif.

25.23. Démontrer que le déterminant d'une matrice $\| a_{ij} \|$ d'ordre n est strictement positif si:

1) $a_{ij} = 2(i+j-1)^{-1}$ lorsque $i+j$ est pair, et $a_{ij} = 0$ lorsque $i+j$ est impair;

2) $a_{ij} = (i+j-1)^{-1}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

25.24. Les vecteurs x et y d'un espace euclidien ou hermitien sont définis dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par les colonnes de coordonnées ξ et η respectivement. On sait de plus que Γ_f est la matrice de Gram de la base $(f_1, \ldots, f_n)$. Calculer la matrice de Gram Γ_e de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et le produit scalaire des vecteurs x et y, si

1) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - 2e_2$.

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix};$$

2) $f_1 = 2e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

3) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_2$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix};$$

4) $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = -3ie_1 + 4e_2$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 1+i \\ 2 \end{Vmatrix};$$

5) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix};$$

6) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

7) $f_1 = e_1$, $f_2 = -ie_1 + 2e_2 + ie_3$, $f_3 = -ie_2 + e_3$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 1 & 3i & -1 \\ -3i & 22 & 10i \\ -1 & -10i & 5 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

25.25. Calculer la longueur du vecteur x d'un espace arithmé-

tique muni du produit scalaire donné:

1) $x = {}^t(5, 4, 3)$, le produit scalaire est défini dans l'introduction du chapitre X;

2) $x = {}^t(1, -2, 3, 4)$, le produit scalaire est défini dans l'introduction au chapitre X;

3) $x = {}^t(1, 1)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 2);

4) $x = {}^t(1, -1, 2)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 5);

5) $x = {}^t(1, i)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 4);

6) $x = {}^t(1 + i, 1 - i)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 6).

25.26. 1) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

2) Démontrer que l'égalité $|(x, y)| = |x| \cdot |y|$ a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

25.27. Démontrer les propriétés suivantes de la longueur du vecteur: si x, y sont des vecteurs, α, β des nombres, on a:

1) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$;

2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire);

3) l'égalité $|x + y| = |x| + |y|$ a lieu si et seulement si les vecteurs x et y diffèrent l'un de l'autre par un facteur numérique positif;

4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$;

5) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$; donner une interprétation géométrique de cette égalité.

25.28. Démontrer les inégalités:

$$1)\quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right),$$

$$2)\quad \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2},$$

où $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes quelconques. Dans quels cas ces inégalités deviennent des égalités?

25.29. Formuler l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski et l'inégalité triangulaire pour un espace hermitien défini dans le problème 25.17, 2).

25.30. Montrer que pour le vecteur x d'un espace euclidien (hermitien) $\mathscr{E}$ de dimension finie on a l'égalité

$$|x| = \sup_{y\in\mathscr{E},\ y\neq 0} \frac{|(x, y)|}{|y|}.$$

25.31. Supposons que dans un espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel les suites de vecteurs $\{f_k\}$ et $\{g_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ convergent vers les vecteurs f et g, c'est-à-dire que $|f_k - f| \to 0$

et $|g_k - g| \to 0$ quand $k \to \infty$. Démontrer que

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, g_k) = (f, g).$$

25.32. Soit $F(x, y)$ une fonction appliquant l'ensemble de tous les couples de vecteurs d'un espace vectoriel réel $\mathscr{L}$ dans l'ensemble des nombres réels. On sait de plus que $F(x, y)$ satisfait aux deux premières conditions de la définition de la multiplication scalaire euclidienne (voir p. 201) et à la condition de positivité: $F(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathscr{L}$ (mais $F(x, x) = 0$ n'entraîne pas en général $x = o$). Démontrer que:

1) la fonction $F(x, y)$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$(F(x, y))^2 \leqslant F(x, x)\, F(y, y)$$

pour tous $x, y \in \mathscr{L}$;

2) $F(x, x)$ est une fonction homogène de degré 2 en x, c'est-à-dire

$$F(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 F(x, x)$$

pour tout $x \in \mathscr{L}$;

3) l'inégalité triangulaire

$$(F(x+y, x+y))^{1/2} \leqslant (F(x, x))^{1/2} + (F(y, y))^{1/2}$$

se vérifie pour tous $x, y \in \mathscr{L}$;

4) l'ensemble $\mathscr{N}(F)$ de tous les vecteurs x pour lesquels $F(x, x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}$;

5) $F(x, y)$ définit le produit scalaire euclidien sur tout sous-espace vectoriel $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{L}$ tel que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{N}(F) = \{o\}$.

25.33. Trouver le système d'équations définissant le sous-espace $\mathscr{N}(F)$ (voir problème 25.32) pour la fonction F:

1) du problème 25.4, 4) b); 2) du problème 25.4, 7);

3) du problème 25.4, 11); 4) du problème 25.11, 3).

25.34. Calculer l'angle des vecteurs donnés:

1) dans l'espace $\mathscr{R}_3$ muni du produit scalaire standard: a) ${}^t(2, -3, 1)$, ${}^t(4, -6, 2)$; b) ${}^t(1, -1, 2)$, ${}^t(1, 0, 1)$; c) ${}^t(1, 0, -1)$, ${}^t(-1, 2, 2)$;

2) dans l'espace $\mathscr{R}_4$ muni du produit scalaire standard: a) ${}^t(1, -1, 1, -1)$, ${}^t(-1, 1, -1, 1)$; b) ${}^t(-1, 2, 3, -4)$, ${}^t(5, 0, -2, 1)$; c) ${}^t(1, 2, 2, 1)$, ${}^t(1, 1, 1, 2)$;

3) dans l'espace $\mathscr{R}_2$ muni du produit scalaire défini dans le problème 25.18, 2): a) ${}^t(1, 0)$, ${}^t(0, 1)$; b) ${}^t(1, 0)$, ${}^t(-1, 1)$;

4) dans l'espace $\mathscr{R}_3$ muni du produit scalaire du problème 25.18, 5): a) ${}^t(1, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 0)$; b) ${}^t(-1, 0, 0)$, ${}^t(-1, 2, 2)$.

25.35. Démontrer que dans l'espace des fonctions continues, défini dans le problème 25.17 ($a = 0$, $b = 1$), l'angle de deux vecteurs voisins $f_n = t^{n-1}$ et $f_{n+1} = t^n$ du système des vecteurs $1, t, \ldots, t^n, \ldots$ tend vers zéro quand $n \to \infty$.

§ 26. Systèmes orthogonaux de vecteurs. Systèmes biorthogonaux. Sous-espaces orthogonaux

26.1. Soit $\mathscr{E}$ un espace euclidien ou hermitien. Démontrer que:

1) si le vecteur f appartient à $\mathscr{E}$ et est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathscr{E}$, on a $f = o$;

2) si les vecteurs f et g appartiennent à $\mathscr{E}$ et $(f, x) = (g, x)$ pour tout vecteur x de $\mathscr{E}$, on a $f = g$.

26.2. On sait que le vecteur x d'un espace euclidien ou hermitien est orthogonal à chacun des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$. Démontrer que x est orthogonal à tout vecteur de l'enveloppe linéaire de $f_1, \ldots, f_n$.

26.3. Soit $\{f_1, \ldots, f_k\}$ un système de vecteurs orthogonaux deux à deux. Démontrer que $|f_1 + \ldots + f_k|^2 = |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2$ (généralisation du théorème de Pythagore).

26.4. 1) Démontrer le théorème réciproque du théorème de Pythagore pour les vecteurs d'un espace euclidien: les vecteurs f_1 et f_2 sont orthogonaux si $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$.

2) Montrer que dans un espace hermitien ce théorème n'est pas vrai. Trouver les conditions imposées aux vecteurs f_1 et f_2 pour que $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$.

26.5. 1) Démontrer que dans un espace euclidien l'égalité $|x + y| = |x - y|$ est vérifiée si et seulement si x et y sont orthogonaux. Donner une interprétation géométrique de cette assertion.

2) Montrer que dans un espace hermitien l'égalité $|x + y| = |x - y|$ n'entraîne pas en général l'orthogonalité des vecteurs x et y. Pour quels vecteurs l'égalité $|x + y| = |x - y|$ a-t-elle lieu?

26.6. 1) Démontrer que tout système fini de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre et qu'il en est de même en particulier pour tout système orthonormé.

2) Peut-on affirmer qu'un système arbitraire de vecteurs orthogonaux deux à deux est libre?

26.7. Démontrer que les coordonnées ξ_i de tout vecteur x d'un espace euclidien (ou hermitien) n-dimensionnel peuvent être calculées dans la base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ d'après la formule

$$\xi_i = (x, e_i)/(e_i, e_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

En déduire l'égalité $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|(x, e_i)|^2}{(e_i, e_i)}$.

26.8. 1) Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les coordonnées des vecteurs x et y dans une base d'un espace euclidien n-dimensionnel. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques x et y est défini par la formule $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$ si et seulement si cette base est orthonormée.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue dans le cas d'un espace hermitien.

26.9. 1) Montrer que la base canonique d'un espace arithmétique n-dimensionnel muni du produit scalaire standard est une base orthonormée.

2) Indiquer l'une quelconque des bases orthonormées de l'espace euclidien (hermitien) des matrices réelles (complexes) de type (m, n).

26.10. Soient $\mathcal{L}$ un espace vectoriel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{L}$. Démontrer que $\mathcal{L}$ peut être muni du produit scalaire de telle façon que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ devienne orthonormée par rapport à ce produit.

26.11. Trouver l'un quelconque des vecteurs normés orthogonaux au système donné de vecteurs d'un espace arithmétique muni du produit scalaire:

1) ${}^t(2, 2, 1)$, ${}^t(-2, 2, 3)$, le produit scalaire est standard;

2) ${}^t(1, 2, 1, 0)$, ${}^t(1, 1, 1, 1)$, le produit scalaire est standard;

3) ${}^t(1, -1, 2)$, le produit scalaire est standard;

4) ${}^t(1, 1)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 2);

5) ${}^t(1, 2, 0)$, ${}^t(2, 0, -1)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 5);

6) ${}^t(1 + i, 1 - i)$, le produit scalaire est standard;

7) ${}^t(-1, 1 + i, 0)$, ${}^t(0, 1, i)$, le produit scalaire est standard.

26.12. Démontrer que dans un espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel il existe une base orthonormé.

26.13. Appliquer le processus d'orthonormalisation au système lié de vecteurs d'un espace arithmétique réel muni du produit scalaire standard:

1) ${}^t(1, -3, 1)$, ${}^t(4, -5, 3)$;

2) ${}^t(1, 0, -1, 2)$, ${}^t(2, 1, -1, 3)$;

3) ${}^t(2, 0, -1)$, ${}^t(5, -1, 0)$, ${}^t(1, 7, -3)$;

4) ${}^t(1, 2, 2)$, ${}^t(1, 1, 0)$, ${}^t(0, 1, -4)$;

5) ${}^t(2, 1, -2)$, ${}^t(4, 1, 0)$, ${}^t(0, 1, 0)$;

6) ${}^t(1, 1, -1, 0)$, ${}^t(1, 2, 0, -1)$, ${}^t(0, 0, 1, 0)$.

26.14. Soit $\{f_1, \ldots, f_m\}$ un système lié de vecteurs tel que le sous-système $\{f_1, \ldots, f_{m-1}\}$ est libre. Démontrer que l'application formelle de l'orthogonalisation donne un système orthogonal $\{g_1, \ldots, g_m\}$ dont les vecteurs $g_1, \ldots, g_{m-1}$ sont non nuls et le vecteur $g_m = 0$.

26.15. Le système de vecteurs est défini par les matrices-colonnes de coordonnées dans une base orthonormée de l'espace euclidien ou hermitien. En utilisant le processus d'orthonormalisation, construire une base orthonormée de l'enveloppe linéaire de ces vecteurs:

1) ${}^t(1, 2, 1)$, ${}^t(3, 4, 1)$, ${}^t(1, -3, -1)$;

2) ${}^t(1, 1, -1)$, ${}^t(-4, 0, 5)$, ${}^t(-8, 2, 0)$;

3) ${}^t(3, -1, -2)$, ${}^t(4, 0, -1)$, ${}^t(5, 1, 0)$;
4) ${}^t(1, 2, -1, 1)$, ${}^t(-5, -5, 4, -2)$, ${}^t(-3, 6, 2, 0)$;
5) ${}^t(1, 0, 1, -1)$, ${}^t(6, 0, 4, -5)$, ${}^t(3, 2, -5, 4)$;
6) ${}^t(1, -3, 2, 1)$, ${}^t(-1, 7, -3, -2)$, ${}^t(2, -2, 3, 1)$;
7) ${}^t(1, -1, 1, -1)$, ${}^t(4, -2, 4, -2)$, ${}^t(-2, 7, -4, 7)$, ${}^t(2, 7, -2, 5)$;
8) ${}^t(i, 1, -i)$, ${}^t(2, 0, -1)$, ${}^t(0, 2, -i)$;
9) ${}^t(1, -1, 1+i)$, ${}^t(1, -i, -2+i)$, ${}^t(1+2i, 4-i, -1)$.

26.16. A partir du système des vecteurs f_1, f_2, f_3 d'un espace arithmétique muni du produit scalaire, construire par orthonormalisation une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) si:

1) $f_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $f_2 = {}^t(0, 1, 0)$, $f_3 = {}^t(0, 0, 1)$, a) le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 5); b) le produit scalaire est la fonction F du problème 25.4, 9);

2) $f_1 = {}^t(1, 0, -2)$, $f_2 = {}^t(0, 1, -2)$, $f_3 = {}^t(4, 0, 0)$, le produit scalaire est défini dans le problème 25.18, 5);

3) $f_1 = {}^t(0, 1, -1)$, $f_2 = {}^t(2, 0, 1)$, $f_3 = {}^t(-2, 4, 0)$, le produit scalaire est la fonction F du problème 25.4, 10).

26.17. Dans une base orthonormée de l'espace euclidien quadridimensionnel, un couple de vecteurs est défini par les matrices-colonnes de coordonnées. Compléter ce système de vecteurs pour avoir une base orthogonale.

1) ${}^t(1, 1, 1, 2)$, ${}^t(1, 0, 1, -1)$;
2) ${}^t(1, -1, 2, 0)$, ${}^t(-1, 1, 1, 3)$;
3) ${}^t(1, 2, 1, 2)$, ${}^t(1, 1, -1, -1)$.

26.18. Compléter les systèmes suivants de vecteurs d'un espace arithmétique muni du produit scalaire standard jusqu'à une base orthonormée:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}({}^t(1, -1, 0, 1))$, $\frac{1}{\sqrt{3}}({}^t(1, 1, -1, 0))$;

2) $\frac{1}{2}({}^t(1, 1, 1, 1))$, $\frac{1}{2}({}^t(1, -1, 1, -1))$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}({}^t(0, 1, 0, 1))$, $\frac{1}{\sqrt{7}}({}^t(1, 1, 2, -1))$.

26.19. Le sous-espace $\mathcal{L}$ d'un espace euclidien est défini dans une base orthonormée par le système d'équations linéaires. Trouver l'une quelconque des bases orthonormées de $\mathcal{L}$.

1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$;
2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
3) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0,$
$x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0$;
4) $x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0,$
$3x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0$;

5) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 &= 0; \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 6x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$

26.20. Trouver l'une quelconque des bases orthonormées d'un sous-espace de l'espace euclidien, engendré par le système des vecteurs définis dans une base orthonormée de l'espace par les matrices-colonnes de coordonnées:

1) ${}^t(29, 11, 19, 1)$, ${}^t(101, 99, 51, 49)$, ${}^t(52, -48, 51 -49)$;

2) ${}^t(101, 101, -99, -99)$, ${}^t(-99, 101, 101, -99)$, ${}^t(101, -99, -99, 101)$;

3) ${}^t(51, 49, 51, 49, 50)$, ${}^t(51, -49, 51, -49, 1)$, ${}^t(1, 51, 1, 51, 26)$, ${}^t(103, 51, 103, 51, 77)$.

26.21. Indiquer l'une quelconque des bases orthonormées dans l'espace euclidien des polynômes de degré $\leqslant n$ dont le produit scalaire est défini :

1) dans le problème 25.14,1) ;

2) dans le problème 25.14, 2);

3) dans le problème 25.16 pour $m = n + 1$.

26.22. Vérifier que le système trigonométrique des fonctions 1, $\cos t$, $\sin t$, . . ., $\cos nt$, $\sin nt$ est orthogonal pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt.$$

Normer ce système.

26.23. Dans l'espace des polynômes de degré $\leqslant 3$ muni du produit scalaire

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) \, dt$$

construire une base orthogonale à partir du système des polynômes $1, t, t^2, t^3$.

26.24. Dans l'espace des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $f(t) = O(t^{-1})$ pour $t \to +\infty$, on introduit la multiplication scalaire euclidienne définie par

$$(f, g) = \int_{0}^{+\infty} f(t) g(t) \, dt.$$

Orthogonaliser le système des fonctions e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.

26.25. 1) (s). Démontrer que les polynômes de Legendre

$$p_0(t)=1,\ p_k(t)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

forment une base orthogonale dans l'espace euclidien du problème 25.20, 2).

2) (s).Calculer la norme euclidienne du polynôme de Legendre.

26.26. Démontrer qu'en orthogonalisant les polynômes $1, t, \ldots, t^n$ de l'espace euclidien du problème 25.20, 2), on aboutit au système orthogonal des polynômes $q_0(t), \ldots, q_n(t)$ qui ne diffèrent des polynômes de Legendre (voir problème 26.25) que par des facteurs numériques. Trouver ces facteurs.

26.27. Soient $\{f_1, \ldots, f_m\}$ et $\{g_1, \ldots, g_m\}$ deux systèmes orthogonaux libres de vecteurs d'un espace vectoriel muni du produit scalaire, tels que l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ coïncide pour tout $k = 1, \ldots, m$ avec l'enveloppe linéaire des vecteurs $g_1, \ldots, g_k$. Démontrer que $g_k = \gamma_k f_k$, où γ_k sont des coefficients différents de zéro, $k = 1, \ldots, m$.

26.28. Etablir que les fonctions

$$T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos t),\quad t \in [-1, +1],\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sont des polynômes de degré n (polynômes de Tchebychev de première espèce). Démontrer que les polynômes $T_0(t), T_1(t), \ldots, T_n(t), \ldots$ forment un système orthogonal dans l'espace euclidien des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, (1-t^2)^{-1/2}\, dt.$$

Normer le système des polynômes $T_0(t), T_1(t), \ldots, T_n(t), \ldots$

26.29. Soient $\{f_1, \ldots, f_m\}$ un système libre de vecteurs d'un espace euclidien (hermitien), $\{g_1, \ldots, g_m\}$ le système obtenu par orthogonalisation de ce dernier, $\Gamma(f_1, \ldots, f_m)$ et $\Gamma(g_1, \ldots, g_m)$ les matrices de Gram de ces systèmes. Démontrer que

$$\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) = \det \Gamma(g_1, \ldots, g_m) = |g_1|^2 \ldots |g_m|^2.$$

26.30. En se servant des résultats des problèmes 25.20, 2), 26.26, 26.29, 26.25, calculer le déterminant de la matrice du problème 25.23, 1).

26.31. 1) Démontrer que dans un espace euclidien (hermitien) $\mathscr{E}$, chacun des deux systèmes biorthogonaux des vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ et $f_1, \ldots, f_m$ est libre.

2) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases biorthogonales de $\mathscr{E}$ et soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Démontrer que $\xi_i = (x, f_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

3) Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées du vecteur x dans la base e, et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ celles du vecteur y dans la base f d'un espace eucli-

dien. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques x et y s'exprime par la formule

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

si et seulement si les bases e et f sont biorthogonales.

4) Formuler et démontrer la proposition analogue à la proposition 3) pour un espace hermitien.

26.32. Soit $\mathscr{E}$ un espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel. Démontrer que:

1) pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$ il existe une base biorthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ et une seule;

2) pour tout système des vecteurs linéairement indépendants $e_1, \ldots, e_m$ de $\mathscr{E}$, il existe pour $m < n$ un système biorthogonal $\{f_1, \ldots, f_m\}$.

3) Comment diffèrent l'un de l'autre les systèmes de vecteurs dont chacun constitue avec le système $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un couple biorthogonal?

26.33. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases biorthogonales d'un espace euclidien (hermitien), ξ_k et ξ'_k, $k = 1, \ldots, n$, les coordonnées du vecteur x dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots$ $\ldots, f_n)$ respectivement, g_{ik} et g'_{ik} les éléments des matrices de Gram associées à ces bases. Démontrer que:

1) $f_i = \sum_{k=1}^{n} g'_{ik} e_k \quad (i = 1, \ldots, n)$;

2) $\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ki} \xi_k \quad (i = 1, \ldots, n)$;

3) les matrices $\| g_{ik} \|$ et $\| g'_{ik} \|$ sont inverses l'une de l'autre.

26.34. Trouver la base biorthogonale pour chacune des bases données d'un espace arithmétique muni du produit scalaire standard:

1) ${}^t(1, 0), {}^t(100, 1)$; 2) ${}^t(1, 0), {}^t(0, 3)$; 3) ${}^t(1, 3), {}^t(1, 5)$;
4) ${}^t(1, 0, 0), {}^t(3, 1, 0), {}^t(-2, -5, 1)$;
5) ${}^t(1, 1, 1), {}^t(1, 2, 3), {}^t(1, 4, 9)$;
6) ${}^t(1, 0, 1/10), {}^t(1/10, 1, 0), {}^t(0, 1/10, 1)$;
7) ${}^t(1, 0, i), {}^t(1, i, 0), {}^t(0, 1, 1 + i)$;
8) ${}^t(1, 0, 0, 0), {}^t(-1, 1, 0, 0), {}^t(1, -1, 1, 0), {}^t(-1, 1, -1, 1)$;
9) ${}^t(-2, 1, 1, 1), {}^t(1, -2, 1, 1), {}^t(1, 1, -2, 1), {}^t(1, 1, 1, -2)$.

26.35. Construire dans un espace arithmétique muni du produit scalaire standard un système de vecteurs biorthogonal au système des vecteurs donnés, qui soit contenu dans l'enveloppe linéaire de ces vecteurs:

1) ${}^t(1, -3, 2), {}^t(1, -1, 0)$;
2) ${}^t(1, 1, 1, 1), {}^t(1, 1, 1, 0)$;
3) ${}^t(1, 1, 0, 1), {}^t(1, 0, -1, 0), {}^t(0, 0, -1, 1)$.

26.36. Soit $\mathscr{E}$ l'espace euclidien des polynômes du problème 25.20, 2) pour $n = 3$.

1) Construire un système de vecteurs biorthogonal au système $\{1, t, t^2\}$ et contenu dans l'enveloppe linéaire de ces vecteurs;

2) construire une base de $\mathscr{E}$ qui soit biorthogonale à la base $(1, t, t^2, t^3)$.

26.37. Soient $\mathscr{L}$ un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien n-dimensionnel $\mathscr{E}$, et $\mathscr{L}^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{L}$. Démontrer que:

1) $\mathscr{L}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$;

2) si m $(0 < m < n)$ est la dimension de $\mathscr{L}$, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{E}$ telle que le système des vecteurs $e_1, \ldots, e_m$ soit une base orthonormée de $\mathscr{L}$, et celui des vecteurs $e_{m+1}, \ldots, e_n$ soit une base orthonormée de $\mathscr{L}^\perp$;

3) la somme des dimensions des sous-espaces $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^\perp$ est égale à la dimension de $\mathscr{E}$, et l'espace $\mathscr{E}$ est égal à la somme directe de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}^\perp$;

4) $(\mathscr{L}^\perp)^\perp = \mathscr{L}$, $\mathscr{E}^\perp = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}^\perp = \mathscr{E}$, où $\mathcal{O}$ est le sous-espace constitué du seul vecteur nul.

26.38. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases biorthogonales d'un espace euclidien (hermitien), $\mathscr{L}_k$ l'enveloppe linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$, $k < n$. Démontrer que $\mathscr{L}_k^\perp$ est l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_{k+1}, \ldots, f_n$.

26.39. Démontrer que l'opération de passage d'un sous-espace vectoriel $\mathscr{L}$ à son supplémentaire orthogonal $\mathscr{L}^\perp$ dans un espace euclidien (hermitien) $\mathscr{E}$ possède les propriétés suivantes:

1) si $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$, on a $\mathscr{L}_2^\perp \subseteq \mathscr{L}_1^\perp$;

2) $(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp = \mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2^\perp$;

3) $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)^\perp = \mathscr{L}_1^\perp + \mathscr{L}_2^\perp$;

4) si $\mathscr{E}$ est la somme directe des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, il est encore la somme directe des sous-espaces $\mathscr{L}_1^\perp$ et $\mathscr{L}_2^\perp$.

26.40. Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_1$ des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien (hermitien) $\mathscr{E}$, et soit $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}$. Notons $\mathscr{L}_1^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{L}_1$ dans $\mathscr{E}$, et $\widetilde{\mathscr{L}}_1^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{L}_1$ dans $\mathscr{L}$. Montrer que $\widetilde{\mathscr{L}}_1^\perp = \mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}$.

26.41. Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace euclidien (hermitien), la dimension de $\mathscr{L}_1$ étant strictement inférieure à celle de $\mathscr{L}_2$. Démontrer qu'il existe dans $\mathscr{L}_2$ un vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs de $\mathscr{L}_1$.

26.42. Trouver une base dans le supplémentaire orthogonal de l'enveloppe linéaire des vecteurs donnés d'un espace euclidien $\mathscr{E}$ si ces vecteurs sont définis par les matrices-colonnes de leurs coordonnées dans une base orthonormée de $\mathscr{E}$:

1) ${}^t(10, 1, -7)$; 2) ${}^t(1, 1, 1)$, ${}^t(1, -4, -1)$;

3) ${}^t(1, -5, 2, -9)$; 4) ${}^t(1, 1, -5, 1)$, ${}^t(2, -7, 2, 1)$;

5) ${}^t(-1, 3, 0, 1)$, ${}^t(4, 2, 1, 1)$, ${}^t(3, 5, 1, 2)$;
6) ${}^t(1, 0, -5, 4, -1)$, ${}^t(1, 2, 1, 8, 1)$, ${}^t(1, -1, -8, 2, -2)$.

26.43. Dans un espace arithmétique muni du produit scalaire standard, trouver une base orthonormée du supplémentaire orthogonal de l'enveloppe linéaire du système de vecteurs:
1) ${}^t(1, 2, 1)$; 2) ${}^t(1, -1, 1, -1)$;
3) ${}^t(1, 3, -1, 1)$, ${}^t(2, 5, -2, 3)$;
4) ${}^t(1, 2, -1, -3)$, ${}^t(2, 1, 1, -9)$, ${}^t(1, 4, -3, -1)$;
5) ${}^t(-1, 0, 1, 2, 1)$, ${}^t(2, -3, 1, -1, 4)$, ${}^t(1, 1, -2, -3, -3)$.

26.44. Trouver une base du supplémentaire orthogonal du sous-espace des vecteurs dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans une base orthonormée de l'espace euclidien vérifient le système des équations linéaires suivantes:

1) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 &= 0; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

26.45. Trouver le système d'équations linéaires définissant le supplémentaire orthogonal du sous-espace vectoriel défini dans une base orthonormée de l'espace euclidien par le système d'équations:

1) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0; \end{aligned}$$

2) $x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0$;

3) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 - 8x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 0, \\ 3x_1 + x_3 - 8x_5 &= 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 28x_5 &= 0. \end{aligned}$$

26.46. Soit $Ax = b$ un système réel de m équations linéaires à n inconnues, et soient $a_1, \ldots, a_m$ les lignes et $d_1, \ldots, d_n$ les colonnes de la matrice A. Considérons la solution x du système et

les colonnes ${}^t a_1, \ldots, {}^t a_m$ en tant que vecteurs de l'espace arithmétique $\mathcal{R}_n$ et traitons la colonne b et les colonnes $d_1, \ldots, d_n$ comme vecteurs de l'espace arithmétique $\mathcal{R}_m$. Introduisons dans $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{R}_n$ les produits scalaires standard. Notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les enveloppes linéaires des vecteurs ${}^t a_1, \ldots, {}^t a_m$ et $d_1, \ldots, d_n$ respectivement. Montrer que:

1) l'ensemble de toutes les solutions du système homogène $Ax = o$ coïncide avec $\mathcal{L}^{\perp}$;

2) l'ensemble de toutes les solutions du système homogène adjoint ${}^t A y = o$ est $\mathcal{M}^{\perp}$;

3) le système d'équations $Ax = b$ est résoluble si et seulement si $b \in \mathcal{M}$;

4) en se basant sur les propositions 2), 3), démontrer le théorème de Fredholm: le système d'équations $Ax = b$ est résoluble si et seulement si la colonne b est orthogonale à toute solution y du système homogène adjoint.

26.47. Soient $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$, $k \geqslant 2$, des sous-espaces orthogonaux deux à deux d'un espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel $\mathcal{E}$. Démontrer que:

1) la somme orthogonale de $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ est directe;

2) si la somme des dimensions de $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ est égale à la dimension de $\mathcal{E}$, on a $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_k$.

26.48. Soient $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ des sous-espaces orthogonaux deux à deux d'un espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel. Démontrer que:

1) $\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} (\mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) = (\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_2) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3$;

2) $(\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) \cap (\mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) = \mathcal{L}_3$.

26.49. 1) On sait que l'espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel $\mathcal{E}$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Démontrer que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont orthogonaux si et seulement si tous vecteurs x et y de $\mathcal{E}$ vérifient l'égalité

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2),$$

où $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in \mathcal{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{L}_2$.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour toute famille finie de sous-espaces.

26.50. Supposons qu'un espace vectoriel n-dimensionnel est la somme directe des sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont munis des produits scalaires $(x, y)_1$ et $(x\ y)_2$ respectivement. Décomposons deux vecteurs quelconques x et y de $\mathcal{L}$ suivant les sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$: $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ où $x_1, y_1 \in \mathcal{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{L}_2$. Démontrer que l'expression $(x, y) = (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2$ possède toutes les propriétés du produit scalaire sur $\mathcal{L}$ et que les sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont orthogonaux par rapport à ce produit.

26.51. Le sous-espace $\mathcal{L}_1$ d'un espace euclidien n-dimensionnel $\mathcal{E}$ est l'enveloppe linéaire des vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_l$, tandis que le sous-espace $\mathcal{L}_2$ est formé par tous les vecteurs x de $\mathcal{E}$ qui vérifient le système d'équations $(x, g_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, où les vecteurs $g_1, \ldots, g_m$ sont aussi linéairement indépendants. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{E}$ soit la somme directe des sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

§ 27. Projection orthogonale. Angle du vecteur et du sous-espace, angle de deux sous-espaces

27.1. Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthogonale du sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ d'un espace euclidien ou hermitien $\mathcal{E}$, x un vecteur arbitraire de $\mathcal{E}$, et x' son projeté orthogonal sur $\mathcal{L}$. Démontrer que:

1) $x' = \sum_{k=1}^{m} \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$;

2) $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(x, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} \leqslant |x|^2$ (inégalité de Bessel);

3) l'égalité $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(x, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} = |x|^2$ est vérifiée pour tous les vecteurs de $\mathcal{L}$ si et seulement si $\mathcal{L} = \mathcal{E}$.

27.2. Le sous-espace $\mathcal{L}$ d'un espace euclidien est l'enveloppe linéaire des vecteurs définis dans une base orthonormée de l'espace par les matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Déterminer le projeté orthogonal sur $\mathcal{L}$ et la composante orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ d'un vecteur x défini dans la même base par la matrice-colonne $\boldsymbol{\xi}$:

1) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(10, -20, 10)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(0, 1, 0)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(4, 0, 5)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(7, -3, -1)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(4, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(1, -1, 1, -1)$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(2, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(1, 0, 2, -2)$;

5) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 4, -1, 0)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(2, 1, 1, 0)$;

6) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 0, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(3, 3, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(-1, 6, 3, -5)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(1, 4, 0, 2)$;

7) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(2, 0, -1, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, -1, 1, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(1, 1, -1, -1)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(1, 2, 0, -1)$;

8) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(5, 1, 1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(3, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{\xi} = {}^t(5, 4, -3, -2)$;

9) $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{c}_{230}$; a) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}_{207}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{c}_{224}$; b) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}_{225}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{c}_{226}$; c) $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}_{227}$; d) $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_{228}$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\boldsymbol{c}_{229}$.

27.3. Le sous-espace vectoriel $\mathscr{L}$ d'un espace arithmétique muni du produit scalaire standard est engendré par les vecteurs dont les coordonnées vérifient le système d'équations linéaires homogènes. Trouver le projeté orthogonal y sur $\mathscr{L}$ et la composante orthogonale z par rapport à $\mathscr{L}$ du vecteur x si:

1) $x = {}^t(1, -2, 3, -4)$, $\mathscr{L}$: $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$;

2) $x = {}^t(8, -2, 8, 3)$, $\mathscr{L}$: $\xi_1-2\xi_2+\xi_3=0$, $\xi_1-\xi_2+4\xi_3+\xi_4=0$;

3) $x = {}^t(2, 3, -1, -2)$, $\mathscr{L}$: $\xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4=0$, $2\xi_1+\xi_2+3\xi_3=0$, $4\xi_1+4\xi_2+5\xi_3-2\xi_4=0$;

4) $x = {}^t(0, 1, -2, 3)$, $\mathscr{L}$: $2\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$, $6\xi_1+\xi_2-\xi_3+\xi_4=0$, $\xi_2+\xi_3-\xi_4=0$.

27.4. Trouver le projeté orthogonal du polynôme $p(t)$ sur le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à m ($m \leqslant n$) dans l'espace euclidien défini:

1) dans le problème 25.14, 1);

2) dans le problème 25.14, 2).

27.5. Trouver les projetés orthogonaux d'un polynôme $p(t)$ de l'espace euclidien du problème 26.16 ($m = n+1$) sur les sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) des polynômes $q(t)$ satisfaisant aux égalités $q(t_{k+1}) = 0, \ldots, q(t_{n+1}) = 0$.

27.6. Dans l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, le produit scalaire est défini par la formule

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\rho(t)\,dt.$$

Le sous-espace de dimension finie $\mathscr{L}$ de l'espace $\mathscr{E}$ est défini par sa base e. Décomposer suivant e le projeté orthogonal sur $\mathscr{L}$ d'un vecteur arbitraire $p(t)$ de $\mathscr{E}$ et écrire l'inégalité de Bessel correspondante si:

1) $a = -\pi$, $b = \pi$, $\rho(t) \equiv 1$, $\mathscr{L}$ étant l'enveloppe linéaire des polynômes trigonométriques du problème 26.22;

2) $a = -1$, $b = 1$, $\rho(t) \equiv 1$, $\mathscr{L}$ étant le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant n$ dont la base est formée des polynômes de Legendre définis dans le problème 26.25;

3) $a = -1$, $b = 1$, $\rho(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $\mathscr{L}$ étant le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant n$ dont la base est formée des polynômes de Tchebychev définis dans le problème 26.28.

27.7. On sait que le sous-espace $\mathscr{L}$ d'un espace euclidien (ou hermitien) $\mathscr{E}$ est la somme directe des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Démontrer que pour tout vecteur $x \in \mathscr{E}$ le projeté orthogonal de x

sur $\mathcal{L}$ est égal à la somme des projetés orthogonaux de x sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ si et seulement si les sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont orthogonaux.

27.8. Supposons que les vecteurs $g_1, \ldots, g_m$ sont obtenus par orthogonalisation d'un système de vecteurs linéairement indépendants $f_1, \ldots, f_m$. Démontrer que pour $k > 1$ le vecteur g_k est la composante orthogonale du vecteur f_k par rapport à l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_{k-1}$.

27.9. Démontrer les propriétés suivantes du déterminant de la matrice de Gram associée à un système de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_m\}$ d'un espace euclidien (ou hermitien):

1) $\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) \leqslant |f_1|^2 \ldots |f_m|^2$;

2) l'égalité $\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) = |f_1|^2 \ldots |f_m|^2$ est vérifiée si et seulement si les vecteurs $f_1, \ldots, f_m$ sont orthogonaux deux à deux ou si au moins un de ces vecteurs est nul.

27.10. Sur la base du problème 27.9, démontrer pour le déterminant d'une matrice complexe $A = \| a_{ik} \|$ d'ordre n les assertions:

1) $|\det A|^2 \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right)$ (inégalité d'Hadamard) ;

2) l'égalité $|\det A|^2 = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right)$ est vérifiée si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{il} = 0$ pour tous k, l tels gue $k \neq l$ ou si l'une des colonnes de la matrice A est nulle.

27.11. Soient $\mathcal{L}$ un sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ muni du produit scalaire, $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de $\mathcal{L}$, x un vecteur arbitraire de $\mathcal{E}$, y son projeté orthogonal sur $\mathcal{L}$ et z la composante orthogonale de x par rapport à $\mathcal{L}$, et soient $\Gamma = \Gamma(f_1, \ldots, f_m)$ la matrice de Gram associée au système de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_m\}$ et c la matrice-ligne formée par les produits scalaires $(x, f_1), \ldots, (x, f_m)$. Démontrer que:

1) $|z|^2 = \det \Gamma(f_1, \ldots, f_m, x)/\det \Gamma$;

2) $|y|^2 = -\dfrac{1}{\det \Gamma} \cdot \det \begin{Vmatrix} \Gamma & {}^t c \\ c & 0 \end{Vmatrix}$.

27.12. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des sous-espaces de dimension finie d'un espace euclidien ou hermitien $\mathcal{E}$, tels que $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$, et soient y_1 et y_2 les projetés orthogonaux du vecteur x sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et z_1 et z_2 ses composantes orthogonales par rapport à $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement. Démontrer que $|y_1| \leqslant |y_2|$, $|z_1| \geqslant |z_2|$.

27.13. 1) Démontrer la propriété suivante du déterminant de la matrice de Gram du système des vecteurs $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l$:

$$\det \Gamma(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) \leqslant \det \Gamma(f_1, \ldots, f_k) \times \det \Gamma(g_1, \ldots, g_l)$$

pour tous k, l strictement positifs.

2) Montrer que l'égalité

$$\det \Gamma (f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) = \\ = \det \Gamma (f_1, \ldots, f_k) \det \Gamma (g_1, \ldots, g_l)$$

est vérifiée si et seulement si les enveloppes linéaires des systèmes de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_k\}$ et $\{g_1, \ldots, g_l\}$ sont orthogonales ou si l'un de ces systèmes est lié.

27.14. Soient $\mathcal{L}$ un sous-espace de dimension finie et x un vecteur d'un espace vectoriel muni du produit scalaire. Démontrer que la plus petite valeur de $| x - y |$ est atteinte pour tous les vecteurs y de $\mathcal{L}$ sur le seul vecteur qui est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{L}$, et que cette valeur est égale à la longueur de la composante orthogonale de x par rapport à $\mathcal{L}$.

27.15. Le vecteur x et le système des vecteurs $f_1, \ldots, f_m$ d'un espace euclidien sont définis dans une base orthonormée de cet espace par les matrices-colonnes de coordonnées ξ et $a_1, \ldots, a_m$ respectivement. $\mathcal{L}$ étant l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_m$, calculer $\delta = \inf\limits_{y \in \mathcal{L}} | x - y |$ si:

1) $\xi = {}^t(1, 1, 0)$, $a_1 = {}^t(0, 1, -1)$, $a_2 = {}^t(1, 1, 1)$;
2) $\xi = {}^t(1, 1, 1)$, $a_1 = {}^t(0, 2, 1)$, $a_2 = {}^t(-1, 4, 1)$;
3) $\xi = {}^t(1, 1, -1, 0)$, $a_1 = {}^t(1, 1, 1, 1)$, $a_2 = {}^t(1, -1, -1, 1)$;
4) $\xi = {}^t(1, 1, -1, 0)$, $a_1 = {}^t(1, 1, 1, 1)$, $a_2 = {}^t(1, -1, -1, 1)$, $a_3 = {}^t(1, 1, -1, -1)$;
5) $\xi = {}^t(1, -1, 1, -1)$, $a_1 = {}^t(1, -1, 0, 2)$, $a_2 = {}^t(1, 0, 1, 1)$;
6) $\xi = {}^t(1, -1, 1, -1)$, $a_1 = {}^t(1, -1, 0, 2)$, $a_2 = {}^t(1, 0, 1, 1)$, $a_3 = {}^t(-1, 2, 1, 0)$.

27.16. Déterminer les coefficients du polynôme trigonométrique $T_n(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ qui minimise l'intégrale $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (| t | - T_n(t))^2 \, dt$. Calculer cette valeur minimale.

27.17. Calculer la plus petite valeur de l'intégrale

$$\int\limits_{-1}^{1} (t^{n+1} - p_n(t))^2 \, dt$$

sur l'ensemble de tous les polynômes $p_n(t)$ de degré au plus égal à n.

27.18. Est-ce que l'angle entre un vecteur et un sous-espace vectoriel peut être strictement supérieur à $\pi/2$?

27.19. Soient x un vecteur non nul de l'espace euclidien, $\mathcal{L}$ son sous-espace de dimension finie, φ l'angle de x et $\mathcal{L}$, x' le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{L}$. Démontrer que:

1) si $x' = o$, on a $\varphi = \pi/2$;
2) si $x' \neq o$, l'angle φ est égal à l'angle de x et x';
3) si $x' \neq o$, tout vecteur $y \in \mathcal{L}$ faisant un angle φ avec x vérifie l'égalité $y = \alpha x'$, où $\alpha > 0$;
4) $\cos \varphi = |x'| / |x|$.

27.20. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ d'un espace arithmétique muni du produit scalaire standard est engendré par les vecteurs $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$. Calculer l'angle que le vecteur $\boldsymbol{x}$ fait avec $\mathcal{L}$ si:
1) $\boldsymbol{x} = {}^t(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(0, 1, 0)$;
2) $\boldsymbol{x} = {}^t(5, 1, -2)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, -1, 2)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, 1, 3)$;
3) $\boldsymbol{x} = {}^t(1, -1, 0)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(0, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, 3, 0)$;
4) $\boldsymbol{x} = {}^t(-1, 1, 2)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(2, 1, -1)$;
5) $\boldsymbol{x} = {}^t(-2, 2, 1, 0)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, 2, 3, 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, 0, 1, -2)$;
6) $\boldsymbol{x} = {}^t(1, 0, 2, 1)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(3, 3, -1, -1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(2, 1, 0, -2)$;
7) $\boldsymbol{x} = {}^t(1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, -1, 1, -1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, 1, 3, 3)$, $\boldsymbol{f}_3 = {}^t(3, -2, 4, -1)$;
8) $\boldsymbol{x} = {}^t(1, 1, 1, 3)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, -1, 1, -2)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, 0, 1, -1)$, $\boldsymbol{f}_3 = {}^t(3, 1, 2, -1)$;
9) $\boldsymbol{x} = {}^t(1, 2, 3, -1)$, $\boldsymbol{f}_1 = {}^t(1, 1, -1, -1)$, $\boldsymbol{f}_2 = {}^t(1, -1, 5, -3)$, $\boldsymbol{f}_3 = {}^t(0, 1, 2, -4)$.

27.21. Le sous-espace $\mathcal{L}$ de l'espace euclidien est défini dans une base orthonormée de cet espace par le système d'équations linéaires. Calculer l'angle de $\mathcal{L}$ avec le vecteur x défini dans la même base par la matrice-colonne de coordonnées ξ:
1) $\xi = {}^t(1, -2, 1)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 - 2\eta_2 + 5\eta_3 = 0$;
2) $\xi = {}^t(1, 3, 5)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 + 3\eta_2 + 5\eta_3 = 0$;
3) $\xi = {}^t(1, 0, 0, 0)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4 = 0$;
4) $\xi = {}^t(1, 0, 1, 0, -1)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + 2\eta_5 = 0$;
5) $\xi = {}^t(3, 1, -1, -1)$, $\mathcal{L}$: $2\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 = 0$, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_4 = 0$;
6) $\xi = {}^t(0, 2, 1, 1)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 0$, $3\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 + \eta_4 = 0$, $5\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_4 = 0$;
7) $\xi = {}^t(1, 1, 2, 1, 1)$, $\mathcal{L}$: $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_5 = 0$ $2\eta_2 + 3\eta_3 + \eta_4 = 0$, $\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4 - \eta_5 = 0$.

27.22. Soient x un vecteur non nul d'un espace euclidien de dimension finie, α et β les angles de x avec les sous-espaces $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^\perp$. Démontrer que $\alpha + \beta = \pi/2$.

27.23. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ d'un espace euclidien de dimension finie est la somme orthogonale des sous-espaces $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$. Notons $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les angles du vecteur x avec les sous-espaces $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$ respectivement. Démontrer que $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha_1 + \ldots + \cos^2 \alpha_m$.

27.24. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée

de $\mathscr{L}_1$, et soient $e'_1, \ldots, e'_k$ des projetés orthogonaux des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ sur $\mathscr{L}_2$. Etant donné un vecteur $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_k e_k$ de $\mathscr{L}_1$ tel que $|x| = 1$, montrer que le cosinus de l'angle de x et de $\mathscr{L}_2$ vaut

$$\left(\sum_{i,\,j=1}^{k} (e'_i,\ e'_j)\ \xi_i\xi_j\right)^{1/2}.$$

27.25. Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ des sous-espaces vectoriels non nuls d'un espace euclidien de dimension finie, $\mathscr{L}_1^0$ et $\mathscr{L}_2^0$ les supplémentaires orthogonaux du sous-espace $\mathscr{D} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ dans $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ respectivement. Démontrer que:

1) il existe des vecteurs non nuls $x_1 \in \mathscr{L}_1^0$ et $x_2 \in \mathscr{L}_2^0$ qui font un angle égal à l'angle des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$;

2) l'angle de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ vaut $\pi/2$ si et seulement si $\mathscr{L}_1^0$ et $\mathscr{L}_2^0$ sont des sous-espaces orthogonaux non nuls;

3) l'angle de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ vaut 0 si et seulement si l'un au moins des sous-espaces $\mathscr{L}_1^0$ et $\mathscr{L}_2^0$ est nul.

27.26. Les sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont les enveloppes linéaires des systèmes de vecteurs définis dans une base orthonormée d'un espace euclidien par les matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ et $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_l$. Calculer l'angle des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, si:

1) $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(0, 3, -1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(1, -2, 1, 1)$, $\boldsymbol{d}_1 = {}^t(0, 0, 1, -3)$, $\boldsymbol{d}_2 = {}^t(1, 1, 0, 1)$;

2) $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(1, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(2, 0, -1, -1)$, $\boldsymbol{d}_1 = {}^t(1, 1, 0, -2)$, $\boldsymbol{d}_2 = {}^t(1, 1, -3, 1)$;

3) $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(0, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{d}_1 = {}^t(1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{d}_2 = {}^t(1, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{d}_3 = {}^t(1, 0, 1, -1)$;

4) $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(1, 0, 1, 2)$, $\boldsymbol{b}_3 = {}^t(0, 1, 0, -1)$, $\boldsymbol{d}_1 = {}^t(1, 1, 0, 0)$; $\boldsymbol{d}_2 = {}^t(1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{d}_3 = {}^t(0, 1, 1, 0)$.

CHAPITRE XI

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS

Dans ce chapitre on étudie les espaces euclidiens et hermitiens de dimension finie, et, dans la suite, cette convention n'est plus spécifiée. On utilise les notions fondamentales suivantes: *projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel* et *symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel*, *transformation adjointe*, *transformation auto-adjointe*, *transformation orthogonale*, *transformation unitaire*.

Soit $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien ou hermitien $\mathcal{E}$. La projection sur $\mathcal{L}$ parallèlement à son supplémentaire orthogonal $\mathcal{L}^{\perp}$ est appelée *projection orthogonale* sur $\mathcal{L}$. La symétrie par rapport à $\mathcal{L}$ parallèlement à $\mathcal{L}^{\perp}$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à $\mathcal{L}$.

Soit φ une transformation linéaire de l'espace euclidien ou hermitien $\mathcal{E}$. On appelle *transformation adjointe* de φ une transformation φ^* de $\mathcal{E}$ telle que $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$ quels que soient les vecteurs x et y de $\mathcal{E}$. La transformation adjointe existe pour toute transformation linéaire, se définit de façon unique par cette transformation et est linéaire. Si A est une matrice associée à la transformation linéaire φ dans la base $e = (e_1, \ldots, e_n)$, la matrice A^* associée à la transformation adjointe φ^* dans la même base e se calcule d'après la formule

$$A^* = \Gamma^{-1}\,({}^tA)\,\Gamma \text{ dans un espace euclidien,}$$

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1}\,({}^tA)\,\Gamma} \text{ dans un espace hermitien,}$$

où Γ est la matrice de Gram de la base e. Si e est une base orthonormée, $A^* = {}^tA$ dans un espace euclidien et $A^* = {}^t\overline{A}$ dans un espace hermitien.

La transformation linéaire φ d'un espace euclidien ou hermitien est dite *auto-adjointe* si $\varphi = \varphi^*$. Toutes les racines de l'équation caractéristique d'une transformation auto-adjointe sont réelles, et il existe pour toute transformation auto-adjointe une base orthonormée de ses vecteurs propres.

La transformation linéaire d'un espace euclidien est dite *orthogonale* si elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{E}$. La transformation linéaire d'un espace hermitien conservant le produit scalaire porte le nom de transformation *unitaire*.

Deux transformations linéaires φ et ψ d'un espace euclidien (hermitien) sont dites *semblables* s'il existe une transformation orthogonale (unitaire) ω telle que $\psi = \omega^{-1}\varphi\omega$.

§ 28. Divers procédés de définition des transformations linéaires dans les espaces euclidien et hermitien. Transformation adjointe

28.1. La transformation linéaire φ associe à la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ le système des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$. Démontrer que $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) f_j$ pour tout vecteur x.

28.2. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée du sous-espace $\mathcal{L}$. En utilisant les produits scalaires $(x, e_1), \ldots, (x, e_k)$, exprimer l'image d'un vecteur arbitraire x pour les transformations suivantes:

1) projection orthogonale sur $\mathcal{L}$;
2) projection orthogonale sur $\mathcal{L}^\perp$;
3) symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$;
4) symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{L}^\perp$.

28.3. Le sous-espace $\mathcal{L}$ est défini par le système d'équations $(x, n_1) = 0, \ldots, (x, n_k) = 0$, où $\{n_1, \ldots, n_k\}$ est un système orthonormé de vecteurs. En utilisant les produits scalaires $(x, n_1), \ldots$ $\ldots, (x, n_k)$, exprimer l'image d'un vecteur arbitraire x pour les transformations suivantes:

1) projection orthogonale sur $\mathcal{L}$;
2) symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{L}^\perp$.

28.4. Trouver une matrice associée dans la base $\boldsymbol{e}$ à la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ si $\mathcal{L}$ est engendré par le système des vecteurs définis dans cette base par les matrices-colonnes de coordonnées:

1) ${}^t(2, 3, -1, 1)$; 2) ${}^t(1, 2, 1, -2)$;
3) ${}^t(1, -1, 2, 0)$, ${}^t(-1, 1, 1, 3)$;
4) ${}^t(1, 1, 1, 1)$, ${}^t(0, 1, 1, 0)$;
5) ${}^t(1, 1, -1, 0)$, ${}^t(0, 1, 1, -1)$, ${}^t(-1, 1, 0, 1)$;
6) ${}^t(0, 1, 0, 1)$, ${}^t(1, 0, 3, 0)$, ${}^t(0, 1, -1, -1)$.

28.5. Trouver une matrice associée dans la base $\boldsymbol{e}$ à la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $\mathcal{L}$ du problème 28.4.

28.6. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de l'espace euclidien quadridimensionnel $\mathcal{E}$ est défini dans une base orthonormée $\boldsymbol{e}$ par le système d'équations linéaires. Trouver dans $\boldsymbol{e}$ la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{L}$.

1) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$;

2) $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0,$
$3\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0$;

3) $\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0,$
$\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 = 0,$
$\xi_1 + 3\xi_2 - 4\xi_3 + 3\xi_4 = 0$;

4) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0,$
$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0,$
$\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - 2\xi_4 = 0.$

28.7. Trouver une matrice associée dans la base $\boldsymbol{e}$ à la symétrie orthogonale de l'espace $\mathcal{E}$ par rapport au sous-espace $\mathcal{L}$ du problème 28.6.

28.8. Supposons que les systèmes de vecteurs $\{f_1, \ldots, f_m\}$ et $\{h_1, \ldots, h_m\}$ sont biorthogonaux à une normalisation près, c'est-à-dire que $(f_j, h_k) = 0$ pour $j \neq k$, $(f_k, h_k) \neq 0$ $(j, k = 1, \ldots, m)$. Soient $\mathcal{L}_1$ l'enveloppe linéaire des vecteurs $f_1, \ldots, f_m$, et $\mathcal{L}_2$ le

sous-espace défini par le système d'équations $(x, h_1) = 0, \ldots$ $\ldots, (x, h_m) = 0$. Exprimer par les produits scalaires des vecteurs $x, f_1, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_m$ l'image d'un vecteur arbitraire x pour les transformations suivantes:

1) projection sur $\mathcal{L}_1$ parallèlement à $\mathcal{L}_2$;

2) symétrie par rapport à $\mathcal{L}_1$ parallèlement à $\mathcal{L}_2$.

28.9. La transformation linéaire φ est définie par la formule $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) g_j$, où $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ sont des vecteurs. Démontrer que:

1) le noyau de φ est le supplémentaire orthogonal de l'enveloppe linéaire des vecteurs $\sum_{j=1}^{m} (g_k, g_j) f_j$, $k=1, \ldots, m$;

2) l'ensemble des valeurs de φ est l'enveloppe linéaire des vecteurs $\sum_{j=1}^{m} (f_k, f_j) g_j$, $k=1, \ldots, m$.

28.10. Quelle est la nature de la transformation φ^* adjointe d'une transformation linéaire φ:

1) dans un espace euclidien unidimensionnel;

2) dans un espace hermitien unidimensionnel?

28.11. Trouver la transformation φ^* adjointe de l'homothétie φ

1) de l'espace euclidien;

2) de l'espace hermitien.

28.12. Trouver la transformation adjointe de la transformation φ du plan vectoriel euclidien si:

1) φ est une projection orthogonale sur l'enveloppe linéaire du vecteur $a \neq o$;

2) φ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace engendré par le vecteur $a \neq o$;

3) φ est une rotation d'angle α dans le sens des aiguilles d'une montre.

28.13. On choisit dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}_3$ une base orthonormée (e_1, e_2, e_3). Trouver la transformation φ^* adjointe de la transformation φ de $\mathcal{E}_3$ si:

1) φ est une rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe défini par le vecteur $f = e_1 + e_2 + e_3$;

2) φ est une projection sur l'enveloppe linéaire du vecteur a parallèlement à un sous-espace $\mathcal{L}$ engendré par les vecteurs e_1 et e_2 $(a \notin \mathcal{L})$;

3) φ est définie par la formule $\varphi(x) = [a, x]$, où a est un vecteur fixé de $\mathcal{E}_3$, $[a, x]$ le produit vectoriel des vecteurs a et x.

28.14. La transformation linéaire φ

1) d'un espace euclidien n-dimensionnel,

2) d'un espace hermitien n-dimensionnel

représente une traction dans n directions orthogonales deux à deux, le rapport de traction dans la j-ième direction, $j = 1, 2, \ldots, n$, étant λ_j (dans le cas d'un espace hermitien les nombres λ_j peuvent être complexes). Trouver la transformation adjointe φ^*.

28.15. Ecrire la formule définissant la transformation adjointe de la transformation du problème 28.9.

28.16. Un espace $\mathscr{E}$ est la somme directe des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Démontrer que:

1) la transformation adjointe de la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{L}_1$ parallèlement à $\mathscr{L}_2$ est une projection sur $\mathscr{L}_2^\perp$ parallèlement à $\mathscr{L}_1^\perp$;

2) la transformation adjointe de la symétrie de $\mathscr{E}$ par rapport à $\mathscr{L}_1$ parallèlement à $\mathscr{L}_2$ est une symétrie par rapport à $\mathscr{L}_2^\perp$ parallèlement à $\mathscr{L}_1^\perp$.

28.17. La transformation φ d'un espace arithmétique n-dimensionnel muni du produit scalaire standard est définie par la formule $\varphi(x) = Ax$, où A est une matrice d'ordre n. Trouver la transformation adjointe si l'espace est:

1) réel; 2) complexe.

28.18. Trouver la transformation adjointe de la transformation φ de l'espace euclidien (hermitien) des matrices de type (m, n), muni du produit scalaire standard, si φ est définie par la formule:

1) $\varphi(X) = AX$, où A est une matrice donnée d'ordre m;

2) $\varphi(X) = XB$, où B est une matrice donnée d'ordre n.

28.19. Soit $\mathscr{P}^{(n)}[a, b]$ un espace euclidien des polynômes de degré $\leqslant n$ muni du produit scalaire

$$(p, q) = \int_a^b p(t)\, q(t)\, dt,$$

et soit φ une transformation linéaire définie par la formule

$$\varphi(p) = \int_a^b K(t, s)\, p(s)\, ds,$$

où $K(t, s) = \sum_{j=0}^{n} t^j k_j(s)$.

1) Ecrire la formule de la transformation adjointe φ^* dans le cas où tous les $k_j(s)$ sont des polynômes de degré $\leqslant n$.

2) Démontrer que, si les fonctions $k_j(s)$ sont continues sur $[a, b]$, la transformation adjointe φ^* est définie par la formule

$$\varphi^*(p) = \int_a^b K^*(t, s)\, p(s)\, ds,$$

où $K^*(t, s) = \sum_{j=0}^{n} s^j k_j^*(t)$, $k_j^*(t)$ étant les projetées orthogonales des fonctions $k_j(t)$ sur $\mathcal{P}^{(n)}[a, b]$ (voir problème 27.6).

28.20. La transformation linéaire φ de l'espace euclidien $\mathcal{P}^{(n)}[a, b]$ (voir problème 28.19) fait correspondre au polynôme $p(t)$ sa dérivée $p'(t)$. Démontrer que la transformation adjointe φ^* agit suivant la formule $\varphi^*(p)(t) = -p'(t) + h(t)$, où $h(t)$ est un polynôme de degré n défini univoquement à partir des relations

$$\int_a^b h(t)\, t^k\, dt = b^k p(b) - a^k p(a), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

28.21. 1) Soit A la matrice associée dans la base e à une transformation linéaire de l'espace euclidien, et soit A^* la matrice associée à la transformation adjointe dans la même base. Démontrer que $A^* = \Gamma^{-1}({}^tA)\Gamma$, où Γ est la matrice de Gram de la base e. Quelle relation existe-t-il entre les matrices A et A^* si la base est orthonormée ?

2) Trouver une relation entre les matrices A et A^* dans le cas d'un espace hermitien.

28.22. Soit A la matrice associée à la transformation linéaire dans une base de l'espace euclidien, et soit Γ la matrice de Gram de cette base. Trouver la matrice A^* de la transformation adjointe dans la même base si:

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$;

3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$;

4) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{Vmatrix}$.

28.23. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée dans un espace euclidien ou hermitien $\mathcal{E}$. La matrice A de la transformation linéaire φ de l'espace $\mathcal{E}$ est définie dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$. Trouver la matrice A^* de la transformation adjointe φ^* dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$ si :

1) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $A = A_{65}$;

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = A_{66}$;

3) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$, $A = A_{99}$;

4) $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_2 - e_3$, $A = A_{331}$;
5) $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = e_3$, $A = A_{332}$;
6) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_3$, $A = A_{333}$;
7) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 - e_3$, $A = A_{334}$;
8) $f_1 = e_1$, $f_2 = ie_1 + e_2$, $f_3 = -ie_1 + ie_2 + e_3$, $A = A_{380}$.

28.24. La transformation linéaire d'un espace euclidien ou hermitien muni du produit scalaire défini dans une certaine base possède dans cette base la matrice A ; trouver la matrice associée à la transformation adjointe dans la même base si :

1) le produit scalaire est celui du problème 25.4, 5), $A = A_{67}$;
2) le produit scalaire est celui du problème 25.18 2), $A = A_{68}$;
3) le produit scalaire est celui du problème 25.6. 8), $A = A_{103}$;
4) $(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, $A = A_{335}$;
5) $(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, $A = A_{336}$;
6) $(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + 5x_3\bar{y}_3 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + (1 - i) \times x_2\bar{y}_3 + (1 + i)\, x_3\bar{y}_2$, $A = A_{378}$.

28.25. La transformation linéaire d'un espace euclidien bidimensionnel associe aux vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ les vecteurs dont les matrices-colonnes de coordonnées sont respectivement $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$, la base est orthonormée. Trouver la matrice de la transformation adjointe dans cette base si :

1) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(3, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(2, 3)$;
2) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 4)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(0, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(-3, 7)$.

28.26. La transformation de l'espace euclidien des polynômes de degré $\leqslant 2$ muni du produit scalaire $(p, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$ associe au polynôme sa dérivée. Trouver la matrice de la transformation adjointe :

1) dans la base $(1, t, t^2)$;
2) dans la base $(1, t, 3t^2 - 1)$.

28.27. L'espace euclidien est un espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 2$ muni du produit scalaire défini par la formule $(p, q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, où $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $q(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$. Trouver la matrice associée à la transformation adjointe de la dérivation :

1) dans la base $(1, t, t^2)$; 2) dans la base $(1, t, 3t^2 - 1)$.

28.28. Dans l'espace euclidien des polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$ (voir problème 20.8, 4)) muni du produit scalaire $(p, q) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} p(t)\, q(t)\, dt$, la transformation φ associe à toute fonction sa

dérivée. Ecrire la formule de la transformation adjointe φ^* et trouver sa matrice $\| a_{ij} \|$ dans la base

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt\right).$$

28.29. Démontrer que l'opération de passage à la transformation adjointe dans un espace euclidien possède les propriétés:

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$; 2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

3) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$ (α est un nombre réel);

4) $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$;

5) $(p(\varphi))^* = p(\varphi^*)$ pour tout polynôme $p(t)$ à coefficients réels.

Formuler et démontrer les propriétés analogues de l'opération de passage à la transformation adjointe dans un espace hermitien.

28.30. Supposons que la transformation linéaire φ est régulière. Démontrer que la transformation adjointe φ^* est régulière et que $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

28.31. Quelle relation existe-t-il entre les déterminants de la transformation linéaire φ et de sa transformation adjointe φ^*:

1) dans un espace euclidien;

2) dans un espace hermitien?

28.32. Démontrer que le rang de la transformation adjointe φ^* est égal au rang de la transformation φ.

28.33. Soit A la matrice associée à la transformation linéaire φ dans la base $\boldsymbol{e}$ d'un espace euclidien (hermitien) et soit $\boldsymbol{f}$ une base biorthogonale à $\boldsymbol{e}$. Démontrer que la matrice associée à la transformation adjointe φ^* dans la base $\boldsymbol{f}$ est ${}^t A$ (respectivement ${}^t \bar{A}$).

28.34. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'une transformation linéaire φ coïncide avec le supplémentaire orthogonal du noyau de la transformation adjointe φ^*.

28.35. Vérifier la propriété de la transformation adjointe, formulée dans le problème 28.34, pour la transformation:

1) du problème 28.13, 3);

2) du problème 28.26.

28.36. Sur la base du résultat obtenu dans le problème 28.34, démontrer le théorème de Fredholm pour un système de n équations linéaires à n inconnues:

1) sur le corps des nombres réels;

2) sur le corps des nombres complexes.

28.37. Démontrer que:

1) le noyau de la transformation $\varphi^*\varphi$ coïncide avec celui de la transformation φ;

2) l'ensemble des valeurs de la transformation $\varphi\varphi^*$ coïncide avec celui de la transformation φ;

3) l'équation $\varphi^*\varphi(x) = \varphi^*(b)$ est résoluble pour tout vecteur b;

4) si l'équation $\varphi(x) = b$ est résoluble, l'ensemble de ses solu-

tions coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi^*\varphi(x) = \varphi^*(b)$.

28.38. Démontrer que:

1) les polynômes caractéristiques des transformations φ et φ^* d'un espace euclidien coïncident;

2) les coefficients du polynôme caractéristique de la transformation φ d'un espace hermitien sont des complexes conjugués des coefficients correspondants du polynôme caractéristique de la transformation φ^*;

3) si λ est une racine de multiplicité k du polynôme caractéristique de la transformation φ, il en est de même de $\bar{\lambda}$ pour la transformation φ^*.

28.39. Quelle relation existe-t-il entre les valeurs propres des transformations linéaires φ et φ^*:

1) dans un espace euclidien; 2) dans un espace hermitien?

28.40. Soit e un vecteur propre de la transformation linéaire φ d'un espace euclidien (hermitien), associé à la valeur propre λ, et soit f un vecteur propre de la transformation φ^*, associé à la valeur propre μ. Etant donné que $\lambda \neq \mu$ ($\lambda \neq \bar{\mu}$ dans le cas d'un espace hermitien), démontrer que e et f sont orthogonaux.

28.41. Supposons que pour la transformation linéaire φ il existe une base e de vecteurs propres. Démontrer que la base biorthogonale à e est une base de vecteurs propres de la transformation adjointe φ^*.

28.42. Démontrer que le nombre maximal des vecteurs propres linéairement indépendants de la transformation linéaire φ d'un espace euclidien (hermitien), associés à la valeur propre λ, coïncide avec le nombre maximal des vecteurs propres linéairement indépendants de la transformation adjointe φ^*, associés à la même valeur propre λ ($\bar{\lambda}$ dans le cas d'un espace hermitien).

28.43. Formuler et démontrer l'assertion analogue à celle du problème 28.42 pour le nombre maximal de tous les vecteurs propres linéairement indépendants des transformations φ et φ^*.

28.44. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un système maximal de vecteurs propres linéairement indépendants de la transformation linéaire φ. Existe-t-il toujours un système $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de vecteurs propres de la transformation adjointe φ^*, biorthogonal à $\{e_1, \ldots, e_m\}$?

28.45. Soit $\mathscr{L}$ un sous-espace invariant de la transformation linéaire φ.

1) Démontrer que le supplémentaire orthogonal $\mathscr{L}^\perp$ du sous-espace $\mathscr{L}$ est un sous-espace invariant de la transformation adjointe φ^*.

2) Est-ce que dans le cas général $\mathscr{L}$ est un sous-espace invariant de la transformation adjointe φ^*?

28.46. Ecrire l'équation linéaire définissant le sous-espace invariant bidimensionnel de la transformation définie dans une base

orthonormée de l'espace euclidien tridimensionnel par la matrice:
1) A_{259}; 2) A_{337}; 3) A_{338}; 4) A_{339}; 5) A_{340}.

28.47. Soit $\mathscr{L}$ un sous-espace invariant de la transformation linéaire φ de l'espace euclidien. Notons φ_1 la restriction de φ à $\mathscr{L}$, et φ_2^* la restriction de la transformation φ^* à $\mathscr{L}^\perp$ (voir problème 28.45). Etant donné que $p(\lambda)$, $p_1(\lambda)$ et $p_2(\lambda)$ sont les polynômes caractéristiques des transformations φ, φ_1 et φ_2^*, démontrer que $p(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$.

28.48. Soient $\mathscr{L}$ un sous-espace invariant de la transformation linéaire φ, π la projection orthogonale de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{L}$, φ_1 la restriction de φ à $\mathscr{L}$, φ_1^* la transformation adjointe de φ_1 dans $\mathscr{L}$.
1) Démontrer que $\varphi_1^*\pi = \pi\varphi^*$.
2) Donner un exemple de la transformation φ pour laquelle $\varphi \neq \varphi^*$, mais $\varphi_1 = \varphi_1^*$.

28.49. Démontrer que pour toute transformation linéaire d'un espace hermitien n-dimensionnel $\mathscr{E}$ il existe:
1) un sous-espace invariant $(n-1)$-dimensionnel;
2) une suite $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n = \mathscr{E}$ de sous-espaces invariants tels que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{L}_n$, $\dim \mathscr{L}_k = k$ $(k = 1, \ldots, n)$;
3) une base dans laquelle la matrice de la transformation est triangulaire;
4) une base orthonormée dans laquelle la matrice de la transformation est triangulaire.

28.50. Démontrer que les assertions 1), 2), 3) du problème 28.49 sont vraies pour toute transformation linéaire d'un espace vectoriel n-dimensionnel complexe.

28.51. Démontrer qu'une transformation linéaire
1) de l'espace euclidien n-dimensionnel,
2) de l'espace vectoriel réel n-dimensionnel possède un sous-espace invariant $(n-1)$-dimensionnel si et seulement si au moins un des nombres caractéristiques de cette transformation est réel.

28.52. Démontrer que les assertions du problème 28.49 sont justes pour une transformation linéaire φ d'un espace euclidien n-dimensionnel si tous les nombres caractéristiques de φ sont réels.

28.53. Démontrer que les assertions 1), 2), 3) du problème 28.49 sont vraies pour une transformation linéaire φ d'un espace vectoriel réel n-dimensionnel si tous les nombres caractéristiques de φ sont réels.

28.54. Construire une base orthonormée dans laquelle la matrice de la transformation linéaire φ d'un espace euclidien tridimensionnel soit triangulaire supérieure et trouver cette matrice si φ est définie dans une base orthonormée par la matrice:
1) A_{337}; 2) A_{338}; 3) A_{259}; 4) A_{341}; 5) A_{342}.

28.55. Trouver toutes les bases orthonormées dans chacune desquelles la matrice de la transformation linéaire du problème 28.54, 5) est triangulaire supérieure et calculer ces matrices.

§ 29. Transformations auto-adjointes

29.1. Déterminer si les transformations des problèmes ci-dessous sont auto-adjointes (ou trouver les conditions sous lesquelles elles deviennent auto-adjointes:

1) 28.11,1); 2) 28.11,2); 3) 28.12,1);
4) 28.12,2); 5) 28.12,3); 6) 28.13,1);
7) 28.13,2); 8) 28.13,3); 9) 28.14,1);
10) 28.14,2); 11) 28.17,1); 12) 28.17,2);
13) 28.18,1); 14) 28.18,2); 15) 28.20, $n > 0$;
16) 28.27; 17) 28.28, $n > 0$.

29.2. La transformation φ d'un espace euclidien $\mathscr{E}$ est définie par la formule $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j) g_j$, où $\{f_1, \ldots, f_m\}$ et $\{g_1, \ldots, g_m\}$ sont des systèmes de vecteurs linéairement indépendants. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que φ soit auto-adjointe.

29.3. Soient A la matrice de la transformation linéaire φ dans une certaine base, Γ la matrice de Gram de cette base. A quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire la matrice A pour que φ soit une transformation auto-adjointe:

1) de l'espace euclidien;
2) de l'espace hermitien?

Etudier séparément le cas où la base est orthonormée.

29.4. La transformation linéaire est-elle auto-adjointe si elle est définie dans une base orthonormée par la matrice suivante:

1) A_{16}; 2) A_{15}; 3) A_{20}; 4) A_{19};
5) A_{17}; 6) A_{242}; 7) A_{209}; 8) A_{203}?

29.5. La transformation linéaire est-elle auto-adjointe si elle est définie dans une base orthonormée de l'espace hermitien par la matrice:

1) A_{92}; 2) A_{94}; 3) A_{86}; 4) A_{98};
5) A_{87}; 6) A_{379}; 7) A_{377}?

29.6. Est-ce que la matrice d'une transformation auto-adjointe de l'espace euclidien peut ne pas être symétrique dans une certaine base?

29.7. La transformation φ d'un espace euclidien ou hermitien est définie dans une certaine base par la matrice A ; Γ est la matrice de Gram de cette base. Déterminer si φ est une transformation auto-adjointe lorsque:

1) $A = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$, $\Gamma = \left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right\|$;

2) $A = \left\|\begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$, $\Gamma = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\|$;

3) $A=\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$;

4) $A=\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

6) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$;

7) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$;

8) $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 2 & -3i & 2 \end{Vmatrix}$, $\Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{Vmatrix}$.

29.8. Démontrer que:

1) la combinaison linéaire à coefficients réels de transformations auto-adjointes est une transformation auto-adjointe;

2) le produit d'une transformation auto-adjointe non nulle d'un espace hermitien par le nombre α est une transformation auto-adjointe si et seulement si α est réel.

29.9. Démontrer que la transformation inverse de la transformation auto-adjointe régulière est une transformation auto-adjointe.

29.10. Soit φ une transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien). Vérifier que les transformations suivantes sont auto-adjointes:

1) $\varphi+\varphi^*$; 2) $i(\varphi-\varphi^*)$ (dans l'espace hermitien);
3) $\varphi^*\varphi$; 4) $\varphi\varphi^*$.

29.11. Soient φ et ψ des transformations auto-adjointes. Démontrer que:

1) $(\varphi\psi+\psi\varphi)$ est une transformation auto-adjointe;

2) $i(\varphi\psi-\psi\varphi)$ est une transformation auto-adjointe (dans l'espace hermitien);

3) $\psi\varphi$ est une transformation auto-adjointe si et seulement si φ et ψ sont commutables.

29.12. On sait que l'espace euclidien (ou hermitien) $\mathscr{E}$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Démontrer que:

1) la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{L}_1$ parallèlement à $\mathscr{L}_2$ est une transformation auto-adjointe si et seulement si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont orthogonaux;

2) la symétrie par rapport à $\mathscr{L}_1$ parallèlement à $\mathscr{L}_2$ est une transformation auto-adjointe si et seulement si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont orthogonaux.

29.13. Soient $\mathscr{E}$ un espace hermitien, φ une transformation linéaire. Démontrer que:

1) la valeur de la fonction $(\varphi(x), x)$ est réelle pour tout vecteur x de $\mathscr{E}$ si la transformation φ est auto-adjointe;

2) φ est auto-adjointe si le produit scalaire $(\varphi(x), x)$ est réel pour tout vecteur x de $\mathscr{E}$.

29.14. Démontrer que toutes les valeurs propres d'une transformation auto-adjointe de l'espace hermitien sont réelles.

29.15. Démontrer que tous les nombres caractéristiques d'une transformation auto-adjointe de l'espace euclidien sont réels.

29.16. Démontrer que les vecteurs propres d'une transformation auto-adjointe sont orthogonaux s'ils sont associés à deux valeurs propres distinctes.

29.17. Démontrer que le supplémentaire orthogonal du sous-espace invariant d'une transformation auto-adjointe φ est également un sous-espace invariant de φ.

29.18. Soient A une matrice symétrique (ou hermitienne) d'ordre n, φ une transformation linéaire de l'espace arithmétique réel (complexe) n-dimensionnel muni du produit scalaire standard. Sachant que φ est définie par la matrice A dans la base standard de cet espace, démontrer que:

1) tous les nombres caractéristiques de la matrice A sont réels;

2) il existe une base orthonormée de vecteurs propres de la transformation φ.

29.19. Démontrer que pour toute transformation auto-adjointe il existe une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles.

29.20. Est-ce qu'une transformation auto-adjointe peut avoir une base non orthogonale formée par des vecteurs propres?

29.21. La transformation linéaire φ possède une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles. Est-ce que φ est une transformation auto-adjointe?

29.22. La transformation linéaire φ d'un espace vectoriel réel (ou complexe) $\mathscr{L}$ possède une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles. Montrer qu'on peut introduire dans $\mathscr{L}$ le produit scalaire par rapport auquel φ devient une transformation auto-adjointe.

29.23. Soit A la matrice associée à la transformation auto-adjointe φ dans une certaine base de l'espace euclidien (ou hermitien) n-dimensionnel, et soit λ_0 une racine de multiplicité k du polynôme caractéristique de φ. Démontrer que le rang de la matrice $A - \lambda_0 E$ vaut $n - k$.

29.24. Trouver les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la transformation auto-adjointe φ définie dans

une base orthonormée par la matrice:

1) $\begin{Vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{Vmatrix}$;

8) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$; 9) $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 10) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

11) $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; 12) $\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$;

13) $\begin{Vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$; 14) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

15) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$; 16) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{Vmatrix}$;

17) $\begin{Vmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{Vmatrix}$; 18) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

19) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 20) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$; 21) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

29.25. Trouver les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la transformation qui est:

1) une homothétie de rapport k;
2) une projection orthogonale sur le sous-espace $\mathcal{L}$;
3) une symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $\mathcal{L}$.

29.26. 1) Soient φ une transformation auto-adjointe, $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de ses vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Démontrer que $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x, f_j) f_j$ pour tout vecteur x.

2) Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de l'espace $\mathcal{E}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels. Démontrer que la formule précé-

dente définit une transformation auto-adjointe φ dont les vecteurs propres $f_1, \ldots, f_n$ sont associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

29.27. La transformation φ de l'espace vectoriel $\mathcal{P}^{(n)}$ des polynômes de degré au plus égal à n ($n \geqslant 1$) associe au polynôme sa dérivée. Montrer que la transformation $\alpha\varphi$ n'est pas auto-adjointe quels que soient le nombre complexe $\alpha \neq 0$ et le produit scalaire défini dans $\mathcal{P}^{(n)}$.

29.28. Démontrer que toute transformation linéaire φ d'un espace hermitien peut être représentée univoquement sous la forme $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont des transformations auto-adjointes. Exprimer φ_1 et φ_2 en fonction de φ.

29.29. Soit la transformation $\varphi + (\alpha + i\beta)\,\iota$, où φ est une transformation auto-adjointe, ι la transformation identique de l'espace hermitien, α et β sont des nombres réels, $\beta \neq 0$. Démontrer qu'elle est inversible.

29.30. Démontrer que le système maximal libre de vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles d'une transformation auto-adjointe est une base de l'ensemble des valeurs de cette transformation.

29.31. Soit φ une transformation auto-adjointe de l'espace $\mathcal{E}$. Démontrer que $\mathcal{E}$ est la somme orthogonale de l'ensemble des valeurs et du noyau de la transformation φ.

29.32. Démontrer que les transformations auto-adjointes φ et ψ sont commutables si et seulement si elles possèdent une base orthonormée commune de vecteurs propres.

29.33. Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres d'une transformation auto-adjointe φ de l'espace n-dimensionnel $\mathcal{E}$. Démontrer que:

1) $\lambda_1 (x, x) \leqslant (\varphi (x), x) \leqslant \lambda_n (x, x)$ pour tout vecteur x;

2) $\lambda_1 = \min\limits_{\substack{x \in \mathcal{E} \\ x \neq 0}} \dfrac{(\varphi (x), x)}{(x, x)}, \quad \lambda_n = \max\limits_{\substack{x \in \mathcal{E} \\ x \neq 0}} \dfrac{(\varphi (x), x)}{(x, x)}$,

la plus petite et la plus grande valeurs étant atteintes pour les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_n respectivement;

3) si pour un vecteur g non nul

$$\frac{(\varphi (g), g)}{(g, g)} = \lambda_1 \quad \text{ou} \quad \frac{(\varphi (g), g)}{(g, g)} = \lambda_n,$$

g est un vecteur propre de la transformation φ et $\varphi (g) = \lambda_1 g$ ou $\varphi (g) = \lambda_n g$ respectivement.

29.34. Démontrer les assertions:

1) si φ est une transformation auto-adjointe et l'égalité $(\varphi (x), x) = 0$ est vérifiée pour tous les vecteurs de l'espace, φ est une transformation nulle;

2) si φ et ψ sont des transformations auto-adjointes et $(\varphi(x), x) = (\psi(x), x)$ pour tous les vecteurs de l'espace, on a $\varphi = \psi$.

29.35 1) Soit φ une transformation linéaire de l'espace hermitien $\mathscr{E}$. Démontrer que φ est nulle si pour tous les vecteurs x de $\mathscr{E}$ on a $(\varphi(x), x) = 0$.

2) Cette assertion est-elle vraie pour un espace euclidien?

29.36. Démontrer que tous les nombres caractéristiques de la matrice de Gram d'un système fini de vecteurs:

1) sont positifs;

2) sont strictement positifs si et seulement si ce système de vecteurs est libre.

29.37. Soient Γ_1 la matrice de Gram du système des vecteurs $f_1, \ldots, f_k$, Γ_2 la matrice de Gram du système des vecteurs $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_l$ $(k < l)$ et $\lambda_{j\,\min}$ et $\lambda_{j\,\max}$ le plus petit et le plus grand nombres caractéristiques de la matrice Γ_j, $j = 1, 2$. Démontrer que:

1) $\lambda_{2\,\min} \leqslant \lambda_{1\,\min}$; 2) $\lambda_{1\,\max} \leqslant \lambda_{2\,\max}$.

29.38. Supposons que dans une base orthonormée la matrice $A = \| a_{ij} \|$ associée à la transformation auto-adjointe φ de l'espace euclidien n-dimensionnel a une « diagonale dominante »

$$a_{jj} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Démontrer que toutes les valeurs propres de la transformation φ sont strictement positives et qu'en particulier, φ est inversible.

29.39. Soit φ une transformation auto-adjointe dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Démontrer que la fonction associant à chaque couple de vecteurs x, y le nombre $(\varphi(x), y)$, peut servir de produit scalaire.

29.40. Soient φ et ψ des transformations auto-adjointes, toutes les valeurs propres de ψ étant strictement positives. Démontrer que:

1) la transformation $\psi\varphi$ est une transformation auto-adjointe par rapport au produit scalaire $(x, y)_1 = (\psi^{-1}(x), y)$, toutes les valeurs propres de $\psi\varphi$ sont réelles et il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de $\psi\varphi$ qui est orthonormée par rapport au produit scalaire $(x, y)_1$;

2) la transformation $\varphi\psi$ est une transformation auto-adjointe par rapport au produit scalaire $(x, y)_2 = (\psi(x), y)$, les valeurs propres de $\varphi\psi$ coïncident avec celles de $\psi\varphi$, et $(\psi^{-1}(e_1), \ldots, \psi^{-1}(e_n))$ est une base de vecteurs propres de $\varphi\psi$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base de 1).

29.41. Soient φ et ψ deux transformations auto-adjointes telles que toutes les valeurs propres de φ sont positives et toutes les valeurs propres de ψ sont strictement positives. Démontrer que:

1) toutes les valeurs propres de $\psi\varphi$ sont positives;

2) si $\lambda_{\min}(\varphi)$, $\lambda_{\min}(\psi)$ sont des valeurs propres minimales et $\lambda_{\max}(\varphi)$, $\lambda_{\max}(\psi)$ des valeurs propres maximales des transformations φ et ψ respectivement, on a pour toute valeur propre λ $(\psi\varphi)$ de la transformation $\psi\varphi$ l'estimation

$$\lambda_{\min}(\varphi)\cdot\lambda_{\min}(\psi) \leqslant \lambda\ (\psi\varphi) \leqslant \lambda_{\max}(\varphi)\cdot\lambda_{\max}(\psi).$$

29.42. Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux sous-espaces d'un espace euclidien dont l'intersection contient un seul élément nul, et soient $(f_1, \ldots, f_k)$ une base orthonormée de $\mathscr{L}_1$ et $f'_1, \ldots, f'_k$ les projetés orthogonaux des vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ sur $\mathscr{L}_2$. Démontrer que le cosinus de l'angle des sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ est égal à la racine carrée de la valeur propre maximale de la matrice de Gram du système des vecteurs $f'_1, \ldots, f'_k$.

§ 30. Transformations orthogonales et unitaires

30.1. On sait que la transformation linéaire φ d'un espace euclidien (hermitien) $\mathscr{E}$ conserve la longueur des vecteurs, c'est-à-dire que tous les vecteurs x de $\mathscr{E}$ vérifient l'égalité $|\varphi(x)| = |x|$. Démontrer que φ conserve aussi le produit scalaire, c'est-à-dire que $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ pour tous les vecteurs x, y de $\mathscr{E}$.

30.2. Déterminer si la transformation définie dans les problèmes ci-dessous est (ou trouver les conditions sous lesquelles elle est) orthogonale ou unitaire:

1) 28.11,1); 2) 28.11,2); 3) 28.12,1);
4) 28.12,2); 5) 28.12,3); 6) 28.13,1);
7) 28.13,2); 8) 28.13,3); 9) 28.14,1);
10) 28.14,2); 11) 28.17,1); 12) 28.17,2);
13) 28.18,1); 14) 28.18,2); 15) 28.20.

30.3. Soit $\mathscr{L}$ un sous-espace vectoriel non nul de l'espace euclidien (hermitien). Est-ce que les transformations ci-dessous sont orthogonales (unitaires):

1) la projection orthogonale sur $\mathscr{L}$?

2) la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{L}$?

30.4. Démontrer que:

1) la transformation orthogonale (unitaire) associe à chaque base orthonormée une base orthonormée;

2) toute transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien) associant à une base orthonormée une autre base orthonormée est une transformation orthogonale (unitaire).

30.5. La transformation linéaire φ de l'espace euclidien (hermitien) associe à une base $(f_1, \ldots, f_n)$ le système des vecteurs $g_1, \ldots, g_n$ $(g_i = \varphi(f_i),\ i = 1, \ldots, n)$. Montrer que φ est une transformation orthogonale (unitaire) si et seulement si les matrices de Gram des systèmes $f_1, \ldots, f_n$ et $g_1, \ldots, g_n$ coïncident.

30.6. Déterminer si la transformation linéaire φ d'un espace euclidien n-dimensionnel est orthogonale si elle agit sur les vecteurs de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ suivant les formules:

$n = 2$:

1) $\varphi(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi(e_2) = e_2;$

2) $\varphi(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi(e_2) = e_1 - e_2;$

3) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2);$

4) $\varphi(e_1) = \frac{1}{13}(5e_1 - 12e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{13}(12e_1 + 5e_2);$

5) $\varphi(e_1) = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{5}(4e_1 + 3e_2).$

$n = 3$:

6) $\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad \varphi(e_2) = 2e_1 + e_2 - 3e_3, \quad \varphi(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + e_3;$

7) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), \quad \varphi(e_3) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1 + 4e_2 + e_3);$

8) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 + \sqrt{3}\,e_3), \quad \varphi(e_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3);$

9) $\varphi(e_1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1 + 4e_2 - 3e_3), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1 - 4e_2 + 3e_3),$
$\varphi(e_3) = \frac{1}{5}(3e_2 + 4e_3).$

$n = 4$:

10) $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4),$
$\varphi(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \quad \varphi(e_4) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4).$

30.7. Déterminer si la transformation linéaire φ d'un espace hermitien n-dimensionnel est unitaire si elle agit sur les vecteurs de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ suivant les formules:

$n = 2$:

1) $\varphi(e_1) = e_1 + ie_2, \quad \varphi(e_2) = ie_1;$

2) $\varphi(e_1) = e_1 + ie_2, \quad \varphi(e_2) = ie_1 + e_2;$

3) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + ie_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(ie_1 + 2e_2);$

4) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + (1 + 2i)\,e_2), \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5e_1 - 2(1 + 2i)\,e_2):$

5) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + (1+2i)e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}((1+2i)e_1 - 2e_2)$.

$n = 3$:

6) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{2}(ie_1 + e_2 - i\sqrt{2}e_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2 + \sqrt{2}e_3)$;

7) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}(2ie_1 + e_2 - 2ie_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - 2ie_2 + 2e_3)$.

30.8. La transformation linéaire φ d'un espace euclidien associe au système de vecteurs définis dans une base orthonormée par les matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ le système de vecteurs définis dans la même base par les matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ respectivement. Vérifier si la transformation φ est orthogonale.

1) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(3, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 3)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(5, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(3, 1)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(2, -1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(-1, 1)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(1, 2)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(1, 1)$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, 2, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 1, 0)$, $\boldsymbol{a}_3 = {}^t(0, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(2, 2, 1)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = {}^t(-1, 1, 0)$.

30.9. La transformation linéaire φ de l'espace arithmétique hermitien muni du produit scalaire standard associe aux colonnes de la matrice A les colonnes correspondantes de la matrice B. Vérifier si la transformation φ est unitaire.

1) $A = A_{71}$, $B = A_{72}$; 2) $A = A_{71}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{73}$; 3) $A = A_{100}$, $B = \frac{1}{\sqrt{10}} A_{101}$; 4) $A = A_{343}$, $B = \frac{1}{3} A_{344}$; 5) $A = A_{345}$, $B = A_{346}$; 6) $A = A_{381}$, $B = A_{382}$.

30.10. Soient φ une transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien), φ^* la transformation adjointe. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes:

1) la transformation φ est orthogonale (unitaire);

2) $\varphi^*\varphi$ est une transformation identique;

3) la transformation φ est régulière et la transformation inverse φ^{-1} coïncide avec φ^*;

4) la transformation φ^* est orthogonale (unitaire);

5) la transformation $\varphi\varphi^*$ est une transformation identique.

30.11. Soient A la matrice associée à la transformation linéaire φ dans une certaine base, Γ la matrice de Gram de cette base. A quelles conditions nécessaires et suffisantes doit satisfaire la matrice A pour que φ soit:

1) une transformation orthogonale de l'espace euclidien;

2) une transformation unitaire de l'espace hermitien?

Etudier séparément le cas d'une base orthonormée.

30.12. Soit A la matrice associée dans une base orthonormée à la transformation linéaire φ de l'espace euclidien (hermitien) n-dimensionnel, et soit $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$) l'espace arithmétique réel (complexe) muni du produit scalaire ordinaire. Montrer que chacune des conditions est nécessaire et suffisante pour que φ soit orthogonale (unitaire):

1) les colonnes de la matrice A, considérées comme vecteurs de $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$) forment une base orthonormée;

2) les lignes de la matrice A, considérées comme vecteurs de $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$) forment une base orthonormée.

30.13. Vérifier si est orthogonale la transformation linéaire définie dans une base orthonormée de l espace euclidien par la matrice:

1) A_{16}; 2) A_{63}; 3) A_{61}; 4) A_{62}; 5) $\frac{1}{\sqrt{5}}A_{253}$;

6) $\frac{1}{3}A_{202}$; 7) $\frac{1}{3}A_{203}$; 8) A_{320}; 9) A_{207}.

30.14. Vérifier si est unitaire la transformation linéaire définie dans une base orthonormée de l'espace hermitien par la matrice:

1) A_{82}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{88}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}A_{102}$;

4) A_{378}; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{486}$; 6) $\frac{1}{2}A_{472}$.

30.15. Est-ce que la matrice d'une transformation orthogonale (unitaire) peut dans une certaine base être non orthogonale (non unitaire)?

30.16. La transformation linéaire φ d'un espace euclidien $\mathcal{E}$ est définie dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$ par la matrice A; $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Déterminer si la transformation φ est orthogonale lorsque

1) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2$, $A = \frac{1}{5}A_{74}$;

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $A = A_{61}$;

3) $f_1 = 3e_1 + e_2$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = \frac{1}{\sqrt{10}}A_{75}$;

4) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$, $A = \frac{1}{3}A_{347}$;

5) $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$, $A = A_{348}$;

6) $f_1 = e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, $f_2 = e_2 + \sqrt{2}e_3$, $f_3 = e_3$, $A = A_{349}$.

30.17. Démontrer que la matrice carrée $U = R + iQ$ d'ordre n, où R et Q sont des matrices réelles, est unitaire si et seulement si est orthogonale la matrice carrée réelle $D = \begin{Vmatrix} R & -Q \\ Q & R \end{Vmatrix}^{\square}$.

30.18. Démontrer que le module du déterminant de la matrice d'une transformation orthogonale (unitaire) vaut 1.

30.19. Démontrer que l'ensemble de toutes les transformations orthogonales (unitaires) d'un espace euclidien (hermitien) est un groupe pour l'opération de multiplication des transformations.

30.20. Est-ce que les sous-ensembles ci-dessous sont des sous-groupes dans le groupe de toutes les transformations orthogonales d'un espace euclidien :

1) le sous-ensemble des transformations dont le déterminant vaut 1 ;

2) le sous-ensemble des transformations dont le déterminant vaut -1 ?

30.21. Soient $\mathscr{E}$ un espace euclidien (hermitien) et $\mathscr{L}$ l'un de ses sous-espaces. On considère dans le groupe $\mathscr{G}$ des transformations orthogonales (unitaires) de $\mathscr{E}$ un ensemble de transformations pour lesquelles $\mathscr{L}$ est un sous-espace invariant. Cet ensemble est-il un sous-groupe de $\mathscr{G}$?

30.22. 1) Montrer que la somme de deux transformations orthogonales (unitaires) n'est pas en général une transformation orthogonale (unitaire).

2) Donner un exemple où la somme de deux transformations orthogonales est une transformation orthogonale.

30.23. Soient φ une transformation orthogonale (unitaire), α un nombre réel (complexe). Démontrer que $\alpha\varphi$ est orthogonale (unitaire) si et seulement si $|\alpha| = 1$.

30.24. La transformation linéaire φ d'un espace euclidien (hermitien) associe à tout couple de vecteurs orthogonaux un couple de vecteurs orthogonaux. Démontrer que $\varphi = \alpha\psi$, où $\alpha \geqslant 0$ et ψ est une transformation orthogonale (unitaire).

30.25. 1) Démontrer que toute transformation de l'espace euclidien (hermitien) qui conserve le produit scalaire est linéaire.

2) Montrer qu'une transformation de l'espace euclidien (hermitien) qui ne conserve que la longueur des vecteurs n'est pas nécessairement linéaire.

30.26. Démontrer que :

1) les valeurs propres d'une transformation orthogonale ne peuvent être égales qu'à 1 ou à -1 ;

2) les valeurs propres d'une transformation unitaire, et partant ses nombres caractéristiques, sont égaux en module à 1 ;

3) tous les nombres caractéristiques d'une transformation orthogonale sont égaux en module à 1.

30.27. Démontrer que les vecteurs propres d'une transformation orthogonale (unitaire) sont orthogonaux s'ils sont associés aux valeurs propres différentes.

30.28. Est-ce qu'une transformation orthogonale peut :

1) ne pas avoir de vecteurs propres;

2) posséder une base de vecteurs propres;

3) posséder au moins un vecteur propre mais ne pas avoir de base formée de vecteurs propres?

Donner des exemples appropriés.

30.29. Trouver les valeurs propres et un système orthonormé maximal de vecteurs propres de la transformation orthogonale définie dans une base orthonormée de l'espace euclidien par la matrice:

1) A_{61}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{69}$; 3) A_{62}; 4) A_{70}; 5) A_{77};

6) A_{76}; 7) A_{259}; 8) $\frac{1}{3}A_{350}$; 9) $\frac{1}{3}A_{347}$;

10) $\frac{1}{4}A_{351}$; 11) $\frac{1}{2}A_{352}$; 12) A_{493}; 13) $\frac{1}{2}A_{468}$.

30.30. Démontrer que le supplémentaire orthogonal $\mathcal{L}^{\perp}$ d'un sous-espace invariant $\mathcal{L}$ de la transformation orthogonale (unitaire) φ est également un sous-espace invariant de φ.

30.31. Démontrer que pour toute transformation unitaire il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

30.32. Trouver les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de la transformation unitaire définie dans une base orthonormée de l'espace hermitien par la matrice:

1) A_{61}; 2) A_{62}; 3) A_{77}; 4) A_{259};

5) $\frac{1}{3}A_{347}$; 6) $\frac{1}{4}A_{351}$; 7) $\frac{1}{2}A_{352}$; 8) A_{493};

9) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{Vmatrix}$; 10) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2+i & 2i \\ -2 & 1+2i \end{Vmatrix}$;

11) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{Vmatrix}$.

30.33. Une transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien) possède une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1. Démontrer que cette transformation est orthogonale (unitaire).

30.34. Une transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien) est en même temps orthogonale (unitaire) et auto-adjointe. Etablir sa signification géométrique.

30.35. Démontrer que la transformation φ définie dans une base orthonormée de l'espace euclidien par la matrice:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{69}$; 2) A_{70}; 3) A_{76}; 4) $\frac{1}{3}A_{350}$; 5) A_{493}

est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace $\mathcal{L}$. Trouver ce sous-espace.

30.36. Démontrer que la matrice associée dans une base orthonormée à la transformation orthogonale de l'espace euclidien bidimensionnel est de la forme A_{77} ou A_{76}. En s'inspirant de ce fait, tirer au clair le sens géométrique d'une transformation orthogonale arbitraire de l'espace euclidien bidimensionnel.

30.37. Démontrer que si la transformation linéaire φ d'un espace euclidien (hermitien) possède deux quelconques des propriétés suivantes:

a) φ est une transformation auto-adjointe,

b) φ est une transformation unitaire,

c) φ^2 est une transformation identique,

elle possède également la troisième. Donner une interprétation géométrique de cette transformation.

30.38. Supposons que dans une base orthonormée la matrice de la transformation unitaire φ est réelle et soit f un vecteur propre de φ associé à la valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Représentons f sous la forme: $f = u + iv$, où les vecteurs u et v possèdent dans la même base des coordonnées réelles. Démontrer que:

1) le vecteur $g = u - iv$ est un vecteur propre de la transformation φ associé à la valeur propre $\lambda = \alpha - i\beta$;

2) les vecteurs u et v sont orthogonaux, $|u| = |v| = |f|/\sqrt{2}$, $\varphi(u) = \alpha u - \beta v$, $\varphi(v) = \beta u + \alpha v$.

30.39. 1) Soient φ une transformation orthogonale, $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) la racine complexe de son équation caractéristique. Démontrer qu'il existe des vecteurs non nuls u, v tels que $(u, v) = 0$, $\varphi(u) = \alpha u - \beta v$, $\varphi(v) = \beta u + \alpha v$.

2) Démontrer que toute transformation orthogonale possède un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.

3) Démontrer que pour toute transformation orthogonale φ de l'espace euclidien il existe une base canonique ayant les propriétés suivantes: cette base est orthonormée et la matrice de la transformation φ y est quasi diagonale avec des blocs du premier ordre de la forme $\|\pm 1\|$ et des blocs du deuxième ordre de la forme $\begin{Vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix}$ ($\gamma \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) situés sur la diagonale principale (les blocs d'une des formes peuvent manquer).

30.40. La transformation orthogonale φ est définie dans une base orthonormée de l'espace euclidien par la matrice:

1) A_{61}; 2) A_{70}; 3) A_{77}; 4) A_{259};

5) $\frac{1}{3}A_{347}$; 6) $\frac{1}{4}A_{351}$; 7) $\frac{1}{2}A_{352}$; 8) A_{493}.

Trouver la base canonique et la matrice de la transformation φ dans cette base (voir problème 30.39).

30.41. Démontrer que dans un espace euclidien tridimensionnel:

1) toute transformation orthogonale de déterminant 1 est une rotation par rapport à un axe;

2) toute transformation orthogonale de déterminant -1 est le produit de deux transformations: une rotation par rapport à un axe et une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace bidimensionnel orthogonal à cet axe.

30.42. Démontrer les assertions suivantes (par ι est désignée la transformation identique);

1) si φ est une transformation auto-adjointe de l'espace hermitien, la transformation $\varphi - i\iota$ est inversible, la transformation $\psi = (\varphi + i\iota)(\varphi - i\iota)^{-1}$ est unitaire, toutes les valeurs propres de ψ sont différentes de 1 et $\varphi = i(\psi + \iota)(\psi - \iota)^{-1}$;

2) si ψ est une transformation unitaire et ses valeurs propres sont différentes de 1, la transformation $\varphi = i(\psi + \iota)(\psi - \iota)^{-1}$ est auto-adjointe et $\psi = (\varphi + i\iota)(\varphi - i\iota)^{-1}$.

30.43. Démontrer que:

1) la similitude des transformations linéaires orthogonales (unitaires) est une relation d'équivalence (c'est-à-dire elle est réflexive, symétrique et transitive);

2) si les transformations linéaires orthogonales (unitaires) φ et ψ sont semblables, il en est de même des transformations adjointes φ^* et ψ^*;

3) si les transformations orthogonales (unitaires) φ et ψ sont semblables et φ est une transformation auto-adjointe, ψ est aussi une transformation auto-adjointe.

30.44. Soient φ et ψ deux transformations linéaires d'un espace euclidien (hermitien). Démontrer que:

1) si φ et ψ sont semblables, il existe pour toute base orthonormée $\boldsymbol{e}$ une base orthonormée $\boldsymbol{f}$ telle que la matrice de la transformation ψ dans la base $\boldsymbol{f}$ est égale à la matrice de la transformation φ dans la base $\boldsymbol{e}$;

2) s'il existe des bases orthonormées $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ telles que la matrice de la transformation ψ dans la base $\boldsymbol{f}$ coïncide avec la matrice de la transformation φ dans la base $\boldsymbol{e}$, les transformations φ et ψ sont semblables.

30.45. Démontrer que:

1) deux transformations orthogonales (unitaires) auto-adjointes sont semblables,

2) deux transformations unitaires sont semblables,

3) deux transformations orthogonales sont semblables si et seulement si les polynômes caractéristiques de ces transformations coïncident.

30.46. Soit φ une transformation linéaire de l'espace euclidien (hermitien). Démontrer que les transformations $\varphi^*\varphi$ et $\varphi\varphi^*$ sont semblables.

CHAPITRE XII

FONCTIONS SUR L'ESPACE VECTORIEL

§ 31. Fonctions linéaires

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *fonction linéaire sur l'espace vectoriel, matrice-ligne des coefficients de la fonction linéaire, opérations d'addition et de multiplication par un nombre* pour les fonctions linéaires et propriétés de ces opérations, *espace dual, base biorthogonale.*

Notations: $\mathcal{L}_n$ est un espace vectoriel n-dimensionnel, $\mathcal{R}_n$ l'espace arithmétique n-dimensionnel, $\mathcal{R}_{(n,n)}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $\mathcal{P}^{(n)}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On note $\mathcal{L}_n^*$, $\mathcal{R}_n^*$, $\mathcal{R}_{(n,n)}^*$, $\mathcal{P}^{(n)*}$ les espaces duaux respectifs.

La base canonique de l'espace $\mathcal{R}_{(n,n)}$ est composée des matrices E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ (voir introduction au § 15). Rapportés à cette base, les coefficients de la fonction linéaire f définie sur $\mathcal{R}_{(n,n)}$ se disposent tout naturellement en formant une matrice: le coefficient $c_{ij} = f(E_{ij})$ se trouve à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. La matrice $C = \| c_{ij} \|$ sera appelée *matrice des coefficients de la fonction linéaire.*

Dans quelques problèmes se rapportant aux fonctions linéaires sur un espace vectoriel de vecteurs (sur un espace géométrique noté $\mathscr{E}_2$ ou $\mathscr{E}_3$ suivant la dimension), on utilise la notion de projeté orthogonal d'un vecteur. Rappelons sa définition.

On appelle *projeté orthogonal vectoriel* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une droite ou un plan le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$, où A_1 et B_1 sont les projetés orthogonaux des points A et B. On appelle *projeté scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite ou le plan* la longueur de son projeté vectoriel, c'est-à-dire le nombre $|\overrightarrow{A_1B_1}|$. On appelle *projeté scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur un axe* (c'est-à-dire sur une droite orientée par le vecteur non nul a) le nombre $\pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$, où le signe + ou — est choisi suivant que les vecteurs a et $\overrightarrow{A_1B_1}$ sont de même sens ou de sens opposés.

Définition de la fonction linéaire. Exemples de fonctions linéaires (problèmes 31.1 à 31.32)

31.1. Quelles conditions distinguent les fonctions linéaires des autres applications linéaires?

31.2. Comment se transforme la matrice-ligne des coefficients de la fonction linéaire avec le changement de base?

31.3. Comment se transforme la base biorthogonale si la base donnée est transformée par la matrice de passage S?

31.4. Ecrire la matrice-ligne des coefficients de la fonction linéaire nulle.

31.5. Est-ce qu'une fonction linéaire f définie sur $\mathscr{L}_n$ peut vérifier pour tout $x \in \mathscr{L}_n$:

1) l'inégalité f $(x) > 0$; 2) l'inégalité f $(x) \geqslant 0$;

3) l'égalité f $(x) = \alpha$?

31.6. Soient une fonction linéaire f sur $\mathscr{L}_n$ et un nombre α. Est-ce qu'il existe toujours un vecteur x de $\mathscr{L}_n$ tel que f $(x) = \alpha$?

31.7. Déterminer l'ensemble des valeurs d'une fonction linéaire quelconque sur l'espace vectoriel réel.

31.8. Soit ${}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ la matrice-colonne des coordonnées du vecteur x dans une base de $\mathscr{L}_3$. Est-ce que la fonction f définie sur $\mathscr{L}_3$ par l'égalité suivante est linéaire:

1) f $(x) = \xi_1 + \xi_2$; 2) f $(x) = \xi_1 - (\xi_2)^2$;

3) f $(x) = \xi_1 + 1$; 4) f $(x) = \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3$?

31.9. Ecrire la matrice-ligne des coefficients de la fonction f dans les cas 1) et 4) du problème 31.8.

31.10. Les fonctions f et g possèdent dans une base de l'espace $\mathscr{L}_3$ les matrices-lignes de coefficients (1, 2, 3) et (3, 2, 1) respectivement. Trouver les matrices-lignes de coefficients des fonctions:

1) f + g; 2) 2f; 3) 3g; 4) f — g.

31.11. 1) Soit **a** un vecteur de l'espace $\mathscr{E}_3$. Faisons correspondre à chaque vecteur **x** de $\mathscr{E}_3$ son projeté orthogonal scalaire sur l'axe défini par le vecteur **a**. Démontrer qu'on définit ainsi une fonction linéaire sur $\mathscr{E}_3$. Trouver la matrice-ligne des coefficients de cette fonction dans une base orthonormée quelconque de l'espace $\mathscr{E}_3$.

2) Soit (π) un plan dans l'espace $\mathscr{E}_3$. Associons à chaque vecteur de $\mathscr{E}_3$ son projeté orthogonal scalaire sur (π). Est-ce que la fonction numérique obtenue est une fonction linéaire?

31.12. 1) Soit **a** un vecteur fixé dans le plan $\mathscr{E}_2$. Associons à chaque vecteur **x** de $\mathscr{E}_2$ le nombre égal à l'aire du parallélogramme orienté construit sur les vecteurs **a** et **x**. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur $\mathscr{E}_2$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans une base orthonormée quelconque.

2) Soit **a** un vecteur fixé dans le plan $\mathscr{E}_2$. Associons à chaque vecteur $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_2$ le nombre égal à l'aire du parallélogramme construit sur **a** et **x**. Est-ce que la fonction ainsi construite est linéaire?

31.13. 1) Soient **a** et **b** des vecteurs fixés dans l'espace $\mathscr{E}_3$. Associons à un vecteur arbitraire $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_3$ le nombre égal au volume du parallélépipède orienté construit sur les vecteurs **a**, **b** et **x**, ou le zéro si **a**, **b** et **x** sont coplanaires. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans une base orthonormée quelconque.

2) Soient **a** et **b** des vecteurs fixés dans l'espace $\mathscr{E}_3$. Associons à un vecteur arbitraire $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_3$ le nombre égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs **a**, **b** et **x**, ou le zéro si **a**, **b** et **x** sont coplanaires. Est-ce que la fonction construite est une fonction linéaire?

31.14. 1) Associons à chaque matrice-colonne de hauteur n le rapport de ses deux premiers éléments. Est-ce qu'on définit ainsi une fonction sur $\mathscr{R}_n$?

2) Associons à chaque matrice-colonne de hauteur n la somme des carrés de tous ses éléments. Est-ce qu'on définit ainsi une fonction linéaire sur $\mathscr{R}_n$?

3) Associons à chaque matrice-colonne de hauteur n son i-ième élément. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur $\mathscr{R}_n$ et trouver la matrice-ligne de ses coefficients dans la base canonique de l'espace $\mathscr{R}_n$.

4) Associons à chaque matrice-colonne de hauteur n la somme de ses éléments. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur $\mathscr{R}_n$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans la base canonique de l'espace $\mathscr{R}_n$.

31.15. La fonction tr X associe à chaque matrice carrée X d'ordre n sa trace. Vérifier que cette fonction est linéaire et trouver la matrice de ses coefficients dans la base canonique de l'espace des matrices.

31.16. Soit C une matrice carrée d'ordre n. Associons à chaque matrice carrée X d'ordre n le nombre tr (CX). Montrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur l'espace $\mathscr{R}_{(n,n)}$ et calculer la matrice de ses coefficients.

31.17. Soit f une fonction linéaire définie sur $\mathscr{R}_{(n,n)}$. Démontrer qu'il existe une matrice carrée C telle que toute matrice $X \in \mathscr{R}_{(n,n)}$ vérifie l'égalité f (X) = tr (CX).

31.18. Supposons qu'une fonction linéaire f sur $\mathscr{R}_{(n,n)}$ satisfait à la condition f (AB) = f (BA) quelles que soient les matrices carrées A et B d'ordre n. Démontrer que f est définie par l'égalité f $(X) = \alpha$ tr X.

31.19. 1) Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant 3$ le nombre

$$\mathrm{f}(p)=\int_{-1}^{1}(1+t^2)\,p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur l'espace de polynômes $\mathscr{P}^{(3)}$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans la base $(1, t, t^2, t^3)$.

2) Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant 3$ le nombre

$$\mathrm{f}(p)=\int_{0}^{1}p(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur l'espace de polynômes $\mathscr{P}^{(3)}$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans la base $(1, t, t^2, t^3)$.

31.20. Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant n$ sa valeur pour $t = 0$. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur $\mathcal{P}^{(n)}$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans la base $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$.

31.21. Soit t_0 un nombre fixé. Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant n$ sa valeur pour $t = t_0$. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire φ sur l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$. Calculer la matrice-ligne des coefficients de la fonction φ dans les bases $(1, t, \ldots, t^n)$ et $(1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n)$.

31.22. Soient $t_1, \ldots, t_{n+1}$ des points distincts deux à deux de l'axe numérique, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ des fonctions linéaires sur $\mathcal{P}^{(n)}$ associées à ces points et définies dans le problème 31.21.

1) Démontrer que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ sont linéairement indépendantes.

2) Démontrer que toute fonction linéaire sur l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$ est une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$.

31.23. La fonction linéaire δ associe à chaque polynôme $p(t)$ de degré n $(n \leqslant 2)$ son terme constant. Représenter cette fonction sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ qui font correspondre à chaque polynôme sa valeur pour $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$ respectivement.

31.24. Soient t_0 un nombre quelconque et $t_1, \ldots, t_{n+1}$ des nombres réels distincts deux à deux. Démontrer qu'il existe des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que tout polynôme $p(t) \in \mathcal{P}^{(n)}$ vérifie l'égalité $p(t_0) = \lambda_1 p(t_1) + \ldots + \lambda_{n+1} p(t_{n+1})$.

31.25. Soit k un entier naturel. Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant n$ la valeur de sa dérivée d'ordre k pour $t = 0$. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur $\mathcal{P}^{(n)}$ et calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans la base $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$.

31.26. Soient k un entier naturel, $k \leqslant n$, et t_0 un nombre réel. Associons à chaque polynôme $p(t)$ de degré $\leqslant n$ la valeur de sa dérivée d'ordre k pour $t = t_0$. Démontrer qu'on a ainsi défini une fonction linéaire sur l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$. Calculer la matrice-ligne de ses coefficients dans les bases:

1) $(1, t, \ldots, t^n)$; 2) $(1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$.

31.27. Les fonctions linéaires $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ sont définies sur l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$ par les égalités

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=t_0} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)).$$

Démontrer que les fonctions $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ sont linéairement indépendantes.

31.28. Les fonctions $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ sont définies de la même façon que dans le problème 31.27. Démontrer que toute fonction

linéaire définie sur $\mathscr{P}^{(n)}$ est une combinaison linéaire des fonctions δ_k ($k = 0, 1, \ldots, n$).

31.29. Supposons que dans la base (e_1, e_2, e_3) la fonction linéaire f s'exprime par la formule $f(x) = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$ où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les coordonnées du vecteur x. Exprimer $f(x)$ par les coordonnées de x dans la base (e_1', e_2', e_3') si $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3 + e_1$.

31.30. Démontrer que toute fonction f linéaire non nulle sur $\mathscr{L}_n$ peut être réduite par un choix convenable de la base dans $\mathscr{L}_n$ à la forme $f(x) = \xi_1$, où ξ_1 est la première coordonnée du vecteur x.

31.31. La fonction linéaire f possède dans la base $\boldsymbol{e}$ la matrice-ligne des coefficients $\varkappa$. Calculer la matrice-ligne $\varkappa'$ de ses coefficients dans la base $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, si :

1) $\varkappa = {}^t c_{52}$, $S = A_{201}$; 2) $\varkappa = {}^t c_{64}$, $S = A_{202}$;

3) $\varkappa = {}^t c_{66}$, $S = A_{203}$; 4) $\varkappa = {}^t c_{51}$, $S = A_{205}$.

31.32. Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définies dans le problème 31.23 ainsi que les fonctions $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ définies à l'aide des formules

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=2}, \quad k = 0, 1, 2,$$

forment un couple de bases dans l'espace $\mathscr{P}^{(2)*}$. Ecrire les formules permettant de passer de la première base à la deuxième.

Base biorthogonale
(problèmes 31.33 à 31.42)

31.33. Les polynômes $1, t, \ldots, t^n$ forment une base dans l'espace $\mathscr{P}^{(n)}$. Trouver la base biorthogonale correspondante.

31.34. Les polynômes $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$ forment une base dans l'espace $\mathscr{P}^{(n)}$. Trouver la base biorthogonale correspondante.

31.35. La base (e_1, e_2, e_3) de l'espace $\mathscr{L}_3$ est biorthogonale à la base (f_1, f_2, f_3) de l'espace $\mathscr{L}_3^*$. Trouver la base biorthogonale à la base (e_1', e_2', e_3') si $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3$.

31.36. Construire une base de l'espace $\mathscr{P}^{(2)}$ qui soit biorthogonale à la base des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définies dans le problème 31.23.

31.37. Trouver une base de l'espace $\mathscr{P}^{(n)}$ qui soit biorthogonale à la base des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ construites dans les problèmes 31.21, 31.22. Calculer les coordonnées d'un polynôme arbitraire dans la base trouvée.

31.38. Construire une base de l'espace $\mathscr{P}^{(2)}$ qui soit biorthogonale à la base des fonctions $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ définies dans le problème 31.32.

31.39. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base dans l'espace $\mathscr{L}_n$, et $(f_1, \ldots, f_n)$ la base qui lui est biorthogonale dans $\mathscr{L}_n^*$. Démontrer que tout $x \in \mathscr{L}_n$ vérifie l'égalité

$$x = f_1(x)\, e_1 + \ldots + f_n(x)\, e_n, \qquad (1)$$

et tout $y \in \mathcal{L}_n^*$ vérifie l'égalité

$$y = y(e_1) f_1 + \ldots + y(e_n) f_n.$$

Appliquer la formule (1) aux bases étudiées dans le problème 31.34.

31.40. Sur la base du résultat du problème 31.34, démontrer que les polynômes $p_0, \ldots, p_k$ de degré $\leqslant k$ sont linéairement indépendants si et seulement s'il existe un t_0 tel que $\det \| p_i^{(j)}(t_0) \| \neq 0$.

31.41. Trouver la base biorthogonale à la base canonique de l'espace $\mathscr{R}_{(n,n)}$. Calculer les matrices C associées aux fonctions de cette base (au sens du problème 31.17).

31.42. Les matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

forment une base dans l'espace des matrices carrées complexes d'ordre 2. Trouver la base biorthogonale à la base $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et calculer les matrices C associées aux fonctions de cette base (dans le sens du problème 31.17).

Annulation de la fonction linéaire (problèmes 31.43 à 31.49)

31.43. Démontrer que le produit de deux fonctions linéaires sur $\mathcal{L}_n$ est identiquement nul si et seulement si l'une au moins des fonctions est nulle.

31.44. Soit f une fonction linéaire sur $\mathcal{L}_n$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{N}$ des vecteurs pour lesquels $f(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n$. Quelle est la dimension de $\mathscr{N}$? $\mathscr{N}$ et $\mathcal{L}_n$ peuvent-ils coïncider ?

31.45. Soient f, g des fonctions linéaires sur $\mathcal{L}_n$ et $f(x) = 0$ pour tous les x tels que $g(x) = 0$. Démontrer qu'il existe un nombre α tel que $f = \alpha g$.

31.46. On choisit dans l'espace $\mathcal{L}_4$ une base et on considère deux fonctions linéaires définies par les matrices-lignes de coefficients (5, 24, —7, —1) et (—1, —2, 7, 3). Trouver l'ensemble des vecteurs qui annulent simultanément ces fonctions.

31.47. Soient $\mathscr{N}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n$, et $\mathscr{K}$ l'ensemble de toutes les fonctions linéaires s'annulant sur $\mathscr{N}$. Démontrer que $\mathscr{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n^*$ et calculer sa dimension.

31.48. Le sous-espace $\mathscr{N}$ de $\mathcal{L}_5$ est défini dans une base comme enveloppe linéaire des vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées ${}^t(0, 0, 1, 1, 1)$ et ${}^t(0, 1, 0, 0, 1)$ Calculer dans la même base les matrices-lignes de coefficients de toutes les fonctions linéaires s'annulant sur $\mathscr{N}$.

31.49. Le sous-espace $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}^{(6)}$ représente l'ensemble de tous les polynômes de la forme $(t-1)(t-2)^2 p(t)$, où $p(t) \in \mathcal{P}^{(3)}$. Trouver l'ensemble des fonctions linéaires définies sur $\mathcal{P}^{(6)}$ et s'annualant sur $\mathcal{N}$.

§ 32. Fonctions bilinéaires et quadratiques

Dans ce paragraphe on utilise les notions fondamentales suivantes: *fonctions bilinéaires* et *quadratiques*, *fonction bilinéaire symétrique*, *matrice de la fonction bilinéaire* ou *quadratique* (*de la forme bilinéaire* ou *quadratique*), *formes diagonale* et *canonique de la fonction bilinéaire* (*quadratique*), *fonctions quadratiques définies positives* ou *négatives*, *mineurs principaux d'une matrice symétrique*, *rang* et *indice d'une fonction* (forme) *quadratique*, *transformation associée à une fonction bilinéaire* dans l'espace euclidien; *fonction* (forme) *bilinéaire hermitienne* (sesquilinéaire) dans l'espace complexe, *fonction* (forme) *symétrique hermitienne*, *fonction* (forme) *quadratique hermitienne*.

Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel réel ou complexe. La fonction $\mathrm{b}(x, y)$ de deux variables à valeurs dans le corps sur lequel est défini l'espace $\mathcal{L}$ est dite *bilinéaire* dans $\mathcal{L}$ si

$$\mathrm{b}(x+y, z) = \mathrm{b}(x, z) + \mathrm{b}(y, z),$$
$$\mathrm{b}(x, y+z) = \mathrm{b}(x, y) + \mathrm{b}(x, z),$$
$$\mathrm{b}(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta \mathrm{b}(x, y)$$

pour tous vecteurs x, y, z de $\mathcal{L}$ et tous nombres α, β.

La fonction $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$ s'appelle *fonction quadratique* dans $\mathcal{L}$, engendrée par la fonction bilinéaire $\mathrm{b}(x, y)$. La fonction quadratique $\mathrm{k}(x)$ définit de façon univoque la fonction bilinéaire symétrique qui l'engendre.

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base dans $\mathcal{L}$. On dit que les nombres $b_{ij} = \mathrm{b}(e_i, e_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ sont les *coefficients* et que la matrice $B = \| b_{ij} \|$ est la *matrice de la fonction bilinéaire* $\mathrm{b}(x, y)$ dans la base e. On appelle *matrice de la fonction quadratique* $\mathrm{k}(x)$ la matrice de la fonction bilinéaire symétrique $\mathrm{b}(x, y)$ telle que $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$. Les fonctions $\mathrm{b}(x, y)$ et $\mathrm{k}(x)$ s'expriment par les matrices-colonnes de coordonnées ξ, η des vecteurs x et y suivant les formules

$$\mathrm{b}(x, y) = {}^t\xi B \eta = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j, \tag{1}$$

$$\mathrm{k}(x) = {}^t\xi B \xi = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{2}$$

On appelle *forme* de degré m en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ le polynôme homogène de degré m en $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Par suite, les expressions (1) et (2) des fonctions bilinéaire et quadratique sont respectivement appelées *formes bilinéaire* et *quadratique*. La matrice de coefficients $B = \| b_{ij} \|$ est aussi appelée matrice associée à la forme bilinéaire (quadratique).

Soit S la matrice de passage de la base e à la base e', et soient B et B' les matrices de la fonction bilinéaire dans ces bases. Il vient alors

$$B' = {}^tSBS. \tag{3}$$

La forme bilinéaire

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\xi_i\eta_i$$

et la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \xi_i^2$$

sont dites *diagonales*. Si les coefficients $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de la forme diagonale sont égaux à ± 1 ou à 0, elle est dite *canonique*.

Pour chaque fonction bilinéaire symétrique (quadratique) dans un espace vectoriel réel n-dimensionnel il existe une base dans laquelle la forme bilinéaire (quadratique) correspondante est canonique. Le nombre des coefficients non nuls de la forme quadratique canonique est égal au rang r, et le nombre q des coefficients égaux à -1, à l'indice négatif de la fonction quadratique (loi d'inertie des formes quadratiques). La forme canonique se définit également de façon unique par les indices positif p et négatif q ou par le rang r et la signature $p - q$.

Réduire une fonction bilinéaire (quadratique) à la forme diagonale ou canonique c'est trouver la forme bilinéaire (quadratique) qui est diagonale ou canonique et la base qui correspond à cette forme (ou les formules de changement des coordonnées). On utilise également l'expression « réduire la forme bilinéaire (quadratique) à la forme diagonale ou canonique ».

Pour réduire la forme quadratique ou bilinéaire à la forme canonique, on utilise la méthode de décomposition en carrés (méthode de Lagrange). On peut de même utiliser les transformations élémentaires de la matrice associée à la forme quadratique. Dans ce cas, chaque transformation élémentaire des lignes de la matrice doit être suivie par la même transformation des colonnes.

La fonction quadratique $\mathrm{k}(x)$ est dite *définie positive* (ou *définie négative*) si $\mathrm{k}(x) > 0$ (resp. $\mathrm{k}(x) < 0$) pour tous les $x \in \mathscr{L}$ différents de o. Si $\mathrm{k}(x) \geqslant 0$ (ou $\mathrm{k}(x) \leqslant 0$) pour tous les $x \in \mathscr{L}$, la fonction $\mathrm{k}(x)$ est dite *semi-définie positive* (resp. *semi-définie négative*). On applique les mêmes termes à la forme quadratique qui est l'expression analytique de la fonction quadratique. Pour que la fonction (forme) quadratique de matrice $B = \| b_{ij} \|$ soit définie positive il faut et il suffit que tous les mineurs principaux Δ_k de B soient strictement positifs:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{4}$$

(loi de Sylvester).

Soit $\mathrm{b}(x, y)$ une fonction bilinéaire symétrique dans l'espace euclidien $\mathscr{E}$. La transformation linéaire φ de l'espace $\mathscr{E}$ est dite *associée* à $\mathrm{b}(x, y)$ si pour tous $x, y \in \mathscr{E}$ on a $\mathrm{b}(x, y) = (x, \varphi(y))$. La transformation associée est auto-adjointe. La transformation associée à la fonction bilinéaire est aussi associée à la fonction quadratique $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$.

Toute fonction bilinéaire symétrique $\mathrm{b}(x, y)$ (et quadratique $\mathrm{k}(x)$) dans l'espace euclidien $\mathscr{E}_n$ possède une base orthonormée dans laquelle elle a une forme diagonale:

$$\mathrm{b}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i \quad \left(\mathrm{k}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \right).$$

Les vecteurs d'une telle base sont des vecteurs propres de la transformation associée, et les coefficients λ_i sont ses valeurs propres.

La matrice orthogonale de passage d'une base à l'autre permet de réduire à la forme diagonale toute fonction bilinéaire ou quadratique définie dans un espace vectoriel $\mathscr{L}$ quelconque de dimension finie. A cette fin, il faut introduire dans $\mathscr{L}$ le produit scalaire par rapport auquel la base initiale e devient ortho-

normée et trouver une base orthonormée e' de vecteurs propres de la transformation associée. La matrice de passage S de e à e' est alors orthogonale et la matrice $B' = {}^tSBS = S^{-1}BS$ est diagonale.

La forme diagonale de la fonction bilinéaire (quadratique) peut être utilisée comme étape intermédiaire de la réduction de celle-ci à la forme canonique: il suffit de multiplier par des nombres convenables les vecteurs de la base dans laquelle la forme quadratique est diagonale.

Soient f (x) et g (x) deux fonctions (formes) quadratiques dans un espace vectoriel réel n-dimensionnel $\mathcal{L}$. On suppose de plus que g (x) est définie positive ou négative. Il existe alors dans $\mathcal{L}$ une base dans laquelle les deux formes sont diagonales et, de plus, g (x) est de la forme canonique. Si F (x, y) et G (x, y) sont des fonctions bilinéaires symétriques engendrant les formes quadratiques f (x) et g (x), la base recherchée représente une base formée de vecteurs propres de la transformation auto-adjointe associée à F (x, y), qui est orthonormée par rapport au produit scalaire défini par la fonction G (x, y).

Soient F et G les matrices des formes f et g dans une base e. Les coefficients diagonaux de f dans une base judicieusement choisie sont les racines de l'équation

$$\det (F - \lambda G) = 0, \tag{5}$$

quant aux vecteurs de base correspondants, on les obtient du système d'équations

$$(F - \lambda G)\, \xi = 0 \tag{6}$$

pour chaque racine de (5).

Pratiquement, un couple de formes quadratiques f, g se réduit à la forme diagonale en deux étapes: 1) on trouve la base e' dans laquelle la forme g est canonique (en appliquant par exemple la méthode de Lagrange) et l'on rapporte la forme f à la base e' ; 2) on trouve la base e'' dans laquelle la forme f est diagonale et la matrice de passage à laquelle à partir de la base e' est orthogonale: dans cette base, la forme g est encore canonique. Si S est la matrice de passage de la base e à la base intermédiaire e', et T la matrice de passage de e' à e'', la matrice de passage de e à e'' vaut ST.

La fonction h (x, y) dans un espace vectoriel complexe $\mathcal{L}$ est dite *bilinéaire hermitienne* (*sesquilinéaire*) si

$$\mathrm{h}(x + y, z) = \mathrm{h}(x, y) + \mathrm{h}(y, z),$$
$$\mathrm{h}(x, y + z) = \mathrm{h}(x, y) + \mathrm{h}(x, z),$$
$$\mathrm{h}(\alpha x, \beta y) = \alpha\overline{\beta}\mathrm{h}(x, y)$$

pour tous $x, y, z \in \mathcal{L}$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. La fonction bilinéaire hermitienne est dite *symétrique* (*hermitienne*) si h $(x, y) = \overline{\mathrm{h}(y, x)}$ pour tous les $x, y \in \mathcal{L}$. Une telle fonction engendre une fonction quadratique hermitienne k $(x) =$ h (x, x).

Soient B, B' les matrices de la fonction bilinéaire hermitienne h (x, y) dans les bases e, e' d'un espace vectoriel complexe, et soient S la matrice de passage de e à e' et ξ, η les matrices-colonnes des coordonnées des vecteurs x, y dans la base e. Il vient alors

$$\mathrm{h}(x, y) = {}^t\xi B\overline{\eta}, \quad \mathrm{k}(x) = {}^t\xi B\overline{\xi};$$
$$B' = {}^tSB\overline{S}.$$

Le polynôme qui donne une expression analytique de la fonction bilinéaire (quadratique) hermitienne s'appelle *forme bilinéaire* (*quadratique*) *hermitienne*.

La forme quadratique dans un espace complexe n-dimensionnel se réduit à la forme canonique $\sum_{j=1}^{r} \xi_j^2$, où r est le rang de la forme. La forme quadratique

hermitienne se réduit à la forme canonique $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \mid \xi_j \mid^2$, où ε_j est égal à 1, —1 ou 0. La loi d'inertie et la loi de Sylvester pour la forme quadratique hermitienne se formulent de la même façon que pour la forme quadratique réelle. La forme quadratique hermitienne k (x) dans l'espace hermitien possède une base orthonormée dans laquelle elle est diagonale : k $(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mid \xi_j \mid^2$. Si B est la matrice de k (x) dans une base orthonormée, les coefficients λ_j sont les nombres caractéristiques de la matrice B.

Fonctions bilinéaires et quadratiques dans l'espace vectoriel réel (problèmes 32.1 à 32.26)

32.1. Composer la matrice associée à la forme bilinéaire donnée et écrire la forme quadratique correspondante dans l'espace vectoriel n-dimensionnel :

1) x_1y_1 $(n = 1)$; 2) x_1y_1 $(n = 2)$;
3) $2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2$ $(n = 2)$;
4) $x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$ $(n = 3)$;
5) $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$; 6) $\sum_{i=1}^{n} x_iy_{n-i+1}$; 7) $\sum_{|i-j| \leqslant 1} x_iy_j$.

32.2. Ecrire la forme bilinéaire symétrique dans l'espace vectoriel n-dimensionnel d'après la forme quadratique donnée et composer sa matrice :

1) $-3x_1^2$ $(n = 1)$; 2) $-18x_1x_2 + 9x_2^2$ $(n = 2)$;
3) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ $(n = 3)$;
4) $2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ $(n = 3)$; 5) $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

32.3. Ecrire la forme quadratique possédant la matrice donnée :

1) A_{47} ; 2) A_{37} ; 3) A_{307} ; 4) A_{280} ;
5) A_{484} ; 6) A_{471} ; 7) A_{593} ; 8) A_{634}.

32.4. Définir la fonction bilinéaire symétrique b (x, y) d'après la fonction quadratique k (x) = b (x, x).

32.5. Comment varie la matrice de la fonction bilinéaire (quadratique) si l'on change la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de la manière suivante :

1) en permutant le i-ème et le j-ième vecteur de la base ;
2) en multipliant le i-ème vecteur de base par un nombre $\lambda \neq$ $\neq 0$;
3) en remplaçant le vecteur e_i par $e_i + \lambda e_j$ $(i \neq i)$;
4) en disposant les vecteurs de base dans l'ordre inverse ?

32.6. La fonction quadratique et la transformation linéaire possède dans une base les matrices identiques. Comment doit se présen-

ter la matrice de passage d'une base à l'autre pour que dans une autre base les matrices de la fonction quadratique et de la transformation linéaire coïncident de même?

32.7. La fonction quadratique est définie dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Ecrire cette fonction dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$:

1) $25x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 + e_2$;

2) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2$, $e'_1 = 2e_1 - e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$;

3) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2$, $e'_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{6}e_2$, $e'_2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{6}e_2$;

4) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$, $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$;

5) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, $e'_1 = 2e_1 - e_3$, $e'_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $e'_3 = -e_2 + e_3$;

6) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$, $e'_1 = e_1 + e_2 - 2\sqrt{2}e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3$;

7) $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$, $e'_i = e_i + e_{i+1} + \ldots + e_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

32.8. Réduire la forme quadratique donnée à la forme canonique à l'aide de la méthode de Lagrange ou par les transformations élémentaires de sa matrice. Déterminer le rang, les indices positif et négatif d'inertie et la signature de cette forme.

1) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$; 2) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$;
3) $-x_1x_2$; 4) $25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$;
5) $2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$; 6) $24x_1x_2 - 16x_1^2 - 9x_2^2$;
7) $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
8) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;
9) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$;
10) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;
11) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
12) (s) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;
13) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;
14) $x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_5 + x_4^2 - 2x_4x_6 + x_5^2 + x_6^2$;
15) $x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$;
16) $x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

32.9. Etablir lesquelles des formes quadratiques du problème 32.8 sont définies positives, définies négatives, semi-définies.

32.10. Réduire à la forme canonique la forme bilinéaire donnée:

1) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$;
2) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$;
3) $13x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_2y_2$;
4) $-x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$;
5) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;

6) $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$;

7) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3$.

32.11. Démontrer qu'une fonction bilinéaire non symétrique ne peut pas être réduite à la forme diagonale.

32.12. Réduire la forme quadratique dépendant d'un paramètre réel λ à la forme canonique pour toutes les valeurs possibles de λ:

1) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2$; 2) $8x_1^2 + \lambda x_1x_2 + 2x_2^2$;

3) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2$;

4) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + + 5x_3x_4$;

5) $3x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + \lambda x_2x_4 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2$.

32.13. Réduire à la forme canonique la forme quadratique donnée dans l'espace n-dimensionnel:

1) $x_1^2 + 2\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$; 2) $x_1^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}(-1)^i x_ix_{i+1}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$; 4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

5) $-\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2 + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} ix_ix_j$;

6) $\sum\limits_{i=1}^{n}((i-1)^2+1)x_i^2 + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} ix_ix_j$.

32.14. Démontrer qu'une fonction quadratique k (x) est définie positive si et seulement si elle remplit l'une quelconque des conditions:

1) k $(e_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$;

2) k (x) se réduit à la forme diagonale à coefficients strictement positifs;

3) k (x) se réduit à la forme canonique $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

32.15. Pour qu'une fonction quadratique soit définie positive il est nécessaire, mais il n'est pas suffisant, que tous les éléments diagonaux de sa matrice dans une base soient strictement positifs. Démontrer.

32.16. Démontrer que la forme quadratique est définie négative si et seulement si les signes des mineurs principaux de sa matrice alternent de la façon suivante:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots,\ \operatorname{sgn}\Delta_n = (-1)^n.$$

32.17. Soit r le rang de la fonction quadratique k (x) dans un espace vectoriel n-dimensionnel $\mathscr{L}$. Démontrer les assertions:

1) Il existe dans $\mathscr{L}$ une base dans laquelle les mineurs principaux Δ_k de la matrice de k (x) sont différents de zéro pour $k = 1, \ldots, r$ et égaux à zéro pour $k = r + 1, \ldots, n$.

2) Si les mineurs principaux Δ_k ($k = 1, \ldots, r$) de la matrice de k (x) sont différents de zéro dans une certaine base, k (x) se réduit à la forme diagonale $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \xi_k^2$ ($\Delta_0 = 1$) et à la forme canonique $\sum\limits_{k=1}^{r} \varepsilon_k \xi_k^2$, où $\varepsilon_k = \operatorname{sgn} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ ($k = 1, \ldots, r$).

32.18. Pour quelles valeurs du paramètre λ la forme quadratique donnée est-elle définie positive, définie négative, semi-définie:

1) $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3) x_2^2$; 2) $-9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$;

3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3$;

5) $(4 - \lambda) x_1^2 + (4 - \lambda) x_2^2 - (2 + \lambda) x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$?

32.19. Soit k (x) une fonction quadratique dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}$. Est-ce que l'ensemble de tous les vecteurs x de $\mathscr{L}$ pour lesquels k (x) $\geqslant 0$ (k (x) $\leqslant 0$) est un sous-espace vectoriel dans $\mathscr{L}$? Etudier l'exemple k (x) $= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ($n = 3$):

32.20. Démontrer que dans l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre n la fonction k (X) = tr (X (${}^tX$)) est une fonction quadratique définie positive.

32.21. Démontrer que dans l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre n la fonction k (X) = tr (X^2) est une fonction quadratique. Déterminer son rang et la signature.

32.22. Montrer que la fonction

$$I(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

est une fonction bilinéaire symétrique dans l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Réduire cette fonction à la forme canonique pour $n = 3$.

32.23. Démontrer que le rang d'une fonction bilinéaire vaut 1 si et seulement si elle est le produit de deux fonctions linéaires non nulles.

32.24. Démontrer qu'une fonction quadratique se présente sous la forme du produit de deux fonctions linéaires réelles si et seulement si son rang ne dépasse pas 1 ou si le rang est égal à 2 et la signature à 0.

32.25. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions quadratiques k (x) et —k (x) puissent être réduites à une même forme canonique?

32.26. 1) Soit b (x, y) une fonction bilinéaire dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}$. On dit que la fonction b (x, y) est invariante par une

transformation linéaire φ de $\mathcal{L}$ si b (φ (x), φ (y)) = b (x, y) pour tous les x, $y \in \mathcal{L}$. Démontrer que toutes les transformations linéaires régulières par rapport auxquelles la fonction b (x, y) est invariante forment un groupe pour la multiplication des transformations.

2) Trouver toutes les transformations linéaires d'un espace vectoriel bidimensionnel par rapport auxquelles la forme bilinéaire $x_1y_1 + x_2y_2$ est invariante.

Fonctions quadratiques dans l'espace euclidien. Couples de formes (problèmes 32.27 à 32.39)

32.27. La fonction quadratique (bilinéaire) est écrite dans une base orthonormée de l'espace euclidien n-dimensionnel. Trouver la base orthonormée dans laquelle la fonction donnée est de la forme diagonale et écrire cette forme diagonale.

$n = 2$:

1) $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$; 2) $\frac{4}{3}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2$;

3) $7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2$; 4) $-x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 9x_2y_2$;

5) $-x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_2$.

$n = 3$:

6) $-x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$;

7) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

8) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$;

9) $2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 - 3x_3y_3$;

10) (s) $2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

11) $3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$;

12) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$;

13) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$;

14) $4x_1^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2$;

15) $x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - 4x_3y_3$;

16) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

$n = 4$:

17) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2$;

18) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_1x_4 + 4x_2^2 - 2x_2x_4 - 6x_3x_4 + x_4^2$;

19) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3^2 + 2x_3x_4 + 4x_4^2$;

20) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_4^2 - x_3^2 - x_2^2$;

21) $\frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_3y_4 + \frac{1}{2}x_4y_3$;

22) $3x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-x_3^2+4x_3x_4-4x_4^2$;

23) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

24) $\sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j}x_iy_j$; 25) $\sum_{i=1}^{2n-1} x_ix_{2n-i}$;

26) $\sum_{i=1}^{2n} x_i^2+\sum_{i=1}^{2n} x_ix_{2n-i+1}$; 27) $\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$.

32.28. Trouver la forme canonique, le rang et la signature de chacune des formes quadratiques et bilinéaires du problème 32.27.

32.29. Démontrer qu'une forme quadratique est définie positive si et seulement si tous les nombres caractéristiques de sa matrice sont strictement positifs, et définie négative si et seulement s'ils sont strictement négatifs.

32.30. On sait que tous les nombres caractéristiques de la matrice symétrique réelle A appartiennent au segment $[a, b]$. Démontrer que la forme quadratique de matrice $A - \lambda E$ est définie positive pour $\lambda < a$ et définie négative pour $\lambda > b$.

32.31. Démontrer qu'une forme quadratique est définie positive si et seulement si tous les coefficients du polynôme caractéristique de sa matrice sont différents de zéro et les signes de ces coefficients alternent, le terme constant étant strictement positif.

32.32. 1) Démontrer que la transformation linéaire φ de l'espace euclidien $\mathscr{E}$ associée à la fonction bilinéaire symétrique b (x, y) définie dans $\mathscr{E}$ est auto-adjointe.

2) On sait que la fonction bilinéaire b (x, y) possède dans une base e une matrice symétrique B, et que la matrice de Gram de la base e est Γ. Trouver la matrice de la transformation associée à la fonction b (x, y).

32.33. On définit dans la base e de l'espace euclidien une forme quadratique. Trouver dans la même base la matrice de la transformation associée à cette forme si la matrice de Gram de la base e est Γ:

1) $4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$, $\Gamma=A_{56}$;

2) $4x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2$, $\Gamma=A_{55}$;

3) $2x_1x_2-x_2^2$, $\Gamma=A_9$;

4) $2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$, $\Gamma=A_{207}$;

5) $5x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$, $\Gamma=A_{308}$;

6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-2x_2x_3-$ $-2x_2x_4-2x_3x_4$, $\Gamma=A_{471}$.

32.34. On sait que la fonction quadratique k (x) possède la matrice B dans une base e de l'espace euclidien n-dimensionnel et que la matrice de Gram de e est Γ. Démontrer que la base orthonormée

dans laquelle k (x) est diagonale, et les coefficients diagonaux de k (x) dans cette base s'obtiennent comme solutions du problème généralisé aux valeurs propres et aux vecteurs propres: $B\xi = \lambda\Gamma\xi$ ($\xi \in \in \mathscr{R}_n$).

32.35. Soit $\mathscr{M}$ un sous-espace vectoriel r-dimensionnel de l'espace euclidien n-dimensionnel. La fonction k (x) fait correspondre à tout vecteur x le carré de la longueur de son projeté orthogonal sur $\mathscr{M}$. Démontrer que la fonction k (x) est quadratique. Trouver la forme diagonale que cette fonction possède dans une base orthonormée.

32.36. Vérifier qu'au moins une des deux formes quadratiques données est définie positive ou négative. Trouver le changement de coordonnées dans lequel ces deux formes se réduisent simultanément à la forme diagonale et écrire cette forme diagonale.

1) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2,\ g = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$;

2) $f = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2,\ g = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

3) $f = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2,\ g = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;

4) $f = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2,\ g = 2x_1x_2 - x_2^2$;

5) $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,\ g = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$;

6) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2,\ g = 2x_1x_2 - \frac{7}{2}x_1^2 - x_2^2$;

7) $f = (1 + 4\sqrt{6})\, x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2,\quad g = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$;

8) $f = (1 + 2m\sqrt{a^2+a})\, x_1^2 + 2\sqrt{a^2+a}\, x_1x_2,\ g = (1+m^2)\, x_1^2 + + 2mx_1x_2 + x_2^2$, où m et a sont des paramètres réels, $a^2 + a \geqslant 0$;

9) $f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2,\quad g = 5x_1^2 - - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2$;

10) $f = 15x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3,\quad g = x_1^2 - - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

11) (s) $f = 6x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 6x_3^2, g = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

12) $f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2,\quad g = 9x_1^2 - 12x_1x_2 - - 24x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 16x_3^2$;

13) $f = x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 + 19x_4^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 10x_1x_4 - - 26x_2x_3 + 8x_2x_4 - 2x_3x_4,\quad g = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - - 5x_3^2 + 6x_3x_4 - 10x_4^2$;

14) $f = x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2,\quad g = x_1^2 - 2x_1x_2 + + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$.

32.37. Démontrer que si parmi les combinaisons linéaires de deux fonctions quadratiques il y en a une qui est définie positive, ces deux fonctions se réduisent simultanément à la forme diagonale. Montrer sur un exemple que cette condition n'est pas nécessaire.

32.38. Les fonctions quadratiques f et g possèdent dans une base e de l'espace vectoriel n-dimensionnel les matrices F et G respectivement. On considère la base e', obtenue de e par la matrice de

passage S, dans laquelle la fonction g a la forme canonique $\sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2$ et la fonction f, la forme diagonale $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$. Démontrer que:

1) $\det (F - \lambda G) = (\det S)^2 (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$;

2) les vecteurs de la base e' s'obtiennent à partir du système d'équations $(F - \lambda G) \xi = o$ pour chaque racine λ de l'équation $\det (F - \lambda G) = 0$.

32.39. Sans définir le changement de coordonnées dans lequel la forme quadratique définie positive g se réduit à la forme canonique, et la forme quadratique f à la forme diagonale, écrire cette forme diagonale de f.

1) $f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $g = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;

2) $f = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2$, $g = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2$;

3) $f = 7x_1x_2 + 31x_2^2$, $g = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

4) $f = 8x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$, $g = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

Fonctions bilinéaires et quadratiques dans l'espace complexe (problèmes 32.40 à 32.47)

32.40. Montrer que:

1) si b (x, y) est une fonction bilinéaire dans l'espace arithmétique complexe n-dimensionnel, h $(x, y) =$ b $(x, \overline{y})$ est une fonction bilinéaire hermitienne;

2) si h (x, y) est une fonction bilinéaire hermitienne dans l'espace $\mathscr{C}_n$, b $(x, y) =$ h $(x, \overline{y})$ est une fonction bilinéaire.

32.41. Réduire les formes quadratiques suivantes à la forme canonique:

1) $4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 9x_2^2$;

2) $9x_1^2 + 24(i+1)x_1x_2 + 16x_2^2$; 3) x_1x_2;

4) $\varepsilon^2x_1^2 - \varepsilon x_1x_2 + x_2^2$, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$;

5) $(1+i)x_1^2 + (2+2i)x_1x_3 + ix_2^2 + 3x_3^2$;

6) $x_1^2 + (2-2i)x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ix_2^2 + (2+2i)x_2x_3 + (1+i)x_3^2$;

7) $-x_1^2 - 4ix_1x_2 - (2-2i)x_1x_3 + 4x_2^2 - (4+4i)x_2x_3 + 2ix_3^2$.

32.42. Ecrire les matrices associées aux formes bilinéaires hermitiennes données dans l'espace n-dimensionnel:

1) $-ix_1\overline{y}_1$ $(n = 1)$; 2) $-ix_1\overline{y}_1$ $(n = 2)$;

3) $3x_1\overline{y}_1 + 4ix_1\overline{y}_2 - 5x_2\overline{y}_1 + ix_2\overline{y}_2$ $(n = 2)$;

4) $-3ix_1\overline{y}_1 + 2x_1\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_1 + (1-i)x_2\overline{y}_2$ $(n = 2)$;

5) $(1+i)x_1\overline{y}_2 + (1+i)x_2\overline{y}_1 - 5x_2\overline{y}_2$ $(n = 2)$;

6) $(1+i)\,x_1\bar{y}_2 + (1-i)\,x_2\bar{y}_1 - 5x_2\bar{y}_2$ $(n = 2)$;

7) $x_1\bar{y}_1 - 3x_2\bar{y}_2 + (2+i)\,x_3\bar{y}_3 - ix_1\bar{y}_2 + (4+i)\,x_3\bar{y}_1$ $(n = 3)$;

8) $2x_1\bar{y}_1 - 6x_2\bar{y}_2 + (1 + 3\sqrt{2})\,x_3\bar{y}_3 + 3x_1\bar{y}_2 + 3x_2\bar{y}_1 + (2-5i)\,x_1\bar{y}_3 + (2+5i)\,x_3\bar{y}_1 + 4ix_2\bar{y}_3 - 4ix_3\bar{y}_2$ $(n = 3)$;

9) $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$.

32.43. Lesquelles des formes bilinéaires hermitiennes du problème 32.42 sont-elles symétriques? Ecrire les formes quadratiques hermitiennes qui leur correspondent.

32.44. Ecrire la forme quadratique hermitienne définie par la matrice donnée:

1) A_{47}; 2) A_{79} $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$; 3) A_{280}; 4) A_{492}.

32.45. La forme quadratique hermitienne est écrite dans une base orthonormée de l'espace hermitien n-dimensionnel. Trouver la base orthonormée dans laquelle la forme quadratique hermitienne donnée est diagonale et écrire cette forme diagonale.

1) $2\,|x_1|^2 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1 + 2\,|x_2|^2$ $(n = 2)$;

2) $|x_1|^2 + (3-4i)\,x_1\bar{x}_2 + (3+4i)\,x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(n = 2)$;

3) $|x_1|^2 + \varepsilon x_1\bar{x}_2 + \bar{\varepsilon} x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$ $(n = 2)$;

4) $3\,|x_1|^2 + 3\,|x_2|^2 - 5\,|x_3|^2 - ix_1\bar{x}_2 + ix_2\bar{x}_1$ $(n = 3)$;

5) $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1 + ix_2\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_2$ $(n = 3)$;

6) $12\,|x_1|^2 - (1+i)\,\bar{x}_1x_2 - (1-i)\,\bar{x}_2x_1 + 2\bar{x}_1x_3 + 2\bar{x}_3x_1 + (3+3i)\,x_1\bar{x}_4 + (3-3i)\,x_4\bar{x}_1 + 12\,|x_2|^2 + (1-i)\,x_2\bar{x}_3 + (1+i)\,x_3\bar{x}_2 - 2x_2\bar{x}_4 - 2x_4\bar{x}_2 + 8\,|x_3|^2 - (1+i)\,x_3\bar{x}_4 - (1-i)\,x_4\bar{x}_3 + 8\,|x_4|^2$ $(n = 4)$.

32.46. Etant donné la fonction quadratique hermitienne $\mathrm{k}(x) = \mathrm{h}(x, x)$, écrire la fonction bilinéaire hermitienne symétrique $\mathrm{h}(x, y)$.

32.47. Démontrer que dans l'espace vectoriel des matrices complexes d'ordre n la fonction $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}\,(X\,({}^t\bar{X}))$ est une fonction quadratique hermitienne définie positive.

CHAPITRE XIII

ESPACES AFFINES ET ESPACES EUCLIDIENS PONCTUELS

§ 33. Espaces affines

Dans ce paragraphe on utilise les notions fondamentales suivantes: *espace affine réel n-dimensionnel associé à un espace de vecteurs, repère cartésien, coordonnées cartésiennes et matrice-colonne des coordonnées d'un point, système libre de points, plan dans l'espace affine, droite, hyperplan, sous-espace directeur du plan, projetés du point et du vecteur sur le plan parallèlement à un autre plan, segment, ensemble convexe, enveloppe convexe de l'ensemble, simplexe, triangle, tétraèdre, faces et arêtes d'un simplexe, parallélépipède, parallélogramme, frontière, faces, arêtes, sommets, diagonales du parallélépipède.*

Le point unique B de l'espace affine tel que $\overrightarrow{AB} = x$ est noté $P(A, x)$.

Le système de points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ de l'espace affine est dit libre si les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ sont linéairement indépendants.

Considérons le plan (π) dans l'espace affine $\mathcal{A}$. Soient A_0 un point fixé appartenant au plan, $(b_1, \ldots, b_k)$ une base de l'espace directeur du plan, et O un point fixé de l'espace affine. On appelle *rayon vecteur du point A* relativement au point O le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Si x_0 est le rayon vecteur du point A_0, le plan se compose des seuls points A dont les rayons vecteurs x satisfont à l'équation

$$x = x_0 + t_1b_1 + \ldots + t_kb_k. \qquad (1)$$

Les paramètres $t_1, \ldots, t_k$ prennent des valeurs arbitraires et sont définis univoquement par le point A.

Si l'on introduit un repère cartésien d'origine O, tous les vecteurs dans l'équation (1) peuvent être remplacés par les matrices-colonnes de leurs coordonnées dans le repère $\{O, \boldsymbol{e}\}$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{b}_k.$$

Enfin, en écrivant l'équation (1) dans la base e pour chaque coordonnée, on obtient les *équations paramétriques du plan* (π) dans le repère $\{O, \boldsymbol{e}\}$:

$$x_i = x_{i0} + t_1b_{i1} + \ldots + t_kb_{ik}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Soient (π) et (π') deux plans dans l'espace affine $\mathcal{A}$ muni de l'espace de vecteurs $\mathcal{L}$, et soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les sous-espaces directeurs de ces plans. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ ou $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, les plans (π) et (π') sont dits *parallèles*. Si (π) et (π') n'ont pas de points communs et ne sont pas *parallèles*, on dira qu'ils sont *disjoints*. On distingue deux cas: si $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{o\}$, les plans sont dits *absolument disjoints*, et si $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ contient un vecteur non nul et ne coïncide avec aucun des sous-espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, on dit que les plans sont *disjoints parallèlement au sous-espace* $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

Si la somme directe des sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ des plans (π) et (π') coïncide avec l'espace de vecteurs $\mathcal{L}$, les plans (π) et (π') ont un point com-

mun unique. Dans ce cas, est définie la notion de projeté du point $A \in \mathcal{A}$ sur l'un de ces plans parallèlement à l'autre. A savoir, on appelle *projeté du point A sur le plan* (π') *parallèlement au plan* (π) (ou parallèlement à $\mathcal{M}$) le point d'intersection du plan (π') avec le plan de sous-espace directeur $\mathcal{M}$, qui contient A.

On appelle *segment AB* joignant les points A et B de l'espace affine l'ensemble de tous les points de la forme $P(A, t\overrightarrow{AB})$, $t \in [0, 1]$. Bien que la distance entre les points de l'espace affine ne soit pas définie, on peut introduire la notion de division d'un segment dans le rapport donné. Si p et q sont des nombres tels que $p + q \neq 0$, on dit que le point C divise le segment AB dans le rapport $p : q$ si $q\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CB}$. Si le rapport $p : q$ est négatif, le point C se trouve à l'extérieur du segment AB.

On appelle *milieu* du segment le point qui partage le segment dans le rapport $1 : 1$.

L'ensemble $\mathfrak{G}$ de points de l'espace affine est dit *convexe* si le segment joignant deux points quelconques de $\mathfrak{G}$ est contenu dans $\mathfrak{G}$.

On appelle *enveloppe convexe* d'un ensemble $\mathcal{M}$ de l'espace affine l'intersection de tous les ensembles convexes contenant $\mathcal{M}$.

L'enveloppe convexe d'un système indépendant de points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ est appelée *simplexe k-dimensionnel* de sommets $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Le simplexe 0-dimensionnel est un point, le simplexe unidimensionnel est un segment; le simplexe bidimensionnel de sommets A_0, A_1, A_2 est appelé *triangle*, le simplexe tridimensionnel de sommets A_0, A_1, A_2, A_3 est appelé *tétraèdre*. Tout simplexe p-dimensionnel dont les sommets sont des points $B_0, B_1, \ldots, B_p$ de l'ensemble des sommets du simplexe k-dimensionnel donné est appelé face p-dimensionnelle du simplexe k-dimensionnel donné ($0 \leqslant k < p$). Les faces unidimensionnelles du simplexe portent le nom d'*arêtes*.

Etant donné un point A_0 de l'espace affine $\mathcal{A}$ muni de l'espace de vecteurs $\mathcal{L}$ et un système $\{f_1, \ldots, f_k\}$ de vecteurs de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants, on appelle *parallélépipède k-dimensionnel* $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ de sommet A_0, construit sur les vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ l'ensemble de tous les points de la forme

$$P(A_0, t_1f_1 + \ldots + t_kf_k), \quad 0 \leqslant t_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Le *parallélépipède 0-dimensionnel* est un point, le parallélépipède unidimensionnel est un segment; le parallélépipède bidimensionnel est appelé *parallélogramme*. On appelle *frontière* du parallélépipède $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ le sous-ensemble de ses points pour lesquels les valeurs d'un au moins des paramètres t_j dans (2) sont égales à 0 ou 1. L'ensemble des points de la frontière du parallélépipède pour lesquels p paramètres fixés arbitraires prennent des valeurs quelconques et $k-p$ paramètres restent constants et égaux à 0 ou 1 est appelé *face p-dimensionnelle* du parallélépipède ($k = 0, 1, \ldots, p - 1$). On appelle *sommet* du parallélépipède toute face 0-dimensionnelle de ce parallélépipède (c'est-à-dire le point frontière pour lequel chacun des paramètres t_j prend la valeur 0 ou 1). Les faces unidimensionnelles du parallélépipède sont ses *arêtes*. Le segment joignant deux sommets quelconques du parallélépipède et n'appartenant à aucune de ses faces est appelé *diagonale* du parallélépipède.

33.1. Vérifier que l'espace vectoriel n-dimensionnel $\mathcal{L}$ est un espace affine associé à l'espace de vecteurs coïncidant avec $\mathcal{L}$ si les points de cet espace affine sont les vecteurs de $\mathcal{L}$ et à tout couple de vecteurs a, b on fait correspondre le vecteur $x = b - a$.

33.2. Démontrer que dans un espace affine $\mathcal{A}$:

1) $\overrightarrow{AA} = o$ pour tout point A de $\mathcal{A}$;
2) $P(A, o) = A$ pour tout point A de $\mathcal{A}$;

3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ pour tous points A et B de $\mathcal{A}$;

4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ si et seulement si $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

33.3. Démontrer que le système des points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ de l'espace affine est libre si et seulement s'il n'existe aucun plan de dimension $< k$ contenant ce système de points.

33.4. Démontrer que le système des points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ de l'espace affine est libre si et seulement si les égalités

$$\lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k} = o,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$$

entraînent $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, quel que soit le point O de cet espace.

33.5. Montrer que la définition d'un système libre de points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ reste valable pour tout point du système. A savoir, si les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ sont linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{A_jA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_jA_{j-1}}, \overrightarrow{A_jA_{j+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_jA_k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

33.6. Soient (π) et (π') deux plans définis respectivement par les sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Démontrer que:

1) si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, soit (π) et (π') ne possèdent pas de points communs, soit $(\pi) \subset (\pi')$

2) si $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, soit (π) et (π') ne possèdent pas de points communs, soit ils coïncident.

33.7. Démontrer que si une droite possède deux points communs distincts avec le plan, elle appartient à ce plan.

33.8. Démontrer que si le plan k-dimensionnel (π_1) contient un système libre de points $A_0, A_1, \ldots, A_k$ communs avec le plan (π_2), on a $(\pi_1) \subset (\pi_2)$.

33.9. Démontrer qu'il existe un plan k-dimensionnel et un seul contenant le système libre des points $A_0, A_1, \ldots, A_k$.

33.10. Soit $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ un système libre de points situés dans le plan k-dimensionnel (π) et soit O un point fixé de l'espace affine. Démontrer que (π) contient les seuls points A pour lesquels

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k},$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres vérifiant l'égalité $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$.

33.11. Soient (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) des droites dans un espace affine. Etant donné que (D_1) est parallèle à (D_2), et (D_3) à (D_4) et que (D_3) coupe (D_1) et (D_2) aux points A_1 et B_1 respectivement, et

(D_4) coupe (D_1) au point A_2, démontrer que (D_4) coupe (D_2) en un point B_2 tel que $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$.

33.12. Démontrer que deux droites quelconques de l'espace affine n-dimensionnel ($n \geqslant 3$) sont entièrement contenues dans un plan tridimensionnel.

33.13. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites $x = a_0 + a_1t$ et $x = b_0 + b_1t$ soient contenues dans un même plan bidimensionnel ?

33.14. Ecrire les équations:

1) de la droite passant par les points A $(-1, 0, 3, -2)$ et B $(2, 1, 4, 5)$;

2) du plan bidimensionnel passant par les points A $(-2, 1, 1, 1)$, B $(1, 3, -5, 2)$ et C $(0, 1, 1, 4)$;

3) du plan tridimensionnel (hyperplan) passant par les points A $(1, 1, 0, -1)$, B $(2, -1, 3, 3)$, C $(1, -1, 1, 5)$ et D $(0, 0, 3, -1)$.

33.15. Soient A $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ et B $(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ deux points différents et p et q des nombres. Trouver les coordonnées du point C partageant le segment AB dans le rapport $p : q$.

33.16. Les points A, B, C d'un espace n-dimensionnel ne sont pas alignés. Démontrer que les médianes du triangle ABC passent par un même point qui les divise dans le rapport $2 : 1$ à partir du sommet.

33.17. Le point M appartient à l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$, et le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ est défini par la matrice-colonne de coordonnées ${}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Démontrer que les coordonnées du point M_1 vérifient l'inéquation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 > 0$.

33.18. Ecrire les équations paramétriques du plan défini par le système d'équations linéaires:

1) $A_{27}x = c_{46}$; 2) $A_{10}x = c_{29}$; 3) $A_{198}x = c_{123}$;
4) $A_{249}x = c_{124}$; 5) $A_{267}x = c_{66}$; 6) $A_{517}x = c_{125}$;
7) $A_{403}x = c_{208}$; 8) $A_{586}x = c_{123}$.

33.19. Ecrire le système d'équations définissant le plan donné

1) $x = c_{28} + tc_{33}$; 2) $x = c_{83} + t_1c_{84} + t_2c_{66}$;
3) $x = c_{147} + tc_{146}$; 4) $x = c_{168} + tc_{207}$;
5) $x = c_{199} + t_1c_{166} + t_2c_{200}$.

33.20. Ecrire dans l'espace quadridimensionnel l'équation de l'hyperplan passant par le point M $(-1, 2, 3, 5)$ parallèlement à l'hyperplan $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

33.21. Ecrire dans l'espace quadridimensionnel l'équation de la droite passant par le point M $(-1, 3, 4, 0)$ parallèlement à la droite $x_1 = 2 + 3t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 7t$, $x_4 = 2 - t$.

33.22. Ecrire dans l'espace pentadimensionnel les équations du plan tridimensionnel passant:

1) par le point M (0, 1, —1, 3, 4) parallèlement au plan tridimensionnel $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_5$;

2) par les points M_1 (1, 3, 1, 0, 1) et M_2 (0, 0, 1, 1, —1) parallèlement au plan bidimensionnel $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $x_1 - x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_3 - x_5 + 1 = 0$;

3) par les points M_1 (—1, 2, 0, 0, 4), M_2 (1, 1, 1, 1, 1), M_3 (0, 1, 3, —1, 1) parallèlement à la droite $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1 + t$, $x_5 = -t$.

33.23. Soient (π) et (π') deux plans dans un espace affine, définis respectivement par les sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Sachant que (π) passe par le point A, et (π') par le point B, démontrer que:

1) l'intersection de (π) et (π') n'est pas vide si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient au sous-espace $\mathcal{M} + \mathcal{M}'$;

2) si les plans (π) et (π') se coupent, l'intersection (π) $\cap$ (π') est un plan de sous-espace directeur $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$.

33.24. Deux plans de dimensions k_1 et k_2 dans un espace affine n-dimensionnel ont un point commun. Sachant que $k_1 + k_2 > n$, démontrer que la dimension de l'intersection des plans donnés est $\geqslant k_1 + k_2 - n$. Formuler cette assertion pour tous les cas possibles si $n = 3$ et $n = 4$.

33.25. On sait que le plan (π) de sous-espace directeur $\mathcal{M}$ passe par le point A et que le plan (π') de sous-espace directeur $\mathcal{M}'$ passe par le point B ne coïncidant pas avec A. Démontrer qu'il existe un plan unique de dimension minimale contenant (π) et (π') et que le sous-espace directeur de ce plan est égal à la somme $\mathcal{M} + \mathcal{M}' + \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est le sous-espace engendré par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

33.26. Formuler et démontrer l'assertion analogue à celle du problème 33.25 pour trois plans.

33.27. Ecrire dans l'espace quadridimensionnel les équations:

1) du plan bidimensionnel contenant le point A (—1, 0, 2, 3) et la droite $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 3t$;

2) du plan bidimensionnel contenant les droites parallèles $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_4 = -5 - t$ et $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = -4 + t$, $x_3 = 1$, $x_4 = -t$;

3) du plan tridimensionnel contenant le point A (—3, 0, 1, 0) et le plan bidimensionnel $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

33.28. Ecrire dans l'espace pentadimensionnel les équations du plan de dimension minimale contenant:

1) les droites $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = 4t$, $x_4 = -t$, $x_5 = 3$ et $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = -1 + 2t$, $x_5 = 3 - t$;

2) la droite $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 1 + 2t$, $x_5 = -3t$ et le plan bidimensionnel $x_1 = t_1 + 3t_2$, $x_2 = -1 + 4t_1 - t_2$, $x_3 = -3 + t_1 + t_2$, $x_4 = 4 - t_1 + t_2$, $x_5 = -2 + t_2$;

3) les plans bidimensionnels $x_1 - x_3 + x_4 - 1 = 0$, $x_1 + 2x_4 - x_5 - 2 = 0$, $x_2 + x_3 - 2 = 0$ et $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

33.29. 1) Démontrer que si deux plans dans un espace n-dimensionnel sont absolument disjoints, la somme de leurs dimensions ne dépasse pas $n - 1$.

2) Démontrer que si deux plans dans un espace n-dimensionnel sont disjoints parallèlement au plan r-dimensionnel, la somme de leurs dimensions ne dépasse pas $n + r - 1$.

33.30. Etudier la position relative de la droite et du plan bidimensionnel dans un espace quadridimensionnel si le plan bidimensionnel est défini par les équations $x_1 - 2x_3 + 1 = 0$, $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2 = 0$, et la droite est définie par les équations paramétriques:

1) $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2 + t$, $x_4 = t$;

2) $x_1 = -2 + 3t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = -4 + 4t$;

3) $x_1 = 6 + t$, $x_2 = 5 - t$, $x_3 = 1 + 2t$, $x_4 = 1 + 3t$;

4) $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = t$, $x_4 = 1 - t$.

33.31. Etudier la position relative de deux plans bidimensionnels dans un espace pentadimensionnel si le premier plan est défini par les équations $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 + x_2 = x_5$ et le deuxième par les équations paramétriques:

1) $x_1 = 2 + t_1, x_2 = 3, x_3 = 3 + 2t_2, x_4 = 4, x_5 = 5 + t_1 + t_2$;

2) $x_1 = -t_1, x_2 = 3 + 2t_1, x_3 = 2 + t_1, x_4 = 1 + t_1 - t_2, x_5 = 2 + t_2$;

3) $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = 3 + t_1 + t_2$, $x_3 = 3 + 2t_1 + t_2$, $x_4 = 4 + t_1$, $x_5 = 5 - 2t_2$;

4) $x_1 = t_1 - t_2$, $x_2 = 1$, $x_3 = t_1$, $x_4 = 1 - t_2$, $x_5 = 3 - t_1 + t_2$;

5) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1 + t_1 + t_2$, $x_4 = 2 + 2t_1 - 2t_2$, $x_5 = -5 + 3t_1 - t_2$;

6) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2 + 2t_1 + t_2$, $x_4 = -3 + t_1 - 3t_2$, $x_5 = -1 + 3t_1 - 2t_2$.

33.32. Démontrer que deux droites définies dans un espace quadridimensionnel par les équations $x = c_{209} + tc_{197}$ et $x = c_{210} + tc_{201}$ ont un point commun unique. Calculer les coordonnées de ce point et écrire les équations du plan bidimensionnel qui contient les droites données.

33.33. Les points de l'espace affine sont les polynômes de degré $\leqslant 4$, et les vecteurs de l'espace associé sont les mêmes polynômes: $\overrightarrow{p_1(t)\, p_2(t)} = p_2(t) - p_1(t)$. La première droite contient les points $2t^4 - 2t$ et $t^4 + t^3 - t$, la seconde droite, les points $5 + 10t^2 + 2t^3$ et $-1 - 2t^2 + 2t^3$. Démontrer que ces droites ont un point commun unique et trouver ce point (polynôme).

33.34. Ecrire les équations paramétriques de la droite dans un espace quadridimensionnel en sachant qu'elle contient le point de

matrice-colonne de coordonnées c_{211} et qu'elle coupe les droites $x = c_{212} + tc_{202}$ et $x = c_{213} + tc_{210}$; calculer les coordonnées des points d'intersection.

33.35. Le système des points $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_j$ est libre. Démontrer qu'il existe deux plans (π) et (π') de dimensions respectives $k - 1$ et $j - 1$ dont l'intersection est vide et qui sont tels que le plan (π) contient les points $A_1, \ldots, A_k$ et le plan (π') contient les points $B_1, \ldots, B_j$.

33.36. Soient (π) et (π') deux plans de l'espace affine, tels que l'espace de vecteurs associé est égal à la somme directe des sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de ces plans. Démontrer que:

1) le projeté de tout point de l'espace affine sur (π) parallèlement à (π') est défini de façon univoque;

2) le projeté de tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur (π) parallèlement à (π') est le projeté de ce vecteur sur $\mathcal{M}$ parallèlement à $\mathcal{M}'$.

33.37. Calculer les coordonnées du projeté du point M (5, 0, —3, 4) de l'espace quadridimensionnel:

1) sur l'hyperplan $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ parallèlement à la droite $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = 1 + t$;

2) sur le plan bidimensionnel $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = x_4$ parallèlement au plan bidimensionnel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

33.38. Est-ce que l'ensemble de points d'un espace affine n-dimensionnel ($n = 1, 2, \ldots$) est convexe si les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de ces points dans un repère cartésien vérifient la condition:

1) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$;

2) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 \geqslant 0$;

3) $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \leqslant 1$, où $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$;

4) $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \geqslant 1$, où $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$;

5) $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$; 6) $x_1x_2 \ldots x_n \geqslant 0$?

33.39. Démontrer qu'un parallélépipède k-dimensionnel est convexe.

33.40. Démontrer que l'intersection d'ensembles convexes est un ensemble convexe.

33.41. Trouver le projeté d'un simplexe quadridimensionnel limité par les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ et $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ sur l'hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ parallèlement à la droite $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

33.42. Démontrer que toutes les diagonales d'un parallélépipède se coupent en un seul point appelé centre du parallélépipède.

33.43. Trouver pour le parallélépipède k-dimensionnel le nombre

1) des faces p-dimensionnelles distinctes;

2) des diagonales distinctes.

33.44. Déterminer la forme et les sommets des sections du parallélépipède quadridimensionnel $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, par l'hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

§ 34. Espaces euclidiens ponctuels

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *espace euclidien ponctuel*, *distance entre les points*, *repère cartésien orthonormé*, *projetés orthogonaux du point et du vecteur sur le plan*, *simplexe régulier*, *parallélépipède rectangle*, *cube k-dimensionnel*, *volume du parallélépipède k-dimensionnel*, *sphère*, *centre et rayon de la sphère*, *distance entre deux ensembles*, *angle du vecteur et du plan*, *angle de la droite et du plan*, *angle de deux plans*.

Le repère cartésien $\{O, e\}$ est dit orthonormé si la base e est orthonormée.

On appelle *projeté orthogonal du point A sur le plan* (π) de sous-espace directeur $\mathcal{M}$ le projeté du point A sur (π) parallèlement à $\mathcal{M}^{\perp}$. De façon analogue on définit le projeté orthogonal $\overrightarrow{A_1B_1}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le plan (π).

On appelle *simplexe régulier* dans l'espace euclidien ponctuel le simplexe dont toutes les arêtes sont de même longueur. Le parallélépipède Π $(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ est dit *rectangle* si le système des vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ est orthogonal; le parallélépipède rectangle k-dimensionnel est appelé *cube k-dimensionnel* si les longueurs de toutes ses arêtes sont égales entre elles.

Le *volume* V $(\Pi (A_0; f_1, \ldots, f_k))$ du parallélépipède k-dimensionnel Π $(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ se définit par la formule

$$V(\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)) = \sqrt{\det \Gamma (f_1, \ldots, f_k)},$$

où $\det \Gamma (f_1, \ldots, f_k)$ est le déterminant de la matrice de Gram du système de vecteurs $f_1, \ldots, f_k$ sur lequel est construit le parallélépipède.

On appelle *sphère* de centre au point A_0 et de rayon $R > 0$ dans l'espace euclidien ponctuel l'ensemble des points $\{A : |\overrightarrow{A_0A}| = R\}$.

On appelle *distance* entre deux ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de l'espace euclidien ponctuel le nombre

$$\inf_{A \in \mathcal{M},\, B \in \mathcal{N}} |\overrightarrow{AB}|.$$

On appelle *angle du vecteur non nul et du plan* (π) l'angle que ce vecteur fait avec le sous-espace directeur du plan (π). On appelle *angle de la droite* (D) *et du plan* (π) l'angle formé par le vecteur directeur de la droite (D) avec le sous-espace directeur du plan (π).

On appelle *angle de deux plans* l'angle des sous-espaces directeurs de ces plans.

Dans les problèmes du § 34 les coordonnées des vecteurs sont définies dans la base orthonormée, et les coordonnées des points, dans le repère cartésien orthonormé.

34.1. Vérifier que la distance $\rho(A, B)$ des points A et B dans un espace euclidien ponctuel possède les propriétés suivantes:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ pour tous points A et B;

2) $\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(B, C)$ pour tous points A, B, C;

3) pour tout point C tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ on a l'égalité $\rho(A, C) = |\lambda| \rho(A, B)$.

34.2. Calculer les longueurs des côtés et les angles intérieurs du triangle ABC défini par les coordonnées des sommets:

1) $A(-1, 0, -1, 2)$, $B(0, 2, 0, 3)$, $C(2, 1, 1, 2)$;
2) $A(1, 2, 2, -1)$, $B(3, 0, 3, -1)$, $C(2, 1, 1, 0)$;
3) $A(0, 1, -1, 2, -1)$, $B(4, 1, 1, 2, 3)$, $C(3, 4, 2, 5, -1)$.

34.3. Est-ce que les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ peuvent former un triangle dans un espace euclidien ponctuel quadridimensionnel? S'ils le peuvent, calculer les angles intérieurs du triangle;
1) $\boldsymbol{a} = {}^t(3, 1, -2, 2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = {}^t(-2, 0, 3, -1)$;
2) $\boldsymbol{a} = {}^t(2, -1, 1, -3)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(1, 3, -1 -2)$, $\boldsymbol{c} = {}^t(-1, 4, 3, 1)$;
3) $\boldsymbol{a} = {}^t(0, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(1, -2, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = {}^t(-1, 3, 1, -2)$;
4) $\boldsymbol{a} = {}^t(0, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{c} = {}^t(1, 3, -1, 2)$.

34.4. Déterminer les angles du triangle dont les côtés sont les vecteurs $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = 1 - t$ dans un espace euclidien ponctuel des polynômes de degré $\leqslant 2$ muni du produit scalaire

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt.$$

34.5. Démontrer que dans un espace euclidien ponctuel la somme des angles intérieurs du triangle vaut 180°.

34.6. Formuler et démontrer le théorème des cosinus pour le triangle dans un espace euclidien ponctuel.

34.7. Démontrer que dans le parallélogramme la somme des carrés des longueurs de ses diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

34.8. Trouver la longueur de la diagonale du parallélépipède rectangle k-dimensionnel dont les arêtes non parallèles sont de longueurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

34.9. Calculer l'angle de la diagonale et de l'arête d'un cube n-dimensionnel.

34.10. Démontrer que l'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est un hyperplan passant par le milieu du segment AB perpendiculairement à ce dernier.

34.11. Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au simplexe quadridimensionnel défini par les coordonnées de ses sommets:
1) $A_0(4, -2, -1, -1)$, $A_1(1, 1, 2, 2)$, $A_2(3, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 2, 3, -1)$, $A_4(1, -5, -4, 2)$;
2) $A_0(3, 3, 1, -1)$, $A_1(1, 3, 3, 1)$, $A_2(0, 3, 4, -1)$, $A_3(2, 1, 2, 3)$, $A_4(2, 3, 0, 1)$.

34.12. L'hyperplan (π) de l'espace euclidien ponctuel quadridimensionnel contient un tétraèdre défini par les coordonnées de ses sommets: $A_1(4, 4, -1, 1)$, $A_2(-2, -8, -5, 1)$, $A_3(3, 3, 1, 3)$, $A_4(1, -2, 4, 1)$. En considérant (π) comme espace euclidien ponctuel tridimensionnel, trouver dans cet espace le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre donné.

34.13. Calculer le volume d'un parallélépipède k-dimensionnel construit dans l'espace quadridimensionnel sur les vecteurs définis par les matrices-colonnes de coordonnées $e_1, \ldots, e_k$.

1) $e_1 = {}^t(1, 0, 0, 1), e_2 = {}^t(3, 2, -2, 0)$;

2) $e_1 = {}^t(1, 1, 2, 1), e_2 = {}^t(3, 1, 2, 1)$;

3) $e_1 = {}^t(2, 0, 1, 1), e_2 = {}^t(1, 1, 0, 2), e_3 = {}^t(1, 0, 0, 1)$;

4) $e_1 = {}^t(1, 1, -1, -1), e_2 = {}^t(1, 0, 0, 3), e_3 = {}^t(3, 0, 2, 1)$;

5) $e_1 = {}^t(1, 0, 1, 1), e_2 = {}^t(1, 1, 0, 1), e_3 = {}^t(1, 1, -3, 1), e_4 = {}^t(1, 0, 0, 2)$;

6) $e_1 = {}^t(1, 0, 0, -1), e_2 = {}^t(1, 2, 0, -3), e_3 = {}^t(0, 1, -1, 1), e_4 = {}^t(1, 1, 1, 1)$.

34.14. On donne la relation de récurrence suivante: le volume d'un simplexe k-dimensionnel est égal au volume de sa face $(k-1)$-dimensionnelle multiplié par $1/k$ de la longueur de la hauteur abaissée du sommet opposé à cette face sur le plan de la face. Démontrer en utilisant cette relation que le volume d'un simplexe K-dimensionnel de sommets $A_0, A_1, \ldots, A_K$ vaut $\frac{1}{K!}$ du volume du parallélépipède $\Pi(A_0; \overrightarrow{A_1A_0}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_K})$.

34.15. Calculer le volume du simplexe:

1) du problème 34.11.1);

2) du problème 34.11,2);

3) du problème 34.12.

34.16. Calculer le volume du simplexe régulier n-dimensionnel dont la longueur de l'arête vaut a.

34.17. Démontrer que la distance du point A au plan k-dimensionnel (π) est égale à:

1) la distance du point A à son projeté orthogonal sur (π);

2) la longueur de la composante orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (B étant un point quelconque de (π)) par rapport au sous-espace directeur du plan (π).

34.18. Soient (π) et (π') des plans de sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement. Sachant que (π) passe par le point A, et (π') par le point B, démontrer que la distance des plans (π) et (π') est égale à la longueur de la composante orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au sous-espace $\mathcal{M}+\mathcal{M}'$.

34.19. L'hyperplan (π) est défini par l'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$. Démontrer que:

1) le vecteur de matrice-colonne de coordonnées ${}^t(a_1, \ldots, a_n)$ est orthogonal à (π);

2) la distance du point $A(y_1, \ldots, y_n)$ à (π) est égale à

$$|a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + a_0| / \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

34.20. Le point A est défini par ses coordonnées, l'hyperplan (π) par l'équation. Calculer la distance de A à (π) si:

1) $A\,(9,\ 2,\ -3,\ 1)$, (π): $3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 3 = 0$;
2) $A\,(1,\ -3,\ 0,\ -2,\ 4)$, (π): $2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 - 7 = 0$.

34.21. Ecrire l'équation de l'hyperplan parallèle à l'hyperplan (π) et situé de (π) à la distance donnée d, si:
1) (π): $5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3$, $d = 2$;
2) (π): $x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$, $d = 5$;
3) (π): $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -5$, $d = 3$.

34.22. Déterminer le projeté orthogonal du point A sur l'hyperplan (π):
1) $A\,(7,\ -1,\ 6,\ 1)$, (π): $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$;
2) $A\,(1,\ 2,\ 8,\ -2)$, (π): $2x_1 - 2x_3 + x_4 = 11$;
3) $A\,(3,\ 0,\ -1,\ 2,\ 6)$, (π): $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -16$.

34.23. Les points A et B sont définis par leurs coordonnées. Trouver le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'hyperplan (π) si:
1) $A\,(-3,\ 0,\ 1,\ 3)$, $B\,(5,\ 2,\ 2,\ 3)$, (π): $2x_1 + x_2 - x_4 = 3$;
2) $A\,(3,\ 3,\ -8,\ -3,\ 4)$, $B\,(3,\ 2,\ -1,\ -2,\ 2)$, (π): $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5$.

34.24. Trouver le rapport de la longueur de la projetée orthogonale de l'arête du cube n-dimensionnel sur sa diagonale à la longueur de la diagonale.

34.25. Trouver le point orthogonalement symétrique du point A par rapport à l'hyperplan (π):
1) $A\,(5,\ 5,\ 3,\ 3)$, (π): $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 = 0$;
2) $A\,(3,\ 5,\ -3,\ 5)$, (π): $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 2 = 0$;
3) $A\,(3,\ 6,\ 3,\ 8,\ 1)$, (π): $x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3 = 0$.

34.26. Trouver le projeté orthogonal du point A sur la droite (D):
1) $A\,(1,\ -5,\ 2,\ 0)$; (D); $x_1 = 4 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = -3 - t$, $x_4 = 7 + 3t$;
2) $A\,(-2,\ 1,\ 4,\ 2)$; (D): $x_1 = -3 + 2t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = -3 + t$;
3) $A\,(2,\ 4,\ 3,\ -1,\ 1)$; (D): $x_1 = 2 - 2t$, $x_2 = -1 + 3t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = 2 + t$, $x_5 = -t$.

34.27. Le point A n'appartient pas au plan (π). Démontrer qu'il existe une droite unique passant par le point A, coupant (π) et perpendiculaire à (π).

34.28. Ecrire les équations de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite (D):
1) $A\,(1,\ -3,\ -2,\ 4)$; (D): $x_1 = 4 + 3t$, $x_2 = 2 + t$, $x_3 = 3 + t$, $x_4 = -1 - t$;
2) $A\,(1,\ -3,\ -1,\ 3)$; (D): $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 1 - 2t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = t$;
3) $A\,(4,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$; (D): $x_1 = t$, $x_2 = 3 - 2t$, $x_3 = -2 + t$, $x_4 = -3 + 2t$, $x_5 = t$.

34.29. Déterminer le point orthogonalement symétrique du point A par rapport à la droite (D):

1) A $(4, 1, -1, -1)$, (D) est la droite du problème 34.26, 1);
2) A $(2, 5, -3, -2)$, (D) est la droite du problème 34.26, 2).

34.30. Calculer l'angle que le vecteur défini par la matrice-colonne de coordonnées $\boldsymbol{a}$ forme avec l'hyperplan (π), si:

1) $\boldsymbol{a} = {}^t(0, 1, 0, 1)$, $(\pi): 3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2$;
2) $\boldsymbol{a} = {}^t(1, -1, 1, 1)$, $(\pi): 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$;
3) $\boldsymbol{a} = {}^t(1, -3, 2, -1, -1)$, $(\pi): x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 1$.

34.31. Calculer l'angle des droites (D_1) et (D_2) si:

1) $(D_1): x_1 = 4 + t, x_2 = -2t, x_3 = 1 - t, x_4 = 2$; (D_2): $x_1 = 3, x_2 = t, x_3 = 5 + t, x_4 = -1$;
2) $(D_1): x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + t, x_3 = 3 + t, x_4 = 2t, x_5 = 1 - t$; $(D_2): x_1 = t, x_2 = 5, x_3 = -1 + t, x_4 = 3 - 2t, x_5 = 2t$.

34.32. Calculer la distance du point A à la droite (D):

1) A $(0, 3, 2, -5)$; $(D): x_1 = 1 + t, x_2 = -t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = -2 + 2t$;
2) A $(2, -2, 1, 5)$; $(D): x_1 = 3 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 2 + t, x_4 = -t$;
3) A $(3, 3, 1, 0, 0)$; (D): $x_1 = 2 + 3t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = -t, x_4 = 1 + t, x_5 = -1 - t$;
4) A $(1, -1, -1, 1)$; (D): $x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0$, $3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0$.

34.33. La droite (D_1) de vecteur directeur a_1 passe par le point A_1, la droite (D_2) de vecteur directeur a_2 passe par le point A_2. Démontrer que:

1) le carré de la distance de (D_1) à (D_2) vaut $\det \Gamma(\overrightarrow{A_1A_2}, a_1, a_2)/\det \Gamma(a_1, a_2)$ si a_1 et a_2 ne sont pas colinéaires;

2) le carré de la distance de (D_1) à (D_2) vaut $\det \Gamma(\overrightarrow{A_1A_2}, a_1)/|a_1|^2$ si a_1 et a_2 sont colinéaires.

34.34. Chercher la distance entre les droites (D_1) et (D_2):

1) $(D_1): x_1 = 1 + t, x_2 = -1, x_3 = -t, x_4 = -2 + t$; (D_2): $x_1 = 4 + t, x_2 = 2t, x_3 = 1 + t, x_4 = t$;
2) $(D_1): x_1 = 2 + t, x_2 = -1 - 2t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = 1 - t$; $(D_2): x_1 = 3 - t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = -1 - 2t$; $x_4 = 2 + t$;
3) $(D_1): x_1 = 3 + t, x_2 = 2, x_3 = t, x_4 = 3 + t, x_5 = -t$; (D_2): $x_1 = 1 + 2t, x_2 = 2t, x_3 = 1 - t, x_4 = t, x_5 = 2$;
4) $(D_1): x_1 = 1 + t, x_2 = -2t, x_3 = 1 - t, x_4 = -1 + t, x_5 = t$; $(D_2): x_1 = 3 + t, x_2 = -2t, x_3 = -1 - t, x_4 = 1 + t, x_5 = 2 + t$;
5) $(D_1): x_1 = 1 - 2t, x_2 = 0, x_3 = t, x_4 = 1 + t, x_5 = 2$; $(D_2): x_1 = -1 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = -2 - t$.

34.35. Ecrire les équations de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan (π) si:

1) A (3, 7, —2, 1); $(\pi): x_1 = 2 + t_1, x_2 = 2 + t_2, x_3 = t_1 + t_2, x_4 = -t_2$;

2) A (—3, —1, 4, 7, —3); $(\pi): x_1 = t_1 + t_3, x_2 = 2 + t_2 + t_3, x_3 = 2 + t_1, x_4 = 1 + t_2 + t_3, x_5 = 1 + t_2$.

34.36. Trouver le projeté orthogonal du point A sur le plan (π) si

1) A (—3, 2, 2, —2); $(\pi): x_1 = 2 + t_1 + t_2, x_2 = 4 + 2t_1, x_3 = t_1, x_4 = -t_2$;

2) A (3, 2, 1, 4, —1); $(\pi): x_1 = 1 + t_1, x_2 = -1 + t_2, x_3 = 2 + t_1 + t_2, x_4 = -2 - t_1, x_5 = t_2$;

3) A (0, —1, 5, 1, —2); $(\pi): x_1 = 1 + t_1, x_2 = t_3, x_3 = 1 + t_1 + t_2, x_4 = -2 + t_3, x_5 = -1 + t_2$.

34.37. Déterminer le point orthogonalement symétrique du point A par rapport au plan (π) si:

1) A (5, 3, —1, —1); $(\pi): x_1 = 1 + t_1, x_2 = t_2, x_3 = -2 + t_2, x_4 = -1 + t_1$;

2) A (3, 5, 0, 2, 2); $(\pi): x_1 = t_1, x_2 = 2 + t_2, x_3 = -3 + t_1, x_4 = 3 - t_1 - t_2, x_5 = 1$.

34.38. Soit (π) le plan de sous-espace directeur $\mathscr{M}$, passant par le point A_0, et soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base dans $\mathscr{M}$. Démontrer que le carré de la distance du point A_1 au plan (π) vaut

$$\det \Gamma (\overrightarrow{A_0A_1}, f_1, \ldots, f_k)/\det \Gamma (f_1, \ldots, f_k).$$

34.39. Calculer la distance du point A au plan (π):

1) dans le problème 34.35,1);

2) dans le problème 34.35,2).

34.40. Calculer la distance du point A au plan (π) défini par les équations paramétriques si:

1) A (1, 2, 1, 1); $(\pi): x_1 = -2t_1 + 4t_2, x_2 = -1 + t_1 - t_2, x_3 = -t_3, x_4 = t_1 - t_2$;

2) A (3, 1, 1, 0); $(\pi): x_1 = -2 + t_1, x_2 = -t_1 + 2t_2, x_3 = t_1 - t_2, x_4 = 1 - t_1 - t_2$;

3) A (1, 2, 1, 3, 0); $(\pi): x_1 = 1 + t_1, x_2 = -t_1 + t_2, x_3 = 1 + t_2, x_4 = -1 - t_2, x_5 = t_1$.

34.41. Calculer la distance du point A au plan (π) défini par le système d'équations linéaires, si:

1) A (1, 0, 0, 1); $(\pi): x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7, x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -6$;

2) A (1, 2, 0, 0); $(\pi): x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$.

34.42. Les points A et B sont définis par leurs coordonnées. Calculer l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le plan (π) si:

1) A (1, 2, 2, 3), B (4, 0, 0, 2); $(\pi): x_1 = 1 + t_1, x_2 = 2 + t_2, x_3 = -t_1 + t_2, x_4 = 3$;

2) A (0, 1, —1, 0, 1), B (3, 1, 0, 1, 2); $(\pi): x_1 = t_1 + t_2, x_2 = 5, x_3 = -t_2, x_4 = -t_1 + t_2, x_5 = 2 + t_1$;

3) $A(-1, -1, 1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1, 1, 0)$; (π): $x_1 = t_1 + t_3$, $x_2 = 2 + t_2$, $x_3 = 1 - t_2$, $x_4 = -t_1 + t_3$, $x_5 = -2t_3$.

34.43. Les plans (π) et (π') de l'espace euclidien ponctuel n-dimensionnel sont définis par les sous-espaces directeurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement. On sait que (π) passe par le point A, et (π') par le point B. Si $(g_1, \ldots, g_k)$ est une base dans le sous-espace $\mathcal{M} + \mathcal{M}'$, démontrer que le carré de la distance entre les plans (π) et (π') vaut $\det \Gamma(\overrightarrow{AB}, g_1, \ldots, g_k)/\det \Gamma(g_1, \ldots, g_k)$.

34.44. Calculer la distance entre les plans (π_1) et (π_2):

1) (π_1): $x_1 = 2 - 2t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 0$; (π_2): $x_1 = 1 - 2t_1$, $x_2 = 1 + 2t_1 + 3t_2$, $x_3 = 1 + t_1$, $x_4 = 1 + 2t_1 + 2t_2$;

2) (π_1): $x_1 = 3 + t_1 + 2t_2$, $x_2 = -t_1$, $x_3 = 1 + t_1 - t_2$, $x_4 = -t_1 - t_2$; (π_2): $x_1 = 2t_1 + t_2$, $x_2 = 1 - 3t_1 + t_2$, $x_3 = -8 - t_2$, $x_4 = 1 + t_1 - t_2$;

3) (π_1): $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1$, $x_4 = t$, $x_5 = 0$; (π_2): $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + t_1 + t_2$, $x_3 = 3 + 2t_2$, $x_4 = 2t_1$, $x_5 = 1 + t_1 - t_2$;

4) (π_1): $x_1 = 1 + t_2$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_1$, $x_5 = 2t_1$; (π_2): $x_1 = t_2 + 2t_3$, $x_2 = 2 + t_1 + 2t_3$, $x_3 = x_4 = 1 + t_1 - t_2 + t_3$, $x_5 = 2 + t_1 - t_2 + 2t_3$;

5) (π_1): $2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8$; (π_2): $x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$;

6) (π_1): $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $2x_1 + x_2 - x_4 = 4$; (π_2): $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1 + x_3 + x_4 = 1$, $2x_1 - x_2 - x_4 = 0$.

34.45. Dans l'espace affine n-dimensionnel, les plans (π_1) et (π_2) de dimensions k_1 et k_2 respectivement sont absolument disjoints. Démontrer que:

1) il existe un plan unique de dimension $n - k_1 - k_2$ orthogonal à (π_1) et (π_2) et coupant chacun de ces plans;

2) il existe une droite unique orthogonale à (π_1) et (π_2) et coupant chacun de ces plans.

34.46. Ecrire les équations du plan de dimension maximale, orthogonal aux plans (π_1) et (π_2) et coupant chacun d'eux, ainsi que les équations de la perpendiculaire commune à (π_1) et (π_2) si:

1) (π_1) et (π_2) sont les droites du problème 34.34, 1);

2) (π_1) et (π_2) sont les droites du problème 34.34, 3);

3) (π_1) et (π_2) sont les plans du problème 34.44, 3).

34.47. Calculer l'angle des plans (π_1): $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = x_3 = t_1$, $x_4 = -1 + t_1 - t_2$ et (π_2): $x_1 = t_1 + 2t_2$, $x_2 = 3 + t_2$, $x_3 = 2 - t_1 - 2t_2$, $x_4 = -t_2$.

34.48. Dans le simplexe régulier pentadimensionnel $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ calculer l'angle:

1) des faces $A_0A_1A_2$ et $A_0A_3A_4$;

2) des faces $A_0A_1A_2$ et $A_0A_3A_4A_5$;

3) des faces $A_0A_1A_2$ et $A_1A_2A_3A_4A_5$.

CHAPITRE XIV

TENSEURS

§ 35. Définition du tenseur invariant. Notations tensorielles, matrices multidimensionnelles

On utilise dans ce paragraphe les notions fondamentales suivantes: *invariant*, *tenseur de type* (p, q) *(p fois contravariant, q fois covariant)*, *tenseur de valence* $(p+q)$, *covecteur*, *composantes d'un tenseur*, *matrice des composantes du tenseur*, *loi de transformation des composantes du tenseur par changement de base.*

L'espace vectoriel n-dimensionnel est noté $\mathcal{L}_n$. On admet partout dans ce chapitre que l'espace $\mathcal{L}_n$ est réel. Le tenseur est désigné par une seule lettre, et ses composantes, par la même lettre avec indices. Par exemple, les composantes du tenseur a de type (2, 1) sont notées a_k^{ij} (on admet que les indices i, j, k parcourent tous les entiers naturels de 1 à n, où n est la dimension de l'espace). Le tenseur peut aussi être noté a_k^{ij}.

Les indices inférieurs et supérieurs sont dits aussi *covariants* et *contravariants* respectivement.

Les éléments de la matrice de passage S d'une base à l'autre sont en général désignés par σ_j^i (i étant le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne). Les éléments de la matrice T inverse de S sont notés τ_j^i. Si on fait le passage à une nouvelle base, les composantes du tenseur de type (2, 1) se transforment d'après la formule

$$a_t'^{rs} = a_k^{ij}\tau_i^r\tau_j^s\sigma_t^k.$$

On convient que la sommation dans le second membre de l'égalité se fait sur les indices i, j, k. Tous les indices parcourent les entiers naturels de 1 à n. La transformation des composantes d'un tenseur quelconque s'effectue de la façon analogue. On dit que *les indices inférieurs du tenseur se transforment à l'aide des éléments de la matrice de passage S et que les indices supérieurs le font à l'aide des éléments de la matrice inverse.*

Les tenseurs dont toutes les composantes sont nulles sont dits *nuls*. Dans quelques problèmes on utilise le tenseur de type (1, 1) appelé *symbole de Kronecker*. Ses composantes dans toutes les bases se définissent par la formule

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Dans le cas où il est nécessaire d'écrire toutes les composantes d'un tenseur, on recourt à l'écriture matricielle. Fournissons sur ce sujet quelques détails.

Ordonnons au préalable tous les indices du tenseur de la façon suivante: d'abord tous les indices supérieurs de gauche à droite, puis tous les indices inférieurs de gauche à droite *). Après avoir ordonné les indices on peut écrire l'ensemble des composantes d'un tenseur de valence 2 sous la forme d'une ma-

*) Pour certains tenseurs de l'espace euclidien, on utilise un autre procédé de mise en ordre des indices. On en parlera plus bas dans l'introduction au § 37. La description de l'écriture matricielle des composantes du tenseur se rapporte à tous les tenseurs dont les indices sont ordonnés d'une façon ou d'une autre.

trice carrée d'ordre n; ce faisant, on admet que le premier indice de la composante est égal au numéro de la ligne, le deuxième au numéro de la colonne.

De façon analogue, l'ensemble des composantes d'un tenseur de valence 3 peut être mis sous la forme d'une *matrice tridimensionnelle* d'ordre n. Pour écrire la matrice tridimensionnelle on procède de la façon suivante. En fixant une valeur quelconque k du troisième indice, on obtient une *couche bidimensionnelle* ou une *section bidimensionnelle* de la matrice tridimensionnelle, soit la matrice carrée A_k d'ordre n. Les composantes du tenseur donné se disposent dans la matrice A_k de telle façon que le premier indice de la composante est égal au numéro de la ligne, le deuxième au numéro de la colonne et le troisième indice est égal à k. On peut maintenant écrire toutes les composantes du tenseur sous la forme de la matrice rectangulaire (plane) $A = \| A_1 A_2 \ldots A_n \|^{\Box}$ *) à n lignes et n^2 colonnes dont les éléments sont ceux des matrices A_k. La matrice A est aussi appelée matrice tridimensionnelle. Par exemple, pour $n = 2$ les composantes du tenseur a^i_{jk} forment la « matrice tridimensionnelle d'ordre 2 »

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a^1_{11} & a^1_{21} & a^1_{12} & a^1_{22} \\ a^2_{11} & a^2_{21} & a^2_{12} & a^2_{22} \end{array} \right\|$$

qui se compose de deux couches bidimensionnelles.

Les composantes d'un tenseur de valence 4 dans $\mathcal{L}_n$ forment une *matrice quadridimensionnelle* d'ordre n. Après avoir fixé les valeurs quelconques k, l des deux derniers indices, on obtient une matrice carrée A_{kl} d'ordre n, appelée *section bidimensionnelle de la matrice quadridimensionnelle*. Les composantes du tenseur considéré se disposent dans la matrice A_{kl} de telle façon que le premier indice de la composante se confond avec le numéro de la ligne, le deuxième indice est égal au numéro de la colonne, le troisième et le quatrième indices sont k et l respectivement. Toutes les composantes du tenseur peuvent maintenant être écrites sous la forme de la matrice carrée (plane) $A = \| A_{kl} \|^{\Box}$ d'ordre n^2 dont les éléments sont ceux des matrices A_{kl}. La matrice A peut également être appelée matrice quadridimensionnelle. Par exemple, pour $n = 2$, au tenseur a_{ijkl} correspond la « matrice quadridimensionnelle d'ordre 2 »

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a_{1111} & a_{1211} & a_{1112} & a_{1212} \\ a_{2111} & a_{2211} & a_{2112} & a_{2212} \\ \hline a_{1121} & a_{1221} & a_{1122} & a_{1222} \\ a_{2121} & a_{2221} & a_{2122} & a_{2222} \end{array} \right\|$$

qui comprend quatre couches bidimensionnelles.

35.1. Soient ξ^1, ξ^2 et η^1, η^2 les coordonnées des vecteurs x et y dans une base arbitraire de l'espace vectoriel bidimensionnel. Faisons correspondre à cette base les nombres:

$$1)\ \xi^1 + \xi^2; \quad 2)\ \xi^1 + \eta^1; \quad 3)\ \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}.$$

Comment se transforment ces nombres avec le changement de base? Vérifier si chacune de ces grandeurs est un tenseur, un invariant.

35.2. Faisons correspondre à chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$:

1) le nombre 1; 2) un ensemble ordonné des nombres $1, \ldots, n$. Est-ce que cette correspondance est un tenseur? Un invariant?

---

*) Le signe $\Box$ montre que les éléments de la matrice sont des nombres et non pas des matrices (voir introduction au § 15).

35.3. Soit φ une transformation linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_3$. Notons $A = \| a_{ij} \|$ sa matrice dans une base arbitraire et faisons correspondre à cette base le nombre:

1) det A ; 2) cos det A ; 3) Rg A ;

4) det ${}^tAA$; 5) $a_{11} + a_{22}$; 6) $a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Comment varie chacune de ces grandeurs avec le changement de base? Dans quel cas définit-elle un tenseur? Un invariant?

35.4. Soient b une fonction bilinéaire, $B = \| b_{ij} \|$ sa matrice dans une base arbitraire de l'espace $\mathcal{L}_n$. Faisons correspondre à cette base le nombre:

1) det B; 2) $b_{11} + \ldots + b_{nn}$; 3) b_{11};

4) det ${}^tBB$; 5) Rg B; 6) sgn det B.

Comment varie chacune de ces grandeurs avec le changement de base? Dans quels cas définit-elle un tenseur? Un invariant?

35.5. Soient f une fonction linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice-ligne de ses coefficients dans une base arbitraire. Faisons correspondre à cette base:

1) le nombre $a_1 + \ldots + a_n$;

2) un ensemble ordonné des nombres $a_1, \ldots, a_n$. Comment varient ces grandeurs avec le changement de base? Lesquelles de ces dernières sont des tenseurs? Des invariants?

35.6. 1) De quel type est le tenseur défini par une fonction bilinéaire dans $\mathcal{L}_n$? Comment trouver les composantes de ce tenseur?

2) De quel type est le tenseur défini par une fonction quadratique dans $\mathcal{L}_n$? Comment trouver les composantes de ce tenseur?

35.7. Les fonctions linéaires f, g possèdent dans la base $\boldsymbol{e}$ de l'espace $\mathcal{L}_n$ les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ respectivement. Montrer que les fonctions:

1) f^2; 2) fg

définissent les tenseurs dans $\mathcal{L}_n$, indiquer leurs types et écrire les composantes de chacun d'eux dans la base $\boldsymbol{e}$.

35.8. Les fonctions linéaires f, g possèdent dans la base $\boldsymbol{e}$ de l'espace $\mathcal{L}_n$ les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ respectivement. Faisons correspondre à chaque couple de vecteurs x, y de $\mathcal{L}_n$ le nombre

1) f (x) g (y); 2) f (x) f (y).

Montrer que chacune des fonctions obtenues détermine un tenseur dans $\mathcal{L}_n$, indiquer son type et écrire les composantes dans la base $\boldsymbol{e}$.

35.9. A chaque couple de vecteurs x, y de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n$ $(n \geqslant 3)$ est associé le nombre f (x, y) défini par l'intermédiaire des coordonnées $\xi^1, \ldots, \xi^n$ et $\eta^1, \ldots, \eta^n$ de ces vecteurs dans la base $\boldsymbol{e}$ à l'aide des formules suivantes:

$$1)\ \mathrm{f}(x, y) = \xi^1\eta^3; \quad 2)\ \mathrm{f}(x, y) = \sum_1^n \xi^i\eta^i.$$

Indiquer le type du tenseur correspondant et écrire ses composantes dans la base e.

35.10. La fonction $f: \mathscr{L}_n \to \mathbb{R}$ ($n \geqslant 2$) est définie par les coordonnées $\xi^1, \ldots, \xi^n$ d'un vecteur x dans la base e d'après l'une des formules:

1) $f(x) = \xi^1 + \xi^2$; 2) $f(x) = (\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2$;

3) $f(x) = (\xi^1 + \ldots + \xi^n)^2$; 4) $f(x) = \sum_1^n (\xi^i)^2$.

Indiquer le type du tenseur correspondant et écrire ses composantes dans la base e.

35.11. Soit $\mathscr{L}_n^*$ l'espace de toutes les fonctions linéaires définies sur un espace vectoriel $\mathscr{L}_n$, et soit $\varphi: \mathscr{L}_n^* \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire sur $\mathscr{L}_n^*$. Montrer que φ définit un tenseur de type (1, 0) sur $\mathscr{L}_n$.

35.12. Soient donnés les tenseurs a_{ij}, a_j^i, ξ^i, η^i, b_i. Les grandeurs c, d, g, h sont définies dans chaque base par les formules:

1) $c = a_{ij}\xi^i\eta^j$; 2) $d = a_{ij}\xi^i\xi^j$;

3) $g = a_j^i b_i \xi^j$; 4) $h = b_i\xi^i$.

En se basant sur la loi de transformation des composantes des tenseurs donnés, montrer que ces grandeurs sont des invariants.

35.13. Soient donnés les tenseurs a_j^i, ξ^i, b_i. Les grandeurs c^i, d_i sont définies dans chaque base par les formules respectives $c^i = a_j^i\xi^j$ et $d_i = a_i^j b_j$. En se basant sur la loi de transformation des composantes des tenseurs donnés, montrer que c^i est un vecteur et d_i un covecteur.

35.14. Le tenseur de type (1, 1) possède dans une base les composantes

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Est-ce que ses composantes varient avec le changement de base? Quel est le sens géométrique de ce tenseur?

35.15. Le tenseur de type (0, 2) possède dans une base les composantes

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Comment varient ses composantes avec le passage à une autre base? Quelle fonction bilinéaire correspond à ce tenseur?

35.16. Le tenseur de type (1, 0) possède dans une base les composantes

$$\theta^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0; \\ 0 & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

(i_0 est un nombre entier fixé, $1 \leqslant x_0 \leqslant n$). Déterminer les composantes du tenseur proposé dans la base $e' = eS$.

35.17. Le tenseur de type (0, 1) possède dans une base les composantes

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = i_0; \\ 0 & \text{si} \quad i \neq i_0 \end{cases}$$

(i_0 est un nombre entier fixé, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$). Déterminer les composantes de ce tenseur dans la base $e' = eS$.

35.18. A chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$ ($n > 2$) on associe les nombres

$$\delta_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \neq j = l; \\ -1 & \text{si } i = l \neq j = k; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Est-ce que cette correspondance est un tenseur? Combien de composantes nulles possède ce tenseur si $n = 3$?

35.19. Le tenseur θ de type (0, 2) possède dans une base e de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n$ ($n > 2$) les composantes $\theta_{kl} = \delta_{kl}^{i_0 j_0}$ (i_0, j_0 sont des nombres entiers fixés, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$, le symbole $\delta_{kl}^{i_0 j_0}$ est défini dans le problème 35.18).

1) Ecrire explicitement toutes les composantes du tenseur θ dans la base e pour $n = 3$.

2) Déterminer les composantes du tenseur θ dans la base $e' = eS$.

35.20. A chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$ ($n > k \geqslant 1$) on associe les nombres:

$$\delta_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1, \ldots, i_k) \text{ est une permutation paire des} \\ & \quad \text{nombres } j_1, \ldots, j_k \text{ distincts deux à deux:} \\ -1 & \text{si } (i_1, \ldots, i_k) \text{ est une permutation impaire des} \\ & \quad \text{nombres } j_1, \ldots, j_k \text{ distincts deux à deux;} \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Est-ce que cette correspondance est un tenseur?

35.21. 1) Le tenseur de type (0, n) possède dans une base les composantes

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)} & \text{si tous les nombres } i_1, \ldots, i_n \text{ sont} \\ & \text{différents;} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

($N(i_1 \ldots i_n)$ est le nombre des perturbations de l'ordre dans la permutation ($i_1, \ldots, i_n$)). Calculer les composantes du tenseur donné dans la base $e' = eS$.

2) A chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$ on associe les nombres $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$. Est-ce que cette correspondance est un tenseur de type $(0, n)$?

35.22. Soit un tenseur de valence trois dans un espace quadridimensionnel. Combien de composantes possède-t-il ? Combien de termes contient l'expression de la nouvelle composante par l'intermédiaire de l'ancienne lorsqu'on écrit la loi de transformation des composantes ? Combien de facteurs y a-t-il dans chaque terme ?

35.23. Soit dans l'espace $\mathcal{L}_2$ un tenseur de type :

1) (1, 1) ; 2) (2, 0) ; 3) (1, 2).

Sans utiliser les notations abrégées de sommation, écrire sous la forme explicite la loi de transformation de ses composantes.

35.24. Soit dans l'espace bidimensionnel un tenseur de type (p, q). On ordonne ses composantes de manière à lui rendre la forme d'une matrice-colonne $\boldsymbol{a}$ à 2^{p+q} éléments. Ecrire la loi de transformation des composantes du tenseur sous la forme $\boldsymbol{a}' = V\boldsymbol{a}$, où V est une matrice carrée d'ordre 2^{p+q}, si :

1) $p = 1$, $q = 1$; 2) $p = 2$, $q = 0$;

3) $p = 1$, $q = 2$.

35.25. Ecrire sous la forme matricielle la loi de transformation des composantes des tenseurs de type :

1) (0, 2) ; 2) (1, 1) ; 3) (2, 0).

35.26. Les composantes du tenseur de type (p, q) et de valence 2 forment dans une base arbitraire $\boldsymbol{e}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_n$ la matrice A_e. On fait correspondre à $\boldsymbol{e}$ la matrice A_e^{-1}. Démontrer que cette correspondance définit un tenseur. Indiquer son type si :

1) $p = 0$, $q = 2$;

2) $p = 1$, $q = 1$ (expliquer le sens géométrique du tenseur obtenu) ;

3) $p = 2$, $q = 0$.

35.27. De quels types sont les tenseurs dont les matrices des composantes sont bidimensionnelles ? Tridimensionnelles ? Quadridimensionnelles ? k-dimensionnelles ?

35.28. Une matrice tridimensionnelle $\| a_{ijk} \|$ d'ordre 2 a une section (couche) $k = 1$ composée d'unités et une section $k = 2$ composée de zéros. Ecrire a_{ijk} pour tous les indices possibles.

35.29. Une matrice tridimensionnelle $\| a_{ijk} \|$ d'ordre 3 a des sections $k = 1$ et $k = 2$ composées d'unités et une section $k = 3$ composée de zéros. Ecrire les sections bidimensionnelles de la matrice, qui correspondent à $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$.

35.30. 1) Combien de sections bidimensionnelles différentes possède une matrice tridimensionnelle d'ordre 3 ? Quel ordre possède chaque section ?

2) Combien de sections bidimensionnelles possède une matrice quadridimensionnelle d'ordre 2?

3) Combien de sections bidimensionnelles a une matrice quadridimensionnelle d'ordre 3 ?

35.31. Les nombres δ^{ij}_{kl} forment une matrice quadridimensionnelle d'ordre 2.

1) Ecrire toutes ses sections bidimensionnelles correspondant aux indices inférieurs fixés.

2) Trouver une relation entre les sections de la matrice $\| \delta^{ij}_{kl} \|$ et la matrice $\| \theta_{kl} \|$ (les symboles δ^{ij}_{kl}, θ_{kl} sont définis dans les problèmes 35.18, 35,19 respectivement).

35.32. 1) Soient une base e et une matrice A $(p + q)$-dimensionnelle. Démontrer qu'il existe un tenseur de type (p, q) défini dans la base e par la matrice A.

2) Démontrer qu'il existe un tenseur de tout type défini à l'avance.

35.33. Soit f une fonction réelle de trois variables $x \in \mathcal{L}_n$, $y \in \mathcal{L}_n$, $z \in \mathcal{L}_n$, linéaire par rapport à chacune d'elles.

1) Exprimer la valeur de la fonction par les coordonnées des vecteurs x, y, z.

2) Montrer que l'ensemble des coefficients de la forme obtenue représente un tenseur de type (0, 3).

3) Exprimer les composantes de ce tenseur par les valeurs de f sur les vecteurs de base.

35.34. Les fonctions linéaires f, g, h sur $\mathcal{L}_3$ possèdent dans la base e les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ respectivement. On associe à tout triplet de vecteurs x, y, z de $\mathcal{L}_3$ le nombre:

1) $f(x)\, g(y)\, h(z)$; 2) $f(x)\, f(y)\, f(z)$;

3) $f(x)\, f(y)\, f(z) + g(x)\, g(y)\, g(z) + h(x)\, h(y)\, h(z)$.

Montrer que chacune des fonctions obtenues définit un tenseur dans $\mathcal{L}_3$, indiquer son type et écrire la matrice dans la base e.

35.35. A chaque triplet de vecteurs de l'espace $\mathcal{L}_3$ rapporté à une base on associe le nombre $f(x, y, z)$ défini par les coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3; η^1, η^2, η^3; ζ^3; ζ^2, ζ^3 de ces vecteurs d'après l'une des formules suivantes:

1) $f(x, y, z) = \xi^1\eta^2\zeta^3 + \xi^3\eta^2\zeta^1$;

2) $f(x, y, z) = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i\zeta^i$.

Indiquer le type du tenseur correspondant et écrire sa matrice.

35.36. Soient $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des fonctions bilinéaires sur $\mathcal{L}_n$, et $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{B}$ une application linéaire. Montrer que φ définit le tenseur de type (0, 3) dans l'espace $\mathcal{L}_n$.

35.37. Le tenseur de type (p, q) est défini par la matrice A dans une base (e_1, e_2, e_3) de l'espace $\mathcal{L}_3$. Trouver sa matrice dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) si:

1) $p = 2$, $q = 1$, $A = A_{726}$, $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_2$.

2) $p = 2$, $q = 1$, $A = A_{727}$, $e'_1 = -e_1$, $e'_2 = -e_2$, $e'_3 = -e_3$;

3) $p = 0$, $q = 3$, $A = A_{723}$, $e'_1 = 2e_1$, $e'_2 = -e_2$, $e'_3 = 3e_3$.

35.38. Déterminer comment varient les composantes du tenseur de type (1, 2) défini dans l'espace $\mathscr{L}_n$ si on permute d'une façon quelconque les vecteurs de base.

35.39. Le tenseur de type (p, q) est défini par la matrice A dans une base e de l'espace $\mathscr{L}_2$. Trouver sa matrice dans la base $e' = eS$ si:

1) $p = 1,\ q = 2,\ A = A_{652},\ S = A_{24}$,
2) $p = 0,\ q = 3,\ A = A_{654},\ S = A_{19}$,
3) $p = 0,\ q = 3,\ A = A_{654},\ S = A_{24}$,
4) $p = 2,\ q = 1,\ A = A_{654},\ S = A_{24}$.

§ 36. Opérations algébriques sur les tenseurs

On étudie dans ce paragraphe les *opérations tensorielles* suivantes: *addition des tenseurs, multiplication par un nombre, multiplication des tenseurs, contraction relative à un indice supérieur et un indice inférieur, contraction de deux tenseurs, transposition, symétrisation et alternation du tenseur par rapport à un ensemble d'indices inférieurs ou supérieurs.*

D'une façon générale, le tenseur résultant d'une opération algébrique est désigné par une nouvelle lettre. C'est ainsi que le tenseur obtenu par transposition du tenseur a_{ij} peut être noté b_{ij}; toutes les composantes vérifient dans ce cas l'égalité $b_{ij} = a_{ji}$. Pour désigner l'opération de symétrisation, on met entre parenthèses les indices du tenseur qui sont soumis à la symétrisation. Si les parenthèses contiennent des indices non soumis à la symétrisation, on écrit ces derniers entre deux barres verticales. Par exemple, le tenseur $b_{ijkl} = a_{(i|j|k)l}$ s'obtient de a_{ijkl} par symétrisation par rapport aux indices i, k. On peut faire la même remarque sur l'opération d'alternation qu'on désigne par la mise entre crochets des indices soumis à l'alternation. La multiplication des tenseurs est désignée par le symbole $\otimes$ ou par le point. La multiplication des tenseurs n'est pas commutative. C'est ainsi que si a_{ij} et b_{kl} sont les composantes des tenseurs a et b, on peut écrire $a \otimes b = c$, $b \otimes a = d$; ceci étant, on a $c_{ijkl} = a_{ij} \cdot b_{kl}$, $d_{ijkl} = b_{ij} \cdot a_{kl}$. Les tenseurs c, d s'obtiennent l'un de l'autre par transposition.

Opérations linéaires, multiplication des tenseurs (problèmes 36.1 à 36.20)

36.1. Vérifier la loi de transformation des composantes de la somme des tenseurs a^i_{jk} et b^i_{jk} en se basant sur la loi de transformation des composantes des termes de la somme.

36.2. Comment est liée la somme des transformations linéaires à la somme des tenseurs correspondants?

36.3. Soient A_e la matrice de la transformation linéaire φ, et B_e la matrice de la fonction bilinéaire b dans la base e. Est-ce que la somme $A_e + B_e$ est définie? Est-ce que la correspondance associant à chaque base e la somme des matrices $A_e + B_e$ est un tenseur?

36.4. Les tenseurs a et b de type (2, 1) ont dans une base e les matrices de composantes A et B. Calculer les composantes des tenseurs a) $a + b$; b) $2a + 3b$; c) $b - 2a$ dans la même base si:

1) $A = A_{650}$, $B = A_{651}$; 2) $A = A_{651}$, $B = A_{652}$;
3) $A = A_{652}$, $B = A_{653}$; 4) $A = A_{693}$, $B = A_{697}$.

36.5. On donne les matrices A, B, C, D qui sont formées par les composantes de quatre tenseurs. Définir si les tenseurs sont linéairement dépendants lorsque:
1) $A = A_{662}$, $B = A_{665}$, $C = A_{663}$, $D = A_{652}$;
2) $A = A_{650}$, $B = A_{651}$, $C = A_{652}$, $D = A_{653}$;
3) $A = A_{666}$, $B = A_{663}$, $C = A_{650}$, $D = A_{652}$.

36.6. 1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des tenseurs de type (p, q)?
2) Indiquer une base quelconque dans $\mathcal{L}$.
3) Indiquer encore une base dans $\mathcal{L}$.

36.7. A la base $\boldsymbol{e}$ de l'espace vectoriel bidimensionnel correspond une base $\boldsymbol{e}^*$ dans l'espace des tenseurs de type:
1) (0, 1); 2) (1, 1); 3) (s) (0, 2); 4) (1, 2).
La base $\boldsymbol{e}^*$ est formée de tenseurs possédant dans la base $\boldsymbol{e}$ une composante égale à 1 et les autres composantes égales à 0. Comment se transforme la base $\boldsymbol{e}^*$ si la base $\boldsymbol{e}$ est transformée à l'aide de la matrice de passage S?

36.8. Vérifier la loi de transformation des composantes du tenseur $a \otimes b$ en se basant sur la loi de transformation des composantes des facteurs a^i_{jk}, b^i_{jk}.

36.9. Déterminer le type et la matrice du tenseur $a \otimes b$ si:

	type de a	matrice de a	type de b	matrice de b
1)	(1, 0),	c_{12},	(1, 0),	c_{31};
2)	(1, 0),	c_{12},	(0, 1),	${}^tc_{31}$;
3)	(0, 1),	${}^tc_{12}$,	(1, 0),	c_{31};
4)	(0, 1),	${}^tc_{12}$,	(0, 1),	${}^tc_{31}$;
5)	(0, 2),	A_{17},	(0, 1),	${}^tc_7$;
6)	(0, 1),	${}^tc_7$,	(0, 2),	A_{17};
7)	(2, 0),	A_{18},	(1, 0),	c_8;
8)	(1, 1),	A_{18},	(1, 0),	c_8;
9)	(1, 0),	c_8,	(2, 0),	A_{18};
10)	(1, 0),	c_8,	(1, 1),	A_{18};
11)	(0, 3),	A_{650},	(0, 1),	${}^tc_8$;
12)	(0, 1),	${}^tc_{25}$,	(0, 3),	A_{650};
13)	(1, 2),	A_{651},	(0, 1),	${}^tc_8$;
14)	(0, 1),	${}^tc_8$,	(1, 2),	A_{651};
15)	(0, 2),	A_{17},	(0, 2),	A_{18};
16)	(0, 2),	A_{18},	(0, 2),	A_{17};
17)	(1, 1),	A_{13},	(1, 1),	A_{19};
18)	(2, 0),	A_{13},	(1, 1),	A_{19}.

36.10. Ecrire la matrice formée des composantes du tenseur:
1) $a^i b^j$; 2) $a_i b_j$; 3) $a^i b_j$; 4) $a_i b^j$
sous la forme du produit kroneckerien des matrices de composantes de ces tenseurs.

36.11. Soient a, b des tenseurs de valence 2 définis par les matrices A et B. De quel type doivent être ces tenseurs pour que la matrice de leur produit tensoriel soit un produit kroneckerien (à droite):
1) $A \otimes B$; 2) $B \otimes A$?

36.12. Les fonctions linéaires f et g sont définies dans la base e par les matrices-lignes de coefficients $\varkappa$ et μ. Trouver la matrice du tenseur:
1) $\mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$; 2) $\mathrm{g} \otimes \mathrm{f}$.
Quel est le sens géométrique de ces tenseurs?

36.13. La fonction linéaire f est définie dans la base e par la matrice-ligne de coefficients $\varkappa$, le vecteur y par la matrice-colonne de coordonnées η. Trouver la matrice du tenseur $\mathrm{f} \otimes y$. Quel est le sens géométrique de ce tenseur?

36.14. 1) Soient x un vecteur, f un covecteur. Démontrer que $\mathrm{f} \otimes x = x \otimes \mathrm{f}$.

2) Donner un exemple de tenseurs a et b pour lesquels $a \otimes b \neq$ $\neq b \otimes a$.

36.15. Soient x_1, x_2, x_3 des vecteurs et f_1, f_2, f_3 des covecteurs. Lesquelles des expressions données ci-dessous ont un sens? Si l'expression envisagée est un tenseur, indiquer son type.
1) $x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3$; 2) $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_2 \otimes x_3$;
3) $x_1 \otimes \mathrm{f}_1 - 2\mathrm{f}_1 \otimes x_1$; 4) $x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2$;
5) $x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + x_2 \otimes \mathrm{f}_1$; 6) $\mathrm{f}_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3 \otimes \mathrm{f}_3$;
7) $x_1 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_1$;
8) $\mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2 - 3(\mathrm{f}_2 \otimes \mathrm{f}_3)$.

36.16. Calculer les composantes des tenseurs 1), 3), 5), 7), 8) du problème 36.15 si les vecteurs x_1, x_2, x_3 et les covecteurs f_1, f_2, f_3 sont définis par les matrices-colonnes et les matrices-lignes c_{20}, c_{12}, c_{25}, ${}^tc_8$, ${}^tc_{10}$, ${}^tc_{22}$ respectivement.

36.17. 1) On sait que $a = x \otimes y$ et que les vecteurs x et y ont dans la base e les coordonnées 1, 0, 0 et 0, 1, 0 respectivement. Calculer les composantes du tenseur a dans la base e et dans la base $e' =$ $= eS$, où $S = A_{207}$.

2) On sait que $a = \mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$ et que les covecteurs f et g ont dans la base e les matrices-lignes de coordonnées (1, 0, 0) et (0, 1, 0) respectivement. Calculer les composantes du tenseur a dans la base e et dans la base $e' = eS$, où $S = A_{207}$.

3) On sait que $a = x \otimes \mathrm{f}$ et que le vecteur x et le covecteur f ont dans la base e les coordonnées 1, 0, 0 et 0, 1, 0 respectivement. Calculer les composantes du tenseur a dans la base e et dans la base $e' =$ $= eS$, où $S = A_{207}$.

Comparer les résultats des problèmes 1), 2), 3).

36.18. Décomposer le tenseur en produit de tenseurs de valence 1 s'il a:

1) le type (2, 1) et la matrice A_5;

2) le type (2, 1) et la matrice A_{673}.

36.19. 1) On sait que a est le tenseur de type (1, 1) et que la matrice de ses composantes est de rang r. Démontrer qu'il existe r vecteurs linéairement indépendants $a_1, \ldots, a_r$ et r covecteurs linéairement indépendants $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ tels que $a = \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \otimes \mathrm{f}^\alpha$.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour les tenseurs de type (2, 0).

36.20. 1) On sait que le tenseur a de type (0, 2) possède dans une certaine base une matrice de rang r. Démontrer qu'il existe r covecteurs linéairement indépendants $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ et r covecteurs linéairement indépendants $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_r$ tels que $a = \sum_{\alpha=1}^{r} f_\alpha \otimes \mathrm{g}_\alpha$.

2) Représenter la fonction bilinéaire $3\xi^1\eta^1 + 2\xi^1\eta^2 + 3\xi^2\eta^1 + 2\xi^2\eta^2$ sous la forme du produit de fonctions linéaires. Est-ce que cette représentation est unique?

3) La fonction bilinéaire f est définie dans une base de l'espace vectoriel par la matrice A_{454}. Représenter f sous la forme de la somme de deux produits de fonctions linéaires: $\mathrm{f}(x, y) = \mathrm{f}_1(x)\,\mathrm{g}_1(y) + \mathrm{f}_2(x)\,\mathrm{g}_2(y)$. Est-ce que cette représentation est unique?

Contraction
(problèmes 36.21 à 36.29)

36.21. En se basant sur la loi de transformation des tenseurs a^i_{jk}, a^i_j, b^i_j, a_i, b^{ij}, a^{ij}_{klm}, ξ^k, vérifier la loi de transformation des composantes des produits contractés:

1) a^i_{ji}; 2) $a^i_j b^j_k$; 3) $a_i b^{ij}$; 4) $a^{ij}_{klm}\xi^k$.

36.22. En partant du sens géométrique des tenseurs a_i, ξ^i, a^i_j, b_{ij}, expliquer le sens géométrique des produits contractés:

1) $a_i\xi^i$; 2) $a^i_j\xi^j$; 3) $b_{ij}\xi^i\xi^j$.

36.23. Peut-on contracter:

1) un vecteur et un covecteur? 2) un couple de vecteurs? 3) un couple de covecteurs?

36.24. Comment sont liés le produit de transformations linéaires et les tenseurs correspondants?

36.25. Les tenseurs a^i_j, ξ^i, $\varkappa_i$ sont définis par les matrices: A_{232}, c_{104}, ${}^tc_{104}$. Calculer les produits contractés:

1) $a^i_j\xi^j$; 2) $a^i_j\varkappa_i$; 3) $a^i_j\xi^j\varkappa_i$.

36.26. Combien de tenseurs différents peut-on former par contraction d'un tenseur donné de type (2, 2)?

36.27. Le tenseur a_k^{ij} est défini par la matrice: 1) A_{651}; 2) A_{655}. Déterminer les matrices des produits contractés: a) a_i^{ij}; b) a_j^{ij}.

36.28. Le tenseur a_{kl}^{ij} est défini par la matrice: 1) A_{649}; 2) A_{693}; 3) A_{694}. Calculer les produits contractés: a) a_{il}^{ij}; b) a_{kj}^{ij}; c) a_{ki}^{ij}; d) a_{jl}^{ij}; e) a_{ij}^{ij}; f) a_{ji}^{ij}.

36.29. 1) A chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$ on fait correspondre un ensemble ordonné de nombres a_{klm}^{ij} (tous les indices parcourent les valeurs de 1 à n). On sait que pour un vecteur arbitraire ξ^k les nombres $a_{klm}^{ij}\xi^k$ sont les composantes du tenseur de type (2,2). Démontrer que a_{klm}^{ij} est un tenseur de type (2, 3).

2) A chaque base de l'espace $\mathcal{L}_n$ on fait correspondre un ensemble ordonné de nombres a_{klm}^{ij} (tous les indices parcourent les valeurs de 1 à n). On sait que pour un tenseur arbitraire u_{ij}^k de type (1, 2) les nombres $a_{klm}^{ij}u_{ij}^k$ sont les composantes du tenseur de type (0, 2). Démontrer que a_{klm}^{ij} est un tenseur de type (2, 3).

Transposition, symétrisation, alternation. Tenseurs symétriques et antisymétriques (problèmes 36.30 à 36.57)

36.30. Peut-on transposer le tenseur:
1) de type (1, 1); 2) de type (2, 0):

36.31. Un tenseur de type (0,2) s'obtient d'un autre par transposition. Comment sont liées les fonctions bilinéaires correspondantes?

36.32. Les tenseurs 1) a_{ij}; 2) a^{ij}; 3) a_k^{ij}; 4) a_{jk}^i sont définis par les matrices respectives A_{16}, A_{16}, A_{670}, A_{670}. Déterminer les matrices des tenseurs transposés.

36.33. 1) Combien de tenseurs différents peut-on obtenir par transposition à partir du tenseur $a_{i_1 \dots i_k}$?

2) Le tenseur de type (0, 3) est défini par la matrice A_{670}. Ecrire les matrices de tous les tenseurs obtenus de celui-ci par transposition. Est-ce que la réponse change si le tenseur donné est de type (3, 0)?

3) Le tenseur a de composantes a_{ijk} est défini par la matrice A_{727}. Ecrire les matrices des tenseurs transposés b et c si $b_{ijk} = a_{jki}$, $c_{ijk} = a_{ikj}$.

4) Le tenseur a de composantes a_{ijkl} est défini par la matrice A_{717}. Ecrire les matrices des tenseurs transposés b et c si $b_{ijkl} = a_{kjli}$; $c_{ijkl} = a_{lkji}$.

36.34. Soient a, b les tenseurs de type (1, 1). Exprimer le tenseur $c = b \otimes a$ en fonction de $d = a \otimes b$.

36.35. Sans utiliser les notations abrégées, écrire toutes les composantes des tenseurs définis dans l'espace $\mathcal{L}_2$:

1) $x^i y^k$; 2) $x^{(i}y^{k)}$; 3) $x^{[i}y^{k]}$; 4) $x^i a_{jk}$;
5) $x^i a_{ik}$; 6) $x^k a^i_i$; 7) $x^{(k}a^{i)}_i$; 8) $x^{[k}a^{i]}_i$;
9) $a^i_i a^k_k$; 10) $a^i_{[i}a^k_{k]}$; 11) $a^i_{(i}a^k_{k)}$; 12) $\delta^i_j a^k_i$;
13) $\delta^i_j a^j_k$; 14) $\delta^i_j a^j_i$; 15) $\delta^i_j a^k_l$; 16) $a^k_l \delta^i_j$.

36.36. Le tenseur a^{ij} est défini par la matrice: 1) A_{10}; 2) A_{77}; 3) A_{24}; 4) A_{232}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a^{(ij)}$; b) $a^{[ij]}$.

36.37. Le tenseur a_{ijk} est défini par la matrice: 1) A_{650}; 2) A_{651}; 3) A_{720}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a_{(ij)k}$; b) $a_{i(jk)}$; c) $a_{(i|j|k)}$.

36.38. Le tenseur a^{ij}_{kl} est défini par la matrice: 1) A_{694}; 2) A_{684}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a^{(ij)}_{kl}$; b) $a^{ij}_{(kl)}$; c) $a^{(ij)}_{(kl)}$.

36.39. Le tenseur a_{ijk} est défini par la matrice: 1) A_{650}; 2) A_{651}; 3) A_{720}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a_{[ij]k}$; b) $a_{i[jk]}$; c) $a_{[i|j|k]}$.

36.40. Le tenseur a^{ij}_{kl} est défini par la matrice: 1) A_{694}; 2) A_{684}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a^{[ij]}_{kl}$; b) $a^{ij}_{[kl]}$; c) $a^{[ij]}_{[kl]}$.

36.41. Le tenseur a_{ijk} est défini par la matrice: 1) A_{726}; 2) A_{721}. Déterminer les composantes des tenseurs: a) $a_{[ijk]}$; b) $a_{(ijk)}$.

36.42. Le tenseur de type (0, 3) est défini par la matrice: 1) A_{723}; 2) A_{725}; 3) A_{720}; 4) A_{650}; 5) A_{722}. Etablir si le tenseur est symétrique (antisymétrique) et s'il l'est, établir par rapport à quel indice.

36.43. Le tenseur a^i_j est défini par la matrice: 1) A_{58}; 2) A_{207}. Calculer les invariants: a) a^i_i; b) $a^i_{[i}a^k_{k]}$; c) $a^i_{[i}a^j_j a^k_{k]}$. Comparer les invariants trouvés avec les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice considérée.

36.44. 1) Démontrer que le tenseur $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ (voir problème 35.21) est symétrique gauche par rapport à tout couple d'indices.

2) Démontrer que le tenseur $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ est symétrique gauche par rapport à tout sous-ensemble de l'ensemble des indices.

3) Démontrer que le tenseur $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ (voir problème 35.20) est symétrique gauche par rapport à tout couple d'indices supérieurs.

4) Démontrer que le tenseur $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ est symétrique gauche par rapport à tout sous-ensemble de l'ensemble des indices supérieurs.

5) Démontrer l'assertion 4) pour les indices inférieurs.

36.45. Soient a_{ij} et b^{kl} les composantes des tenseurs symétrique et antisymétrique respectivement. Calculer le produit contracté $a_{ij}b^{ij}$.

36.46. Démontrer pour le tenseur $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ défini dans le problème 35.20 et les tenseurs quelconques $a^{j_1 \ldots j_k}$ et $b_{i_1 \ldots i_k}$ que:

1) $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} a^{j_1 \ldots j_k} = a^{[i_1 \ldots i_k]}$;

2) $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} b_{i_1 \ldots i_k} = b_{[j_1 \ldots j_k]}$.

36.47. Soit $a_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k = 0$ pour tout vecteur ξ^i. Démontrer que $a_{[ijk]} = 0$.

36.48. Démontrer que $a^{(i}_{j}a^{k)}_{l} = a^i_{(j}a^k_{l)}$.

36.49. Calculer:

1) $\delta^i_j\delta^j_l\delta^l_k\delta^k_i$; 2) $\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_l\delta^l_m$; 3) $\delta^i_{[i}\delta^j_j\delta^k_{k]}$; 4) $\delta^i_{(i}\delta^j_j\delta^k_{k)}$; 5) $\delta^i_j\delta^j_i\delta^k_l a^l_k$.

36.50. 1) On sait que le tenseur est symétrique par rapport à un couple d'indices. Démontrer que la symétrisation par rapport à ces indices ne modifie pas le tenseur et que l'alternation donne un tenseur nul.

2) On sait que le tenseur est antisymétrique par rapport à un couple d'indices. Démontrer que la symétrisation par rapport à ces indices fournit un tenseur nul, tandis que l'alternation ne le modifie pas.

36.51. 1) Démontrer qu'un tenseur symétrique par rapport aux deux premiers indices vérifie l'identité

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}).$$

2) Démontrer qu'un tenseur antisymétrique par rapport aux deux premiers indices vérifie l'identité

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}).$$

36.52. 1) Le tenseur de type (0, 3) est symétrique par rapport à deux premiers et à deux derniers indices. Démontrer qu'il est également symétrique par rapport au premier et au troisième indice.

2) Le tenseur de type (0, 3) est antisymétrique par rapport à deux premiers et à deux derniers indices. Démontrer qu'il est aussi antisymétrique par rapport au premier et au troisième indice.

3) Le tenseur de type (0, 3) est symétrique par rapport à deux premiers indices et antisymétrique par rapport à deux derniers indices. Démontrer que c'est un tenseur nul.

36.53. 1) Donner un exemple de tenseur de type (0, 3) pour lequel $a_{[ijk]} = 0$, mais qui n'est pas symétrique par rapport aux trois indices.

2) Donner un exemple de tenseur de type (0, 3) pour lequel $a_{(ijk)} = 0$, mais qui n'est pas antisymétrique par rapport aux trois indices.

36.54. Démontrer que tout tenseur de type (0, 2) ou (2, 0) se décompose en somme de tenseurs symétrique et antisymétrique.

36.55. Décomposer en somme de tenseurs symétrique et antisymétrique le tenseur de type (0, 2) défini par la matrice:

1) A_{49}; 2) A_{16}; 3) A_{234}.

36.56. Obtenir par des opérations tensorielles à partir du symbole de Kronecker les tenseurs:

1) δ^{ij}_{kl}; 2) $\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ (voir problèmes 35.18, 35.20).

36.57. 1) On sait que le tenseur symétrique a de type (0, 2) a dans une certaine base une matrice de rang r. Démontrer qu'il existe r covecteurs linéairement indépendants $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ tels que $a = \sum_{\alpha=1}^{r} \mathrm{f}_\alpha \otimes \mathrm{f}_\alpha$.

2) Formuler et démontrer l'assertion réciproque.

3) La fonction quadratique φ dans $\mathscr{L}_2$ est définie par la matrice A_{56}. Représenter φ sous la forme de la somme des carrés de deux fonctions linéaires. Est-ce que cette représentation est unique?

§ 37. Tenseurs dans l'espace euclidien

On étudie dans ce paragraphe les tenseurs dans l'espace euclidien n-dimensionnel $\mathscr{E}_n$. Dans $\mathscr{E}_n$ est défini un *tenseur métrique* g. Ses composantes dans une base arbitraire $(e_1, \ldots, e_n)$ sont définies par les produits scalaires des vecteurs de base d'après la formule $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Le tenseur g est un tenseur symétrique de type (0, 2); ses composantes forment dans chaque base la matrice de Gram de cette base. La matrice Γ^{-1} définit un tenseur symétrique g^* de type (2, 0), appelé *tenseur métrique contravariant* de l'espace $\mathscr{E}_n$. Ses composantes sont notées g^{ij}. On a les formules: $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$, $g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$. Rapportées à une base orthonormée, les composantes des tenseurs g_{ik} et g^{ik} forment des matrices unités.

Dans l'espace euclidien on définit les *opérations d'élévation* et *d'abaissement d'un indice*. Pour abaisser un indice du tenseur il faut que ce tenseur possède au moins un indice supérieur. L'abaissement de l'indice du tenseur a donne un nouveau tenseur dont le nombre des indices inférieurs est d'une unité plus grand que celui de a, tandis que le nombre des indices supérieurs est d'une unité plus petit que celui de a. Le nouveau tenseur possède dans toutes les bases orthonormées les mêmes composantes que l'ancien. Les conditions mentionnées définissent univoquement l'opération d'abaissement de l'indice. Si la base n'est pas orthonormée, les composantes de l'ancien tenseur n'y coïncident plus avec celles du nouveau. On définit de façon analogue l'opération d'élévation de l'indice.

Le tenseur obtenu par élévation ou abaissement de l'indice est désigné par la même lettre que le tenseur donné mais se distingue de celui-ci par une autre disposition des indices. Si on élève ou abaisse un indice du tenseur, on laisse à sa place un vide ou on y met un point et on dispose le nouvel indice supérieur juste au-dessus du point. L'ordre des indices dans le tenseur transformé doit rester inchangé, c'est-à-dire que lorsqu'on ordonne les indices, le nouvel indice supérieur doit occuper la place de l'indice inférieur disparu. La règle usuelle de l'ordre adopté (tous les indices supérieurs précèdent tous les indices inférieurs) peut dans ce cas être perturbée. Les points marquent les endroits perturbés.

Pour abaisser un indice du tenseur a défini par ses composantes dans une base arbitraire, on peut calculer le produit contracté $a \otimes g$ ou $g \otimes a$ et, si né-

cessaire, modifier l'ordre des indices dans le tenseur obtenu (transposer sa matrice). De façon analogue, les produits tensoriels $a \otimes g^*$ et $g^* \otimes a$ permettent de réaliser l'élévation d'un indice.

Considérons quelques exemples.

1. Soit à abaisser l'indice du tenseur a^i_j. Il doit y résulter un tenseur de type (0, 2). L'ordre ordinaire des indices des tenseurs a^i_j et a_{ij} étant le même, l'abaissement de l'indice du tenseur a^i_j aboutit au tenseur $a_{ij} = g_{ik}a^k_j$.

2. Pour élever le premier indice du tenseur a_{ij}, on doit procéder de façon analogue:

$$a^i_j = g^{ik}a_{kj} = a_{kj}g^{ki}.$$

3. Elevons le deuxième indice du tenseur a_{ij}, c'est-à-dire calculons le tenseur $a_{i\cdot}^{\;j}$. En calculant les composantes du produit contracté $a_{ik}g^{jk} = b^j_i$ d'après les règles usuelles, on constate que l'indice j précède l'indice i. Dans le tenseur $a_{i\cdot}^{\;j}$, l'indice i est le premier et j est le deuxième (pour les mêmes valeurs des composantes). La matrice du tenseur $a_{i\cdot}^{\;j}$ est transposée par rapport à la matrice du tenseur b^j_i.

4. De façon analogue, le tenseur $a^{i\,\cdot\,k}_{\;j}$ peut être calculé comme produit contracté $a^{ilk}g_{lj}$, mais l'ordre des indices dans sa matrice doit être le suivant, soit: i, j, k.

Dans certains problèmes, on utilise la notion d'*orientation de l'espace euclidien n-dimensionnel* et le *tenseur discriminant*. Donnons leurs définitions. Toutes les bases de l'espace $\mathscr{E}_n$ peuvent être réparties en deux classes de telle sorte que le déterminant de la matrice de passage de toute base d'une classe à une base de l'autre classe soit négatif, et que le déterminant de la matrice de passage reliant deux bases d'une même classe soit positif. On dit que l'espace $\mathscr{E}_n$ est *muni d'une orientation* si on y choisit l'une des deux classes de bases. Par analogie avec le cas tridimensionnel, on peut dire que les bases d'une classe sont directes et celles de l'autre, rétrogrades. On oriente par exemple l'espace en choisissant un représentant quelconque parmi les bases directes. Si l'orientation est choisie, l'espace est dit *orienté*.

On appelle *tenseur discriminant* dans un espace euclidien orienté le tenseur de type (0, n) dont les composantes dans une base orthonormée directe sont:

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{si parmi les indices il y en a des égaux,} \\ (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)} & \text{si les indices sont distincts deux à deux,} \end{cases}$$

où $N(i_1 \ldots i_n)$ est le nombre des perturbations de l'ordre dans la permutation $(i_1, \ldots, i_n)$. En se servant de la loi de transformation des composantes, on peut calculer les composantes du tenseur discriminant dans n'importe quelle base. En particulier, ses composantes dans toute base orthonormée directe sont les mêmes que dans la base initiale.

37.1. Les vecteurs e_1' et e_2' sont définis par leurs coordonnées 1, 0 et cos α, sin α dans une base orthonormée (e_1, e_2) de l'espace euclidien bidimensionnel. Ecrire les matrices: a) du tenseur métrique, b) du tenseur métrique contravariant, c) du tenseur discriminant dans les bases: 1) (e_1, e_2); 2) (e_1', e_2').

37.2. Démontrer que dans une base arbitraire de l'espace euclidien le tenseur discriminant a les composantes suivantes

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{si parmi les indices il y en a des égaux,} \\ (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)} \sigma \sqrt{\det \Gamma} & \text{si les indices sont distincts deux à deux,} \end{cases}$$

où Γ est la matrice du tenseur métrique, $N(i_1, \ldots, i_n)$ le nombre des perturbations de l'ordre dans la permutation $(i_1, \ldots, i_n)$, $\sigma = 1$ si la base est directe, $\sigma = -1$ si la base est rétrograde.

37.3. Démontrer que dans toute base orthonormée directe le tenseur discriminant a les composantes suivantes:

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 0 & \text{si parmi les indices il y en a des égaux,} \\ (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)} & \text{si les indices sout distincts deux à deux,} \end{cases}$$

où $N(i_1 \ldots i_n)$ est le nombre des perturbations de l'ordre dans la permutation $(i_1, \ldots, i_n)$.

37.4. Quel tenseur obtient-on si l'on élève un indice dans le tenseur métrique? Les deux indices?

37.5. Quel tenseur obtient-on si on abaisse un indice dans le tenseur de Kronecker? Si on élève un indice?

37.6. Donner des exemples de contraction avec le tenseur métrique, rencontrés dans le cours d'algèbre linéaire.

37.7. 1) Le tenseur a^i_j définit une transformation linéaire dans l'espace euclidien $\mathscr{E}_n$. Trouver le tenseur définissant la transformation adjointe.

2) Formuler la condition sous laquelle le tenseur a^i_j définit une transformation auto-adjointe.

37.8. Le tenseur métrique et le tenseur a_{ij} sont respectivement définis par les matrices: 1) A_{55}, A_9; 2) A_{57}, A_{18}; 3) A_{245}, A_{210}. Déterminer les matrices des tenseurs: a) $a^{i}_{\cdot j}$; b) $a_i^{\cdot j}$; c) a^{ij}.

37.9. Vérifier l'assertion: si la matrice du tenseur a_{ij} est symétrique, il en est de même des matrices des tenseurs: 1) $a_i^{\cdot j}$; 2) a^{ij}.

37.10. Le tenseur métrique et le tenseur a^i_j sont respectivement définis par les matrices: 1) A_{58}, A_{40}; 2) A_{207}, A_{232}. Déterminer les matrices des tenseurs: a) a_{ij}; b) $a_i^{\cdot j}$.

37.11. Le tenseur métrique et le tenseur a^i_{jk} sont respectivement définis par les matrices: 1) A_{55}, A_{650}; 2) A_{55}, A_{651}; 3) A_{207}, A_{722}. Déterminer les matrices des tenseurs: a) a_{ijk}; b) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; c) a_j^{ik}; d) a^{ijk}.

37.12. Le tenseur métrique et le tenseur a^{ij}_{kl} sont respectivement définis par les matrices: 1) A_{57}, A_{697}; 2) A_{19}, A_{694}. Trouver les matrices des tenseurs: a) a_{ijkl}; b) a^{ijkl}.

37.13. Simplifier les expressions:

1) $(a_{ij}g^{jk} + \delta_i^j a_{lj} g^{lk}) g_{ks}$;

2) $\delta_j^i \delta_k^j g^{kl} a_{lj}$; 3) $a_{ij}g^{jk}g_{kl}g^{ls}$.

37.14. Soit $a_k^{ij} = g^{il}g^{jm}a_{lmk}$. Exprimer a_{lmk} par a_k^{ij}.

37.15 (s). Soient φ une transformation linéaire de l'espace euclidien, φ^* la transformation adjointe. On abaisse l'indice du tenseur correspondant au produit des transformations $\varphi\varphi^*$. Montrer que le tenseur obtenu est de type (0, 2) et est symétrique.

37.16. Dans un espace euclidien bidimensionnel $\mathscr{E}_2$ on associe au vecteur ξ^k le vecteur $g^{ij}\varepsilon_{jk}\xi^k$. Démontrer que la correspondance ainsi définie est une transformation linéaire de l'espace $\mathscr{E}_2$. Expliquer son sens géométrique.

37.17. Dans un espace euclidien tridimensionnel on associe au couple de vecteurs ξ^i, η^j le vecteur $\zeta^k = g^{kl}\varepsilon_{lij}\xi^i\eta^j$. Démontrer que le vecteur ζ^k est le produit vectoriel des vecteurs ξ^i et η^j.

37.18. Dans un espace euclidien quadridimensionnel on associe aux vecteurs x, y, z de coordonnées ξ^i, η^j, ζ^k la fonction linéaire f de coefficients $\varkappa_l = \varepsilon_{ijkl}\xi^i\eta^j\zeta^k$. Démontrer que $f(x) = f(y) = f(z) = 0$.

37.19. Dans un espace euclidien quadridimensionnel on associe aux vecteurs x, y, z de coordonnées ξ^i, η^j, ζ^k le vecteur u de coordonnées $g^{ml}\varepsilon_{lijk}\xi^i\eta^j\zeta^k$.

1) Démontrer que le vecteur u est orthogonal aux vecteurs x, y, z.

2) Démontrer que le vecteur u correspondant au triplet (x, y, z) diffère par le facteur -1 du vecteur u correspondant au triplet (y, x, z).

§ 38. Multivecteurs et formes extérieures

On utilise dans ce paragraphe les notions suivantes: *multivecteur* (*p-vecteur*), *forme extérieure de degré q* (*q-forme*), *multivecteur simple* (*décomposable*), *forme extérieure décomposable*. Les théorèmes et définitions se rapportant aux multivecteurs sont tout à fait analogues aux théorèmes et définitions se rapportant aux formes extérieures. C'est pourquoi les problèmes formulés pour les multivecteurs peuvent être également posés pour les formes extérieures et inversement.

Par *produit extérieur* de multivecteurs (et des formes extérieures) on entend leur produit tensoriel alterné par rapport à tous les indices. On le note $u \wedge v$. Le p-vecteur décomposable peut être représenté sous la forme $u = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$, où $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs.

Le produit extérieur est linéaire par rapport à chaque facteur, de sorte que pour un p-vecteur donné u l'ensemble des vecteurs x tels que $u \wedge x = o$ est un sous-espace vectoriel. On dit que ce sous-espace est *défini* (ou *engendré*) par le p-vecteur u.

Dans les problèmes de ce paragraphe, on définit (sauf mention du contraire) les multivecteurs (et les formes extérieures) au moyen de leurs coordonnées essentielles, c'est-à-dire au moyen des coordonnées $u^{i_1 \ldots i_p}$ telles que $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ (les autres coordonnées du multivecteur u se déterminent par les coordonnées essentielles d'après les conditions d'antisymétrie) On dispose les

coordonnées essentielles en colonne ou en ligne dans un ordre lexicographique: la composante $u^{i_1 \ldots i_p}$ précède $u^{j_1 \ldots j_p}$ si pour un $s \geqslant 1$ on a $i_1 = j_1, \ldots, i_{s-1} = j_{s-1}, i_s < j_s$. Par exemple, au bivecteur (2-vecteur) dans $\mathcal{L}_4$ correspond la colonne de coordonnées essentielles ${}^t(u^{12}, u^{13}, u^{14}, u^{23}, u^{24}, u^{34})$, et à la 3-forme dans $\mathcal{L}_4$ correspond la ligne $(f_{123}, f_{124}, f_{134}, f_{234})$.

On appelle *valeur de la q-forme* f *sur le système de q vecteurs* $x_1, \ldots, x_q$ le produit contracté $\mathrm{f} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_q$. En particulier, la 2-forme définit une fonction bilinéaire dont la matrice dans toute base est symétrique gauche:

$$\varphi_{ij}\xi_1^i\xi_2^j = {}^t\xi_1 F \xi_2, \quad {}^tF = -F.$$

La matrice F est appelée matrice de la 2-forme dans la base considérée.

38.1. La fonction f_a de deux vecteurs sur un espace tridimensionnel de vecteurs fait correspondre à tous vecteurs x et y le produit mixte (a, x, y). Démontrer que f_a est une 2-forme. Exprimer sa matrice dans une base orthonormée par l'intermédiaire des coordonnées du vecteur a.

38.2. Trouver une relation entre le produit vectoriel de deux vecteurs et leur produit extérieur.

38.3. Ecrire la matrice de la 2-forme ω dans la base $\boldsymbol{e}$ de l'espace $\mathcal{L}_4$ si on connaît l'expression de ω en fonction des 1-formes engendrant la base biorthogonale à $\boldsymbol{e}$:

1) $\omega = 2\,(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2)$; 2) $\omega = 2\,(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^3) + 2\,(\mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{f}^4)$;

3) $\omega = 2\,(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2) + 2\,(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^3) + 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^4) + 2\,(\mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{f}^3) + 2\,(\mathrm{f}^3 \wedge \mathrm{f}^4)$.

38.4. Calculer le produit extérieur de deux 1-formes définies par les matrices-lignes de coordonnées:

1) ${}^tc_{79}, {}^tc_{75}$; 2) ${}^tc_{95}, {}^tc_{93}$;

3) ${}^tc_{174}, {}^tc_{203}$; 4) ${}^tc_{156}, {}^tc_{193}$.

38.5. Calculer le produit extérieur de trois 1-formes définies par les matrices-lignes de coordonnées:

1) ${}^tc_{12}, {}^tc_{13}, {}^tc_{14}$; 2) ${}^tc_{99}, {}^tc_{52}, {}^tc_{51}$;

3) ${}^tc_{83}, {}^tc_{124}, {}^tc_{118}$;

4) ${}^tc_{172}, {}^tc_{154}, {}^tc_{218}$; 5) ${}^tc_{197}, {}^tc_{198}, {}^tc_{207}$; 6) ${}^tc_{255}, {}^tc_{256}, {}^tc_{257}$.

38.6. On définit la 2-forme par une matrice, et la 1-forme par une matrice-ligne de coordonnées. Calculer leur produit extérieur.

1) $A_{254}, {}^tc_{81}$; 2) $A_{254}, {}^tc_{86}$; 3) $A_{252}, {}^tc_{93}$;

4) $A_{499}, {}^tc_{162}$; 5) $A_{432}, {}^tc_{204}$.

38.7. Soient u, u_1, v et w les formes extérieures de degré p, p, q et r respectivement. Démontrer que:

1) $(\lambda u) \wedge v = \lambda\,(u \wedge v)$;

2) $(u + u_1) \wedge v = u \wedge v + u_1 \wedge v$;

3) $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$;

4) $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$.

38.8. Démontrer que la valeur de la q-forme sur le système des vecteurs $x_1, \ldots, x_q$ ne dépend que du q-vecteur $x_1 \wedge \ldots \wedge x_q$.

38.9. Soient $f^1, \ldots, f^p$ les formes extérieures de degré 1. Calculer la valeur de la p-forme $f^1 \wedge \ldots \wedge f^p$ sur le système des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$.

38.10. La forme extérieure de degré 2 dans $\mathcal{L}_4$ est définie par la matrice-ligne φ de ses coordonnées essentielles, tandis que les vecteurs x et y le sont par les matrices-colonnes de coordonnées ξ, η. Calculer la valeur de cette forme sur le couple x, y:

1) $\varphi = {}^tc_{279}$, $\xi = c_{174}$, $\eta = c_{186}$;

2) $\varphi = {}^tc_{269}$, $\xi = c_{171}$, $\eta = c_{177}$.

38.11. Démontrer que les vecteurs $a_1, \ldots, a_p$ sont linéairement dépendants si et seulement si $a_1 \wedge \ldots \wedge a_p = 0$.

38.12. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{L}_n$. Démontrer que:

1) les bivecteurs $e_i \wedge e_j$ forment une base dans l'espace des bivecteurs de l'espace $\mathcal{L}_n$, quels que soient les couples (i, j) tels que $i < j$;

2) les p-vecteurs $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ forment une base dans l'espace des p-vecteurs de l'espace $\mathcal{L}_n$, quels que soient les indices $i_1, \ldots, i_p$ tels que $i_1 < \ldots < i_p$.

38.13. A la base $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de l'espace $\mathcal{L}_4$ on fait correspondre la base $\varepsilon = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ de l'espace correspondant de bivecteurs, et à la base e' on associe la base ε' construite de façon analogue. Trouver la matrice de passage de ε à ε' si la matrice de passage de e à e' est S.

38.14. Le produit extérieur $u^{i_1 \ldots i_{n-1}}$ des vecteurs $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de $\mathcal{L}_n$ a n coordonnées essentielles. Démontrer que dans le changement de base de $\mathcal{L}_n$ défini par la matrice de passage S, la matrice-ligne $a = (a^1, \ldots, a^n)$ des coordonnées essentielles $a^i = u^{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n}$ se transforme d'après la formule $a' = aS(\det S)^{-1}$.

38.15. En utilisant le résultat du problème 38.8, démontrer que l'espace vectoriel des p-formes peut être assimilé à l'espace dual de l'espace vectoriel des p-vecteurs.

38.16. Démontrer que dans $\mathcal{L}_3$ chaque bivecteur est décomposable.

38.17. Démontrer que pour que le bivecteur u^{ij} dans $\mathcal{L}_4$ soit décomposable il faut et il suffit que $u^{12}u^{34} - u^{13}u^{24} + u^{14}u^{23} = 0$.

38.18. Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 des vecteurs linéairement indépendants. Est-ce que les bivecteurs suivants sont décomposables:

1) $a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4$;

2) $a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4 + a_1 \wedge a_2$;

3) $a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4$?

38.19. Le bivecteur dans $\mathcal{L}_4$ est défini dans une base par la matrice-colonne a de ses coordonnées essentielles:

1) $a = c_{279}$; 2) $a = c_{269}$; 3) $a = c_{278}$; 4) $a = c_{281}$. Est-ce que ce bivecteur est décomposable?

38.20. Démontrer que le sous-espace engendré par un p-vecteur est de dimension $r \leqslant p$, et que $r = p$ si et seulement si le p-vecteur est décomposable.

38.21. 1) Le bivecteur décomposable a les coordonnées u^{ij} dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Démontrer que les vecteurs $l^i = u^{ij}e_j$ appartiennent à l'espace engendré par ce bivecteur.

2) Formuler et démontrer l'assertion analogue pour les p-vecteurs décomposables.

38.22. Est-ce que la dimension du sous-espace engendré par le bivecteur dans l'espace $\mathscr{L}_4$ peut être égale à 1 ? 3 ?

38.23. Le bivecteur u est défini dans une base de l'espace $\mathscr{L}_4$ par la matrice-colonne de coordonnées essentielles $\boldsymbol{a}$. Trouver le sous-espace vectoriel engendré par ce bivecteur si :

1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{279}$; 2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{269}$; 3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{278}$; 4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{280}$.

38.24. Démontrer qu'un p-vecteur décomposable qui définit le sous-espace $\mathscr{L}_p$, peut être trouvé d'après ce sous-espace à un facteur numérique près.

38.25. Le sous-espace $\mathscr{L}_2$ de l'espace $\mathscr{L}_4$ est défini par le système d'équations linéaires de matrice A. Calculer les coordonnées du bivecteur définissant $\mathscr{L}_2$ si :

1) $A = A_{502}$; 2) $A = A_{503}$; 3) $A = A_{506}$.

38.26. Les sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ de l'espace $\mathscr{L}_4$ sont engendrés par le vecteur x et le bivecteur u respectivement. Le vecteur est défini par la matrice-colonne de coordonnées ξ et le bivecteur par la matrice-colonne de coordonnées essentielles $\boldsymbol{a}$. Vérifier que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$ et trouver un vecteur y tel que $u = x \wedge y$:

1) $\xi = {}^t(-2, 6, 1, 1)$, $\boldsymbol{a} = {}^t(10, 1, 3, 2, -4, -1)$;

2) $\xi = {}^t(1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a} = {}^t(2, 1, 3, 2, 4, -1)$.

38.27. Les sous-espaces $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ de l'espace $\mathscr{L}_4$ sont engendrés par le vecteur x et le bivecteur u respectivement. Le vecteur est défini par la matrice-colonne de coordonnées ξ et le bivecteur par la matrice-colonne de coordonnées essentielles $\boldsymbol{a}$. Vérifier que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{o\}$ et trouver le 3-vecteur engendrant $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$. Ecrire l'équation du sous-espace $\mathscr{L}$ si :

1) $\xi = {}^t(2, 2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a} = {}^t(2, 1, 3, 2, 4, -1)$;

2) $\xi = {}^t(1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{a} = {}^t(9, 5, 1, 4, -1, -1)$.

38.28. Les 1-formes $\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^k$ sont linéairement indépendantes et les 1-formes $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^k$ vérifient l'égalité $\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{g}^1 + \ldots + \mathrm{f}^k \wedge \mathrm{g}^k = 0$. Démontrer que $\mathrm{g}^i = \sum_{j=1}^{k} a^{ij}\mathrm{f}^j$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ et que $a^{ij} = a^{ji}$ (lemme de Cartan).

38.29. Les 1-formes f^1, f^2 et g^1 sont définies par les matrices-lignes de coordonnées φ^1, φ^2, ψ^1. Est-ce qu'il existe une forme extérieure g^2 de degré 1 telle que $\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{g}^1 + \mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{g}^2 = 0$? Trouver toutes ces

formes si elles existent:

1) $\varphi^1 = {}^t c_{172}$, $\varphi^2 = {}^t c_{173}$, $\psi^1 = {}^t c_{166}$;

2) $\varphi^1 = {}^t c_{197}$, $\varphi^2 = {}^t c_{185}$, $\psi^1 = {}^t c_{166}$;

3) $\varphi^1 = {}^t c_{166}$, $\varphi^2 = {}^t c_{228}$, $\psi^1 = {}^t c_{227}$;

4) $\varphi^1 = {}^t c_{171}$, $\varphi^2 = {}^t c_{186}$, $\psi^1 = {}^t c_{193}$.

38.30. Démontrer que pour chaque 2-forme ω dans $\mathcal{L}_n$ il existe une base $(\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^n)$ de l'espace des 1-formes dans laquelle ω est de la forme canonique $\omega = \mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2 + \mathrm{f}^3 \wedge \mathrm{f}^4 + \ldots + \mathrm{f}^{2p-1} \wedge \mathrm{f}^{2p}$ $(2p \leqslant n)$.

38.31. La 2-forme est définie par sa matrice dans une certaine base. La réduire à la forme canonique décrite dans le problème 38.30:

1) A_{250}; 2) A_{439}; 3) A_{490}; 4) A_{499}.

SOLUTIONS

1.39. Introduisons dans le plan la base $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. On a : $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = \mathbf{b} - \frac{3}{5}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} = \mathbf{a} - \frac{5}{8}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BL}$. Trouvons les inconnues λ et μ. Vu que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \mathbf{a} + \lambda\left(\mathbf{b} - \frac{3}{5}\mathbf{a}\right) = \left(1 - \frac{3}{5}\lambda\right)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \mathbf{b} + \mu\left(\mathbf{a} - \frac{5}{8}\mathbf{b}\right) = \mu\mathbf{a} + \left(1 - \frac{5}{8}\mu\right)\mathbf{b},$$

on peut égaler les coefficients de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Il vient $1 - \frac{3}{5}\lambda = \mu$, $\lambda = 1 - \frac{5}{8}\mu$, d'où $\lambda = \frac{3}{5}$, $\mu = \frac{16}{25}$. Finalement,

$$|DM| : |MK| = 3:2, \quad |BM| : |ML| = 16:9.$$

2.19. On construit le parallélogramme sur les vecteurs $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$. Les longueurs des diagonales du parallélogramme sont celles des vecteurs $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. On a : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$; $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{e}_1|^2 + 36|\mathbf{e}_2|^2 + 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 9|\mathbf{e}_1|^2 + 4|\mathbf{e}_2|^2 - 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Par suite, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 50$ car $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 10$. Les longueurs des diagonales du parallélogramme sont donc égales à $5\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$.

Un des angles du parallélogramme est l'angle φ des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$; $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$. On a : $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2|\mathbf{e}_1|^2 + 8|\mathbf{e}_2|^2 + 6(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 10$, $|\mathbf{a}|^2 = 4|\mathbf{e}_1|^2 + 4|\mathbf{e}_2|^2 + 8(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 20$, $|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{e}_1|^2 + 16|\mathbf{e}_2|^2 - 8(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 10$; $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$. L'angle aigu du parallélogramme est donc égal à 45°.

2.24. Par définition, $\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, où le vecteur $\mathbf{x}$ est colinéaire au vecteur $\mathbf{a}$, et le vecteur $\mathbf{y}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$. Autrement dit, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{y}$, où $(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = 0$. En multipliant scalairement les deux membres de l'égalité vectorielle par $\mathbf{a}$, on obtient

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \lambda|\mathbf{a}|^2,$$

d'où $\lambda = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}$. Ainsi, $\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

2.33. Soient x, y, z les coordonnées du vecteur $\mathbf{c}$. Les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant orthogonaux, il vient $x - y + z = 0{,}5x + y + z = 0$. En tirant z de la pre-

mière équation, $z = y - x$ et en le portant dans la seconde, on obtient $2y + 4x = 0$, d'où $y = -2x$, $z = -3x$. La condition d'orthogonalité des vecteurs **a** et **b** est vérifiée par une infinité de vecteurs **c** de coordonnées $(x, -2x, -3x)$. Etant donné que $|\mathbf{c}| = 1$, on en tire $|x| = 1/\sqrt{14}$, d'où $x = \pm 1/\sqrt{14}$. Le problème a deux solutions: $(1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$ et $(-1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$.

3.9. L'aire du parallélogramme est égale à $S = |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|$ (si le plan est étudié dans l'espace). On a $\overrightarrow{BA} = 3\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. $|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]| = 3$, $[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = 6[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1] = 6[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] + 6[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 6[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. L'aire cherchée est égale à $S = 6|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]| = 18$.

3.28. 1) Si les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sont coplanaires, le vecteur $\mathbf{a}_3$, par exemple, est égal à $\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2$. Vu que $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2) = 0$, il s'ensuit que $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'égalité $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 1$. Supposons maintenant que les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ne sont pas coplanaires. Démontrons que dans ce cas le triplet dual existe. Vu que $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2) = 0$, on a $\mathbf{b}_3 = \lambda[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Le scalaire λ s'obtient de la condition $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 1$. On a $\lambda([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3) = 1$, d'où $\lambda = 1/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ et $\mathbf{b}_3 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. De façon analogue on trouve

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{b}_2 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3).$$

2) Les formules sont données ci-dessus.

3) D'après la formule du problème 3.26, 4), on a $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Il s'ensuit que les signes des nombres $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ et $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ coïncident. Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ engendrent une base de même orientation que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

4.11. On a: $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Par suite, les vecteurs de base du second repère s'expriment en fonction des vecteurs de base du premier repère de la façon suivante: $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2' = -\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$. On a par ailleurs : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$, de sorte que l'origine du second repère a, dans le premier repère, les coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Il ne reste qu'à écrire: $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$.

5.19. Si les trois points A, B, C se trouvaient d'un même côté de la droite recherchée, ils appartiendraient à une même droite parallèle à celle-ci. Or les points A, B, C ne sont pas alignés; donc, deux d'entre eux se trouvent d'un côté de la droite recherchée, et le troisième, de l'autre côté.

Si A et B se trouvent d'un côté de la droite, et C de l'autre côté, la droite recherchée passe par les points L (2, 3) et M (—1, 2), milieux respectifs des segments BC et AC; son équation est $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{2-3}$, c'est-à-dire $x - 3y + 7 = 0$.

On étudie de façon analogue les deux autres cas de disposition des points A, B, C par rapport à la droite.

Le problème a trois solutions: $x - 3y + 7 = 0$, $3x + 4y - 18 = 0$, $2x + 7y - 12 = 0$.

5.32. Menons par le point A (1, 2) la droite perpendiculaire à la droite $3x - y + 9 = 0$. Ses équations paramétriques sont $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$ (vu que le vecteur directeur est de coordonnées (3, —1)). Soit A_1 la projection recherchée. Notons t_0 la valeur du paramètre t sur la droite $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, qui correspond au point d'intersection avec la droite $3x - y + 9 = 0$ (c'est-à-dire au point A_1). Calculons cette valeur de t_0 à partir de l'équation $3(1 + 3t_0) - (2 - t_0) + 9 = 0$. On obtient $t_0 = -1$. La projection recherchée a donc les coordonnées (—2, 3). Comme le vecteur $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AA_1}$ a les coordonnées (—3, 1), le point B possède les coordonnées (—5, 4).

5.44. Les points équidistants de deux droites données possèdent des coordonnées qui vérifient l'équation $\frac{|x - 7y - 1|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x + y + 7|}{\sqrt{2}}$. L'ensemble de ces points est un couple de droites (bissectrices des angles formés par les droites données). L'angle contenant le point A (1, 1) est défini par les inéquations $x - 7y - 1 < 0$, $x + y + 7 > 0$. Donc, l'équation de la bissectrice recherchée est $\frac{-x + 7y + 1}{5\sqrt{2}} = \frac{x + y + 7}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $3x - y + 17 = 0$.

6.42. Introduisons le repère d'origine A et de vecteurs de base $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AD}$. D'après les conditions du problème on a $A_0(\lambda/3, 0, 0)$, $B_0(0, \lambda, 0)$, $D_0(0, 0, \lambda)$, où $\lambda > 0$. L'équation du plan $A_0B_0D_0$ dans le repère introduit est: $3x + y + z = \lambda$. Le point C_1 est de coordonnées (1, 1, 1) et appartient au plan $A_0B_0D_0$; donc, $\lambda = 5$.

Le volume du parallélépipède est $V = |(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$. Le volume du tétraèdre est $V' = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AA_0}, \overrightarrow{AB_0}, \overrightarrow{AD_0})| = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AA_1}, \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{\lambda^3}{18}V = \frac{125}{18}V$.

6.76. L'équation du plan de vecteur normal $\mathbf{n}$ (A, B, C), passant par l'origine des coordonnées est: $Ax + By + Cz = 0$. D'après les conditions du problème il vient:

$$\frac{|A+2B+2C|}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{2}{15}, \tag{1}$$

$$\frac{|7A+4B+4C|}{9\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{4}{45}. \tag{2}$$

Divisons (1) par (2)

$$2\,|A + 2B + 2C| = |7A + 4B + 4C|. \tag{3}$$

Si l'origine du vecteur normal du plan recherché est à l'origine des coordonnées, son extrémité possède les coordonnées λA, λB, λC, où $\lambda \neq 0$. La condition d'appartenance de cette extrémité au dièdre obtus formé par les plans donnés est de la forme

$$(1\cdot 7 + 2\cdot 4 + 2\cdot 4)(\lambda A + 2\lambda B + 2\lambda C)(7\lambda A + 4\lambda B + 4\lambda C) > 0$$

(voir problème 6.75), c'est-à-dire $(A + 2B + 2C)(7A + 4B + 4C) > 0$. Donc l'égalité (3) se met sous la forme: $2(A + 2B + 2C) = 7A + 4B + 4C$, c'est-

à-dire que $A = 0$. Il vient de (1) que $5\,|B + C| = \sqrt{B^2 + C^2}$, ce qui est équivalent à $12B^2 + 25BC + 12C^2 + 0$. Le rapport B/C prend ainsi deux valeurs: $-3/4$ et $-4/3$. Le vecteur normal du plan recherché peut être pris égal à $\mathbf{n}(0, 3, -4)$ ou à $\mathbf{n}(0, 4, -3)$. Le problème a deux solutions: $3y = 4z$; $4y = 3z$.

10.66. Déterminons l'équation de la projection de la section sur le plan Oxy en éliminant z des équations données. On obtient $x^2 + 2y^2 - (2 - x - y)^2 = -4$, ou $y^2 - 2xy + 4x + 4y = 0$. Trouvons maintenant le centre de la conique obtenue en utilisant les équations (6) de l'introduction au chapitre III ou bien le problème 9.18. Les équations (6) sont de la forme $-2y + 4 = 0$, $2y - 2x + 4 = 0$. On trouve $x_0 = 4$, $y_0 = 2$. Vu que le point recherché appartient au plan donné, on a $x_0 + y_0 + 2z_0 = 2$, d'où $z_0 = -2$. Réponse: $C(4, 2, -2)$.

10.68. Exposons l'un des procédés de résolution du problème. D'abord établissons les équations de la projection, sur le plan Oyz, de la section de l'ellipsoïde donné par le plan $x + y + z = h$ et trouvons le centre de la conique obtenue. Le centre recherché de la section a les mêmes coordonnées y_0, z_0 que le centre de la projection; y_0, z_0 une fois trouvées, il est facile de déterminer la coordonnée x_0 du centre de la section à partir de l'équation du plan. En adoptant h pour paramètre, on obtient de cette façon l'ensemble recherché de points.

Réalisons le programme adopté. On obtient l'équation de la projection sur le plan Oyz en éliminant x des équations $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ et $x + y + z = h$. Il vient

$$3y^2 + 4z^2 + 2yz - 2hy - 2hz + h^2 - 4 = 0.$$

Ecrivons les équations permettant de déterminer le centre de cette courbe (voir problème 9.18)

$$6y + 2z - 2h = 0, \qquad 8z + 2y - 2h = 0.$$

D'où $y_0 = 3h/11$, $z_0 = 2h/11$. En portant ces nombres dans l'équation du plan $x + y + z = h$, on obtient $x_0 = 6h/11$. Donc, $x_0 = 6h/11$, $y_0 = 3h/11$, $z_0 = 2h/11$. En notant $h = 11t$, on obtient $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 2t$; ce sont les équations de la ligne des centres. Or tous les points de la droite n'appartiennent pas à l'ensemble recherché car celui-ci contient les seuls points se trouvant à l'intérieur de l'ellipsoïde. En calculant les valeurs du paramètre $t = \pm\sqrt{2/33}$ correspondant aux points d'intersection de la droite avec l'ellipsoïde, on obtient la restriction imposée à t. Réponse: $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 2t$, $|t| \leqslant \sqrt{2/33}$.

10.71. Indiquons un des procédés de résolution du problème. Ecrivons l'équation du plan sous la forme paramétrique

$$x = 3 + a_1u + b_1v,\ y = 2 + a_2u + b_2v, \quad z = 1 + a_3u + b_3v.$$

En portant ces équations dans l'équation de l'ellipsoïde, on obtient l'équation de la section en coordonnées intérieures du plan

$$(3 + a_1u + b_1v)^2 + 2\,(2 + a_2u + b_2v)^2 + 4\,(1 + a_3u + b_3v)^2 = 9. \quad (*)$$

Etant donné que le centre de cette ellipse se trouve au point de coordonnées $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, l'équation (*) n'a pas de termes linéaires. En égalant à zéro les coefficients de ces termes, on obtient les conditions imposées aux coordonnées des vecteurs directeurs du plan: $6a_1 + 8a_2 + 8a_3 = 0$, $6b_1 + 8b_2 + 8b_3 = 0$. Elles montrent qu'on peut prendre pour vecteur normal du plan recherché, le vecteur $\mathbf{n}(6, 8, 8)$. Or le plan recherché doit passer par le point $C(3, 2, 1)$. Aussi son équation est-elle de la forme $6(x - 3) + 8(y - 2) + 8(z - 1) = 0$, ou $3x + 4y + 4z - 21 = 0$.

10.75. Déterminons la projection de la section sur le plan Oxy. A cette fin, éliminons z des équations données. On obtient $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Donc, la pro-

jection recherchée est contenue dans le cercle. Or les points de l'hyperboloïde donné $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ vérifient la condition $x^2 - y^2 + 1 \leqslant 0$. Par suite, la projection recherchée comprend deux arcs de cercle, situés à l'intérieur des branches de l'hyperbole $x^2 - y^2 + 1 = 0$. En trouvant les points d'intersection de l'hyperbole et du cercle, on aboutit à la réponse: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $|y| \geqslant \sqrt{5/2}$ (ou $|x| \leqslant \sqrt{3/2}$). Les autres projections s'obtiennent de la même façon.

11.12. 1) Supposons que la surface donnée est un ellipsoïde. Dans le repère canonique, l'équation de l'ellipsoïde ne contient pas de termes linéaires. Tout autre repère d'origine au centre de symétrie de l'ellipsoïde ne diffère du repère canonique que par la base. Les formules de changement de base sont homogènes, de sorte que l'ensemble des termes du second degré se transforme dans l'ensemble des termes du même degré; les termes linéaires ne peuvent pas « apparaître ». La démonstration est la même pour les autres classes de quadriques. Notons que si la surface possède une infinité de centres de symétrie, chacun de ces centres peut être pris pour origine du repère canonique.

11.21. 6) Pour résoudre le problème, on peut réduire l'équation de la surface à la forme canonique en passant à un repère cartésien (non obligatoirement orthonormé). Après quoi on peut définir la classe de la quadrique d'après le tableau en utilisant le résultat obtenu dans le problème 11.18 ou en calculant directement les rangs et les signatures des formes quadratiques majeure et mineure.

La simplification de l'équation donnée peut être faite par deux procédés.

1er p r o c é d é. En dégageant les carrés parfaits contenant successivement les inconnues x_1, x_2, x_3, écrivons l'équation donnée sous la forme

$$(x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1)^2 - 6(x_2 + x_3)^2 - 6x_3^2 + k - 1 = 0.$$

Posons

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1 = u_1, \quad x_2 + x_3 = u_2, \; x_3 = u_3.$$

Ce changement des inconnues est évidemment inversible. L'équation de la surface en nouvelles coordonnées

$$u_1^2 - 6u_2^2 - 6u_3^2 + k - 1 = 0$$

est quasi canonique. Il est facile de se convaincre que pour $k = 1$ cette équation se réduit à la forme canonique

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{\zeta^2}{6} = 0$$

qui correspond au cône, pour $k > 1$, à la forme canonique

$$\frac{\xi^2}{k-1} + \frac{\eta^2}{k-1} - \frac{\zeta^2}{6(k-1)} = 1$$

qui correspond à l'hyperboloïde à une nappe, et pour $k < 1$, à la forme canonique correspondant à l'hyperboloïde à deux nappes.

2e p r o c é d é. Ecrivons la matrice de la forme quadratique majeure de la surface et réduisons-la à la forme diagonale en nous servant de transformations élémentaires des lignes (suivant la méthode de Gauss) et en effectuant les mêmes transformations de ses colonnes. Ce faisant, si on ne multiplie pas la dernière colonne et la dernière ligne par des nombres différents de l'unité et qu'on ne les ajoute pas aux autres lignes et colonnes, les transformations élémentaires correspondent à la matrice de passage T du problème 11.17, 2). Ces transformations simplifient également la matrice associée à la forme quadratique mineure de la surface sans modifier les rangs et les signatures. Dans le cas concerné

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & k \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{matrix} \right\|$$

Pour $k > 1$ on a $R = 4$, $r = 3$, $\Sigma = 0$, $\sigma = 1$; la surface est un hyperboloïde à une nappe. Pour $k = 1$ on obtient $R = r = 3$, $\Sigma = \sigma = 1$; la surface est un cône. Pour $k < 1$ on a $R = 4$, $r = 3$, $\Sigma = 2$, $\sigma = 1$; la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

11.22. 16) On donne deux procédés de résolution du problème.

1er procédé. En utilisant l'algorithme décrit dans l'introduction au § 11, on accomplit successivement toutes les recommandations. On simplifie d'abord par changement orthogonal des coordonnées la forme quadratique de la surface. Dans le cas considéré, il suffit d'éliminer le produit de y et z, autrement dit on peut se limiter au changement de ces deux variables. On écrit la matrice des coefficients de la forme quadratique en y et z figurant dans l'équation donnée, et la matrice-ligne des coefficients de y, z:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{a} = \frac{1}{2}(3, \ -5).$$

L'équation caractéristique $|\tilde{A} - \lambda E| = 0$ est

$$\left| \begin{matrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{matrix} \right| = 0.$$

Ses racines sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

On forme l'équation pour définir la base orthonormée des vecteurs propres: $(\tilde{A} - \lambda E)\ \xi = o$. Dans le cas considéré (pour $\lambda = 0$) on obtient

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = o,$$

$$\xi = h\,({}^t(1,\ 1)), \tag{4}$$

et (pour $\lambda = 2$) $\left\| \begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = o,$

$$\xi = h\,({}^t(-1,\ 1)). \tag{5}$$

Aux différentes valeurs propres $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$ correspondent des vecteurs propres orthogonaux, de sorte que pour trouver la base orthonormée engendrée par les vecteurs propres il suffit de normer les matrices-colonnes (4) et (5). On obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\,({}^t(1,\ 1))$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\,({}^t(-1,\ 1))$.

Le changement de coordonnées recherché $\left\| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\| = \tilde{S} \left\| \begin{matrix} y' \\ z' \end{matrix} \right\|$ a pour matrice de passage $\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$ composée de ces colonnes. Les termes $y^2 + z^2 - 2yz$ de l'équation donnée se transforment par ce changement de coordonnées en $2z'^2$. Pour obtenir les coefficients des termes linéaires de l'équation transformée, on recourt à la formule $\tilde{a}' = \tilde{a}\tilde{S}$. On trouve $\tilde{a}' = (-1/\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$. Les autres termes de l'équation ne varient pas avec ce changement de coordonnées.

L'équation transformée s'écrit

$$-x^2 + 2z'^2 + 2x - \sqrt{2}y' - 4\sqrt{2}z' + 1 = 0.$$

Il faut maintenant transporter l'origine des coordonnées dans l'espace. A cet effet, on groupe les inconnues de même nom et on les complète jusqu'au carré parfait; l'équation prend alors la forme

$$-(x-1)^2 + (z'\sqrt{2}-2)^2 - \sqrt{2}y' - 2 = 0,$$

ou

$$-(x-1)^2 + 2(z'-\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}(y'+\sqrt{2}) = 0.$$

On procède au changement de coordonnées $x = \xi + 1$, $y' = \eta - \sqrt{2}$, $z' = \zeta + \sqrt{2}$ (transport de l'origine du repère au point O dont les coordonnées par rapport au repère qui a subi une rotation sont $1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$). On obtient une équation quasi canonique

$$-\xi^2 + 2\zeta^2 - \sqrt{2}\eta = 0. \qquad (6)$$

Il va de soi que cette équation est celle d'un paraboloïde hyperbolique.

Faisons quelques remarques supplémentaires sur la solution du probbème. Calculons d'abord les coordonnées initiales du point O. Notons que dans le changement des seules variables y et z, la première coordonnée de tout point reste inchangée. Donc, la première coordonnée du point O vaut 1 aussi bien dans le repère initial que dans celui qui a tourné. Les autres coordonnées peuvent être calculées si on se sert de la formule de passage:

$$\left\|\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\| = \tilde{S}\left\|\begin{matrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{matrix}\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|\right)\cdot\left(\sqrt{2}\left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right\|\right) = \left\|\begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix}\right\|.$$

Donc, les anciennes coordonnées du point O sont 1, —2, 0.

La formule de passage des coordonnées x, y, z à ξ, η, ζ peut être obtenue de la façon suivante. Sa forme matricielle s'écrit

$$\left\|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\| = S\left\|\begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}\right\|, \qquad (7)$$

où la matrice de passage S contient $\tilde{S}$ en tant que sa sous-matrice

$$S = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{matrix}\right\|.$$

En développant la forme matricielle (7), on obtient le changement recherché de coordonnées sous la forme explicite

$$x = \xi + 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta - 2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta. \qquad (8)$$

Arrêtons-nous enfin sur le passage de l'équation quasi canonique à l'équation canonique. On peut par exemple multiplier les deux membres de l'égalité (6) par 1/2, faire passer le terme linéaire dans le second membre et procéder au changement de coordonnées

$$\xi = \eta', \quad \eta = \zeta', \quad \zeta = \xi'. \qquad (9)$$

Après quoi l'équation (6) devient une équation canonique

$$\xi'^2 - \frac{1}{2}\eta'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'.$$

Le changement des coordonnées (9) est défini par la matrice $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ et correspond à la permutation des vecteurs de base. Le passage des coordonnées initiales aux canoniques se définit grâce à (8) et (9) par les formules

$$x = \eta' + 1, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi' + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta' - 2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi' + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'.$$

2e procédé. On se base sur les résultats obtenus dans le problème 11.15. Au début, comme d'habitude, on écrit la matrice de la forme quadratique de la surface et la matrice-ligne des coefficients des termes linéaires:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = (1,\ 3/2,\ -5/2)$$

(on ne s'attarde pas ici sur les simplifications dues à la nature des coefficients de l'équation donnée, comme on l'a fait en exposant le premier procédé). On trouve les valeurs propres et la base orthonormée des vecteurs propres et on écrit la matrice de passage S à cette base

$$\lambda = -1,\ 2,\ 0; \quad S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Puis on trouve les projections $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ du vecteur ${}^t\boldsymbol{a}$ sur les sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Dans le cas considéré, le sous-espace $\mathcal{Q}$ est unidimensionnel et est engendré par le vecteur $\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$. Donc, $\boldsymbol{q} = ({}^t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,\ -1/2,\ -1/2)$, $\boldsymbol{p} = {}^t\boldsymbol{a} - \boldsymbol{q} = {}^t(1,\ 2,\ -2)$. Le nombre $({}^t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3) = -1/\sqrt{2}$ définit le coefficient du terme linéaire de l'équation quasi canonique (les valeurs propres -1, 2, 0 sont les coefficients des carrés des inconnues). Par suite, l'équation quasi canonique peut déjà être écrite à cette étape

$$-\xi^2 + 2\eta^2 - \sqrt{2}\zeta = 0.$$

Les coordonnées de l'origine du repère quasi canonique s'obtiennent à partir du système d'équations (11) du § 11 si on calcule au préalable le vecteur ${}^t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{q} = {}^t(1,\ 1,\ -3)$:

$$-x + 2 = 0, \quad y - z + 4 = 0, \quad -y + z - 4 = 0, \quad x + y - 3z + 1 = 0.$$

Le système est compatible, et sa solution unique définit les coordonnées du point O: $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$. Ce procédé a un faible avantage sur le premier de permettre le calcul direct des coordonnées de l'origine du repère canonique.

11.22. 17) Fournissons une solution s'appuyant sur les résultats obtenus dans le problème 11.15. On écrit d'abord la matrice de la forme quadratique de la surface et la ligne des coefficients des termes linéaires:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = (5/2,\ 5,\ 5/2).$$

On calcule les nombres caractéristiques de la matrice A : $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, puis on trouve le vecteur propre normé associé à la valeur propre $\lambda = 25$; il est égal à $e_1 = {}^t(0, 3/5, 4/5)$. Sans calculer les autres vecteurs propres, on décompose le vecteur ${}^ta$ en somme $p + q$. Dans le cas donné, le sous-espace $\mathcal{P}$ est unidimensionnel et est engendré par le vecteur e_1 (comp. avec la solution du problème 11.22, 16). Donc, $p = (a, e_1)\, e_1 = {}^t(0, 3, 4)$. Le vecteur q est égal à la différence ${}^ta - p = {}^t(5/2, 2, -3/2)$. Le vecteur q trouvé est l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 0$. Normons le vecteur q: $e_3 = \frac{q}{|q|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\,({}^t(5, 4, -3))$. Il reste à trouver encore un vecteur, plus exactement le second vecteur de la base quasi canonique. Bien que ce soit évidemment l'un des vecteurs propres associés à la valeur propre nulle, il s'avère plus utile pour faciliter les calculs de le rechercher tout simplement comme vecteur orthogonal aux vecteurs e_1 et e_3 déjà trouvés, c'est-à-dire à partir du système d'équations

$$3y + 4z = 0, \quad 5x + 4y - 3z = 0.$$

Sa solution normée est, par exemple, $e_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\,({}^t(5, -4, 3))$. On peut maintenant écrire la matrice orthogonale à partir des vecteurs e_1, e_2, e_3

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/(5\sqrt{2}) & 4/(5\sqrt{2}) \\ 4/5 & 3/(5\sqrt{2}) & -3/(5\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$$

qui est la matrice de passage à un repère quasi canonique. Les nombres caractéristiques trouvés 25, 0, 0 et la valeur de $2\,({}^ta, e_3) = 2\,|q|$ sont les coefficients de l'équation quasi canonique de la surface donnée

$$25\xi^2 + 5\sqrt{2}\zeta = 0.$$

La surface donnée est donc un cylindre parabolique. Il ne reste qu'à trouver les coordonnées de l'origine O du repère quasi canonique. Elles sont définies par le système d'équations (11) du § 11. On calcule le vecteur $q + {}^ta = {}^t(5, 7, 1)$ et on écrit ce système:

$$9y + 12z + 3 = 0, \quad 12y + 16z + 4 = 0, \; 5x + 7y + z + 11 = 0. \tag{10}$$

Le système d'équations (10) a une infinité de solutions. Toute solution convient, par exemple, $O\,(-26/15, \; -1/3, \; 0)$.

12.60. 2) Désignons l'aire cherchée par S. La transformation

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1, \; y^* = a_2x + b_2y + c_2 \tag{11}$$

fait correspondre aux deux premières droites les axes Oy et Ox. Trouvons l'image (D^*) de la troisième droite en substituant les solutions du système (11)

$$x = \frac{1}{\delta_3}\begin{vmatrix} x^* - c_1 & b_1 \\ y^* - c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{\delta_3}\begin{vmatrix} a_1 & x^* - c_1 \\ a_2 & y^* - c_2 \end{vmatrix} \quad \left(\delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

dans l'équation de la droite $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Il vient

$$a_3\begin{vmatrix} x^* - c_1 & b_1 \\ y^* - c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & x^* - c_1 \\ a_2 & y^* - c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x^*-c_1 \\ a_2 & b_2 & y^*-c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}=0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x^* \\ a_2 & b_2 & y^* \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta.$$

Substituons $y^* = 0$ et $x^* = 0$ dans l'équation de la droite (D^*). On trouve que (D^*) intercepte, sur les axes Ox et Oy, des segments de longueur $|\Delta/\delta_1|$ et $|\Delta/\delta_2|$, où

$$\delta_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Donc, la droite (D^*) forme avec les axes de coordonnées un triangle dont l'aire est $S^* = \dfrac{\Delta^2}{2\,|\delta_1\delta_2|}$. Vu que $S^*/S = |\delta_3|$, on obtient $S = \dfrac{\Delta^2}{2\,|\delta_1\delta_2\delta_3|}$.

14.24. 10) Notons Δ_n le déterminant recherché. En le développant suivant la première ligne, on obtient la relation de récurrence $\Delta_n = 2\alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Soit un q tel que $2\alpha = q + \dfrac{1}{q}$ (en résolvant l'équation quadratique, on obtient, par exemple, $q = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \dfrac{1}{q} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$). L'égalité $\Delta_n = \left(q + \dfrac{1}{q}\right)\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ entraîne deux relations de récurrence

$$\begin{aligned} \Delta_n - q\Delta_{n-1} &= \frac{1}{q}(\Delta_{n-1} - q\Delta_{n-2}), \\ \Delta_n - \frac{1}{q}\Delta_{n-1} &= q\left(\Delta_{n-1} - \frac{1}{q}\Delta_{n-2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

On en déduit que

$$r_n = \Delta_n - q\Delta_{n-1} \text{ et } s_n = \Delta_n - \frac{1}{q}\Delta_{n-1} \tag{13}$$

constituent deux progressions géométriques de raison $\dfrac{1}{q}$ et q respectivement. Calculons

$$r_2 = \Delta_2 - q\Delta_1 = 4\alpha^2 - 1 - 2q\alpha = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 1 - q\left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q^2};$$

de façon analogue, on obtient $s_2 = q^2$, d'où $r_n = \dfrac{1}{q^n}$ et $s_n = q^n$ $(n > 1)$. Il découle de la formule (13) que $s_n - r_n = \left(q - \dfrac{1}{q}\right)\Delta_{n-1}$. Donc, $\Delta_{n-1} = \left(q^n - \dfrac{1}{q^n}\right) \Big/ \left(q - \dfrac{1}{q}\right)$ pour $q \neq \pm 1$. En remplaçant q par son expression en fonction de

α et en développant les puissances suivant le binôme de Newton, on obtient

$$\Delta_{n-1}=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^n-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^n}{2^{n-1}\sqrt{\alpha^2-1}}=\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1}\alpha^{n-2k-1}(\alpha^2-1)^k.$$

En remplaçant $n-1$ par n, on obtient la réponse du problème.

Considérons le cas de $q=\pm 1$ ($\alpha=\pm 1$). Pour $q=1$, les deux formules (12) coïncident et montrent que les Δ_n forment une progression arithmétique de raison 1. On a dans ce cas $\Delta_1=2$, de sorte que $\Delta_n=n+1$. De façon analogue, il vient que, si $q=-1$ ($\alpha=-1$), $\Delta_n=(-1)^n(n+1)$. Ces cas particuliers sont pris en compte dans la formule indiquée dans la réponse.

14.24. 13) Soit $b\neq 0$. En mettant b en facteur commun pour chaque ligne du déterminant et en notant $a/b=x$, on obtient

$$\Delta=b^n\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x\end{vmatrix}.$$

Par suite, le problème se réduit à 14.24,10), ce qui fournit, après substitutions adéquates des notations, la première des formules indiquées dans la réponse. Cette formule reste encore vraie dans le cas trivial de $b=0$. Pour obtenir la réponse sous une autre forme, on considère que x est une variable. Δ peut alors être traité comme un polynôme en x de degré n à coefficient dominant b^n. D'après le théorème de Bézout

$$\Delta=\Delta(x)=b^n\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k),$$

où α_k sont les racines de l'équation $\Delta(x)=0$. La réponse au problème 14.24,11) donne $\Delta_n=0$ pour $\varphi=\frac{\pi k}{n+1}$ ($k=1,\dots,n$). En comparant Δ_n et Δ, on s'assure que le polynôme $\Delta(x)$ possède n racines distinctes $\alpha_k=2\cos\frac{\pi k}{n+1}$, d'où il vient

$$\Delta=b^n\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{b}-2\cos\frac{\pi k}{n+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(a-2b\cos\frac{\pi k}{n+1}\right).$$

Il va de soi que cette formule est encore vraie dans le cas trivial de $b=0$.

15.50. Chaque transformation élémentaire des lignes de la matrice A est équivalente à la multiplication de A à gauche par une matrice élémentaire obtenue de la matrice unité par la même transformation élémentaire. Toute matrice régulière peut être réduite par des transformations élémentaires en matrice unité. On obtient donc dans ce cas $S_k\dots S_1A=E$, d'où $S_k\dots S_1=A^{-1}$, $A=S_1^{-1}\dots S_k^{-1}$. Les matrices $S_1^{-1},\dots,S_k^{-1}$ sont élémentaires tout comme $S_1,\dots,S_k$; elles s'obtiennent de la matrice unité par des transformations élémentaires « inverses » des lignes.

15.51. 1) Considérations générales: en vertu de la solution du problème 15.50, $A=S_1^{-1}\dots S_k^{-1}$, où les matrices $S_1,\dots,S_k$ correspondent aux transformations élémentaires des lignes de la matrice A, qui la font passer en matrice unité. Après avoir trouvé $S_1,\dots,S_k$, on obtient $S_1^{-1},\dots,S_k^{-1}$. L'exemple ci-dessous montre que le processus peut être raccourci d'une étape. Soit à sim-

plifier la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$. Multiplions la deuxième ligne par $-1/2$, ce qui équivaut à la multiplication de A à gauche par la matrice $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix}$. Il vient

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = B. \qquad (14)$$

La matrice B est élémentaire. Calculons $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = S$. En multipliant les deux membres de l'égalité (14) à gauche par S, on obtient le développement recherché: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = SB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

15.73. La matrice diagonale diag $(1, 2, \ldots, n)$ est régulière. En utilisant cette matrice, on peut se servir du résultat obtenu dans le problème 15.69. Il s'ensuit que la matrice donnée A est diagonale. Il ne reste qu'à démontrer l'égalité de tous les éléments diagonaux de A. Si A est une matrice d'ordre 2, c'est-à-dire $A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$, multiplions-la à gauche et à droite par la matrice $S = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. En égalant AS à SA on constate que $\lambda_1 = \lambda_2$. De façon analogue, en recherchant S pour une matrice diagonale A d'ordre quelconque, on vérifie l'égalité des éléments diagonaux de A pris deux à deux.

15.81. On cherche la matrice inverse par la méthode de Gauss en partant de la matrice $\| A \mid E \|$ (voir problème 15.53). Le processus de simplification s'effectue à partir de la ligne inférieure. Dans ce cas, les éléments des matrices A et E situés au-dessous de la diagonale principale ne varient pas. En fin de compte, on doit obtenir de la matrice unité une matrice triangulaire supérieure.

15.118. Soit A la matrice de permutation donnée. Passons en revue toutes les matrices A^k. Ce sont des matrices de permutation (voir problème 15.108). Le nombre des matrices de permutation distinctes d'un même ordre est fini. Il existe donc des entiers naturels p, q tels que $q > p$ et $A^q = A^p$; d'où $A^{q-p} = E$.

16.26. 2) Soit $\boldsymbol{b}$ une colonne de la matrice A telle que $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$. Toutes les colonnes de A sont proportionnelles à $\boldsymbol{b}$. Si $\boldsymbol{a}$ est la ligne des coefficients de proportionnalité, $A = \boldsymbol{ba}$.

16.27. $B = A^{-1}(AB)$, $C = (CA)A^{-1}$. En appliquant le théorème qui apprécie le rang du produit de matrices (problème 16.25,1)), on obtient les inégalités $\mathrm{Rg}\, B \leqslant \mathrm{Rg}\, AB \leqslant \mathrm{Rg}\, B$, $\mathrm{Rg}\, C \leqslant \mathrm{Rg}\, CA \leqslant \mathrm{Rg}\, C$, d'où découlent les assertions nécessaires.

16.35. L'équation $AB = O$ est équivalente à l'équation $(SAT)(T^{-1}B) = O$, où S, T sont des matrices régulières quelconques d'ordre adéquat. Choisissons S, T de telle manière que $A' = SAT = \begin{Vmatrix} E_r & O \\ O & O \end{Vmatrix}$, où E_r est la matrice unité d'ordre $r = \mathrm{Rg}\, A$. Notons $B' = T^{-1}B$. On vérifie aisément que les r premières lignes du produit $A'B'$ coïncident avec les r premières lignes de la matrice B'. L'égalité $A'B' = O$ n'est donc possible que si les r premières lignes de la matrice B' sont nulles. Par suite, $\mathrm{Rg}\, B' \leqslant n - r$. Or $\mathrm{Rg}\, B' = \mathrm{Rg}\, B$, $\mathrm{Rg}\, A' = \mathrm{Rg}\, A = r$, donc $\mathrm{Rg}\, A + \mathrm{Rg}\, B = \mathrm{Rg}\, A' + \mathrm{Rg}\, B' \leqslant n$. On obtient une autre solution du problème en interprétant les colonnes de B comme solutions du système d'équations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Le problème donné se réduit alors à l'estimation du nombre maximal de solutions linéairement indépendantes de ce système.

18.17. 4) Considérations générales. Dans l'introduction au chapitre VII on a décrit le lien existant entre la matrice simplifiée A d'un système d'équations

et sa matrice fondamentale Φ: si $A = \begin{Vmatrix} E_r & D \\ O & O \end{Vmatrix}$, $\Phi = \begin{Vmatrix} -D \\ E \end{Vmatrix}$. Cela permet de rétablir le système d'équations d'après la matrice fondamentale normale. Le problème se réduit ainsi à la recherche de la matrice fondamentale normale du système d'après sa matrice fondamentale donnée. Pour trouver la matrice fondamentale normale d'après la matrice fondamentale donnée, remarquons que toutes les matrices fondamentales d'un système d'équations s'obtiennent l'une de l'autre par transformations élémentaires des colonnes *). On donne dans le problème la matrice fondamentale A_{148}. Transformons ses colonnes:

$$A_{148} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \Phi.$$

Ces transformations sont évidentes et n'exigent pas de description détaillée. A la matrice fondamentale normale Φ correspond le système d'équations de matrice

$$A = \left\Vert \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & \multicolumn{2}{c}{O} \end{array} \right\Vert .$$

En supprimant les lignes nulles, simplifions les autres lignes de A (les transformations élémentaires des lignes de la matrice remplacent le système d'équations homogènes par un système équivalent)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

A la dernière matrice correspond le système d'équations donné dans la réponse: $x - z = 0$, $x - 2y + t = 0$.

19.6. 42) Le système d'équations est défini par la matrice complète $\Vert A_{581} \mid c_{58} \Vert$. On trouve dans la liste des matrices:

$$\Vert A_{581} | c_{58} \Vert = \left\Vert \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 20 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 65 \end{array} \right\Vert .$$

Cette matrice complète correspond au système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 20, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 &= 65. \end{aligned} \tag{15}$$

En appliquant l'algorithme de Gauss, on réduit la matrice complète à la forme simplifiée

$$\left\Vert \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 19/5 & 2/5 & 33/5 & 5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 11/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\Vert . \tag{16}$$

Notons que le système est compatible car les deux premières colonnes de la matrice complète (16) sont principales. La matrice complète (16) correspond au sys-

*) Dans l'introduction au chapitre VIII on a indiqué un autre procédé de résolution de ce problème (en termes d'espaces vectoriels).

tème d'équations

$$x_1+\frac{19}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4+\frac{33}{5}x_5=5,$$
$$x_2+\frac{2}{5}x_3+\frac{11}{5}x_4+\frac{4}{5}x_5=5, \qquad (17)$$

qui est équivalent à (15). Les inconnues principales sont x_1, x_2, les inconnues non principales, x_3, x_4, x_5. Désignons ces dernières par h_1, h_2, h_3. On obtient la solution générale:

$$x_1=-\frac{19}{5}h_1-\frac{2}{5}h_2-\frac{33}{5}h_3+5,$$
$$x_2=-\frac{2}{5}h_1-\frac{11}{5}h_2-\frac{4}{5}h_3+5, \qquad (18)$$
$$x_3=h_1,\ x_4=h_2,\ x_5=h_3.$$

La solution générale du système d'équations (17) peut être obtenue par un autre procédé. D'abord, en posant $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ dans (17), on trouve sa solution particulière:

$$X_0=\begin{Vmatrix}5\\5\\0\\0\\0\end{Vmatrix}. \qquad (19)$$

Puis, on examine le système homogène

$$x_1+\frac{19}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4+\frac{33}{5}x_5=0,$$
$$x_2+\frac{2}{5}x_3+\frac{11}{5}x_4+\frac{4}{5}x_5=0.$$

En posant $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$, on trouve $x_1 = -19/5$, $x_2 = -2/5$. En posant $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, on trouve $x_1 = -2/5$, $x_2 = -11/5$. En posant $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, on trouve $x_1 = -33/5$, $x_2 = -4/5$. Ainsi on obtient trois solutions particulières linéairement indépendantes du système d'équations homogènes (famille fondamentale de solutions)

$$\begin{Vmatrix}-19/5\\-2/5\\1\\0\\0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}-2/5\\-11/5\\0\\1\\0\end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix}-33/5\\-4/5\\0\\0\\1\end{Vmatrix}.$$

On peut maintenant écrire la solution générale du système d'équations (15):

$$X=h_1\begin{Vmatrix}-19/5\\-2/5\\1\\0\\0\end{Vmatrix}+h_2\begin{Vmatrix}-2/5\\-11/5\\0\\1\\0\end{Vmatrix}+h_3\begin{Vmatrix}-33/5\\-4/5\\0\\0\\1\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}5\\5\\0\\0\\0\end{Vmatrix}. \qquad (20)$$

Il est évident que (20) est une autre écriture de la formule (18).

Enfin, on peut obtenir la solution générale du système d'équations (17) sous la forme matricielle. A cette fin, on utilise la solution particulière (19) et on forme la matrice fondamentale Φ à partir de la matrice (16) en utilisant la règle $\left\| \begin{matrix} -D \\ E \end{matrix} \right\|$. Dans le cas considéré on obtient

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} -19/5 & -2/5 & -33/5 \\ -2/5 & -11/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

et la solution générale prend la forme

$$X = \left\| \begin{matrix} -19/5 & -2/5 & -33/5 \\ -2/5 & -11/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| h + \left\| \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \qquad (21)$$

où h est la matrice-colonne des constantes arbitraires h_1, h_2, h_3. Il est évident que (21) est l'écriture matricielle de (20).

En remplaçant les constantes arbitraires h_1, h_2, h_3 par $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{h}_3$ égales respectivement à $-5h_1$, $-5h_2$, $-5h_3$, on peut aussi écrire la solution générale du système d'équations sous la forme

$$X = \left\| \begin{matrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix} \right\| \tilde{h} + \left\| \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad \text{où } \tilde{h} = \left\| \begin{matrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \tilde{h}_3 \end{matrix} \right\|. \qquad (22)$$

Dans la réponse au problème 19.6.42) on trouve la matrice A_{409} et la colonne c_{231}. En se référant à la liste des matrices on trouve

$$\Phi = A_{409} = \left\| \begin{matrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix} \right\|, \quad c_{231} = \left\| \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

ce qui correspond à la solution (22). Rappelons que la famille fondamentale de solutions, ainsi que la solution particulière ne sont pas définies de façon univoque.

19.30. Vérifions si les conditions du théorème de Fredholm sont remplies pour le système d'équations $({}^tAA)\,x = {}^tA\,b$. Soit y_0 une solution du système homogène adjoint $y\,({}^tAA) = o$. Alors $y_0\,({}^tAA)\,({}^ty_0) = 0$, d'où $(y_0({}^tA))\,({}^t(y_0\,({}^tA))) = 0$, ce qui n'est possible que si $y_0\,({}^tA) = o$. En multipliant la dernière égalité par b, on obtient $y_0\,({}^tA\,b) = 0$ pour toute matrice-colonne b, c'est-à-dire que les conditions du théorème de Fredholm sont remplies. Il s'ensuit la compatibilité du système d'équations $({}^tAA)\,x = {}^tA\,b$.

19.31. Admettons le contraire. Dans ce cas, le système d'équations $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ possède une solution non triviale $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Si x_j^0 est une composante maximale en module de cette solution, $x_j^0 \neq 0$ et la j-ième équation du système donne $a_{jj} + \sum_{k \neq j} a_{jk} (x_k^0/x_j^0) = 0$, d'où l'on a $|a_{jj}| \leqslant \leqslant \sum_{k \neq j} |a_{jk}|$ car $|x_k^0/x_j^0| \leqslant 1$, ce qui contredit les données du problème.

19.34. Cherchons la droite $Ax + By + C = 0$ qui passe par ces trois points. Considérons les égalités

$$Aa_1 + Bb_1 + C = 0,$$
$$Aa_2 + Bb_2 + C = 0,$$
$$Aa_3 + Bb_3 + C = 0$$

comme système d'équations en A, B, C dont la matrice des coefficients est

$$M = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Toute solution non triviale du système vérifie la condition $A^2 + B^2 \neq 0$ vu que le dernier coefficient dans chaque équation vaut 1. Par suite, les solutions non triviales du système, et elles seules, correspondent aux droites qui passent par les trois points donnés. La condition $\operatorname{Rg} M = 3$ est nécessaire et suffisante pour que le système d'équations ne possède pas de solutions non triviales, c'est-à-dire qu'elle est nécessaire et suffisante pour que les trois points donnés ne soient pas alignés.

19.35. 1) Cherchons l'équation de la droite passant par deux points donnés sous la forme $Ax + By + C = 0$. Considérons le système d'équations pour déterminer A, B, C:

$$Aa_1 + Bb_1 + C = 0,$$
$$Aa_2 + Bb_3 + C = 0.$$

Sa matrice est $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{Vmatrix} = M$. Chaque solution non triviale du système vérifie la condition $A^2 + B^2 \neq 0$ vu que le dernier coefficient dans chaque équation vaut 1. Par suite, les solutions non triviales, et elles seules, correspondent aux droites contenant les deux points donnés. Si les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont distincts, $\operatorname{Rg} M = 2$ et le système d'équations possède une seule solution non triviale linéairement indépendante, c'est-à-dire qu'il existe une droite unique passant par les points donnés.

2) Pour que trois points de coordonnées (x, y), (a_1, b_1), (a_2, b_2) soient alignés, il faut et il suffit (voir solution du problème 19.34) que soit remplie la condition

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est justement l'équation recherchée. Notons que si les points donnés sont distincts, l'un au moins des coefficients des inconnus est différent de zéro, c'est-à-dire que l'équation obtenue définit réellement une droite.

19.42. 1) Cherchons tous les plans qui contiennent trois points donnés. Ce problème se ramène à l'étude du système d'équations

$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D = 0,$$
$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + D = 0,$$
$$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 + D = 0$$

en A, B, C, D. Vu que le dernier coefficient dans chaque équation vaut 1, chaque solution non triviale du système vérifie la condition $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ et définit en effet un plan contenant les trois points donnés. On s'intéresse au cas où la famille fondamentale de solutions contient une solution unique et il existe alors un plan unique contenant les trois points donnés. Il faut et il suffit pour cela que

$$\operatorname{Rg}\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{matrix}\right\| = 3.$$

20.21. L'espace des polynômes impairs de degré au plus égal à 5 est de dimension 3; représentons les polynômes donnés par les matrices-colonnes de leurs coordonnées dans la base (t, t^3, t^5). Réduisons la matrice complète correspondante à la forme triangulaire:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\|.$$

Il est maintenant clair que les polynômes $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$ forment une base dans l'espace des polynômes impairs de degré $\leqslant 5$. Continuons les transformations élémentaires de la matrice complète:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\|.$$

Le polynôme $5t - t^3 + 2t^5$ possède dans la base $(2t + t^5, t^3 - t^5, t + t^3)$ la matrice-colonne de coordonnées ${}^t(4, 2, -3)$.

20.26. L'espace des matrices symétriques gauches d'ordre 3 est de dimension 3; les matrices

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|$$

forment une base de cet espace. La matrice $\left\|\begin{matrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{matrix}\right\|$ est définie dans cette base par la colonne de coordonnées ${}^t(a, b, c)$. Vu que $\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{matrix}\right| =$ $= 13 \neq 0$, le second système est une base. Le fait que le premier système est une base peut ne pas être spécialement vérifié car il résultera des calculs ultérieurs. La matrice de passage S est recherchée à partir de l'équation $G = FS$,

c'est-à-dire de

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{matrix}\right\| S.$$

Pour résoudre cette équation matricielle, écrivons la matrice $\| F \mid G \|$. Par des transformations élémentaires de ses lignes, réduisons la partie gauche à la matrice unité (on vérifie ainsi automatiquement que le premier système est une base); dans ce cas la partie droite se transforme en matrice recherchée S. On a

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 40 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 37 & 8 \end{array}\right\|.$$

Les relations recherchées entre les coordonnées sont de la forme: $\xi_1 = 9\xi_1' + 40\xi_2' + 9\xi_3'$, $\xi_2 = -3\xi_1' - 11\xi_2' - 2\xi_3'$, $\xi_3 = 8\xi_1' + 37\xi_2' + 8\xi_3'$.

21.7. 4) Ecrivons les systèmes d'équations définissant les sous-espaces donnés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. On a (voir introduction au ch. VIII):

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 2 & x_3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3-x_2-x_1 \end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & x_1 \\ 3 & 1 & 3 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 & x_3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & -3 & x_2-3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1-x_2-x_3 \end{array}\right\|;$$

le premier sous-espace est défini par l'équation $x_3 - x_2 - x_1 = 0$; le second, par l'équation $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. On remarque de plus que $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{Q} = 2$. La base de $\mathcal{P}$ se compose, par exemple, des vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$; la base de $\mathcal{Q}$ se forme, par exemple des vecteurs $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$.

Déterminons la dimension et la base de la somme $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$. On a

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}\right\|;$$

$\dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = 3$, c'est-à-dire que la somme $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ coïncide avec tout l'espace tridimensionnel; la base de la somme est engendrée par exemple par les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$.

L'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est définie par le système d'équations

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

La matrice de ce système se réduit par les transformations élémentaires des lignes à la forme

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Le rang de la matrice est 2, donc $\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = 3 - 2 = 1$, ce qui d'ailleurs pouvait être déterminé auparavant d'après la formule

$$\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}) = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} - \dim(\mathcal{P} + \mathcal{Q}).$$

Le vecteur de base de l'intersection a des coordonnées vérifiant les conditions $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = 0$; on peut le définir par la matrice-colonne ${}^t(1, 0, 1)$.

24.26. Soit A la matrice de la transformation φ dans une certaine base et soit

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

1) En remplaçant λ par $-\lambda$, on a aussi

$$\det(A + \lambda E) = (\lambda_1 + \lambda) \dots (\lambda_n + \lambda).$$

En multipliant ces égalités, on obtient

$$\det(A^2 - \lambda^2 E) = (\lambda_1^2 - \lambda^2) \dots (\lambda_n^2 - \lambda^2),$$

ou

$$\det(A^2 - tE) = (\lambda_1^2 - t) \dots (\lambda_n^2 - t),$$

où $t = \lambda^2$.

2) Dans la décomposition du polynôme caractéristique, remplaçons λ par $\lambda\varepsilon^k$ $(k = 0, \dots, m-1)$, où $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$ $(\varepsilon^m = 1)$:

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda),$$
$$\det(A - \lambda\varepsilon E) = (\lambda_1 - \lambda\varepsilon) \dots (\lambda_n - \lambda\varepsilon),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\det(A - \lambda\varepsilon^{m-1}E) = (\lambda_1 - \lambda\varepsilon^{m-1}) \dots (\lambda_n - \lambda\varepsilon^{m-1}).$$

Puisque les matrices $A - \lambda\varepsilon^k E$ $(k = 0, \dots, m-1)$ commutent, on obtient en multipliant les égalités termes à termes:

$$\det(A^m - \lambda^m E) = (\lambda_1^m - \lambda^m) \dots (\lambda_n^m - \lambda^m),$$

ou, en posant $\lambda^m = t$,

$$\det(A^m - tE) = (\lambda_1^m - t) \dots (\lambda_n^m - t).$$

On a utilisé ici la décomposition $a^m - \lambda^m = (a - \lambda)(a - \lambda\varepsilon) \dots (a - \lambda\varepsilon^{m-1})$. Pour l'obtenir, il suffit de noter que le polynôme $a^m - \lambda^m$ a les racines a, $a\varepsilon, \dots, a\varepsilon^{m-1}$.

26.25. 1) Le polynôme $p_j(t) = \frac{d^j}{dt^j}(t^2 - 1)$, $j < k$, s'annule aux points $t = 1$ et $t = -1$. En intégrant par parties k fois et en notant que $p_j^{(k)}(t) \equiv 0$ pour $j < k$, on obtient pour $j < k$

$$2^k k! \int_{-1}^{1} p_j(t)\, p_k(t)\, dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} p_j^{(k)}(t)\, (t^2 - 1(^k\, dt = 0.$$

2) En utilisant la formule précédente, on a

$$\int_{-1}^{1} (p_k(t))^2\, dt = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^k}{dt^k}(t^2 - 1)^k\right)(t^2 - 1)^k\, dt =$$

$$= \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^k\, dt.$$

On calcule la dernière intégrale en intégrant par parties k fois :

$$\int_{-1}^{1} (1+t)^k (1-t)^k \, dt = \frac{k}{k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{k+1} (1-t)^{k-1} \, dt = \dots$$

$$\dots = \frac{(k!)}{(k+1) \dots (2k)} \int_{-1}^{1} (1+t)^{2k} \, dt = \frac{(k!)^2 \, 2^{2k+1}}{(2k)! \, (2k+1)} .$$

32.8. 12) Procédons au changement de coordonnées

$$x_1 = x_1' + x_2', \; x_2 = x_1' - x_2', \; x_3 = x_3'. \tag{23}$$

Dans les nouvelles coordonnées, la forme quadratique s'écrit

$$x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3' = (x_1' + x_3')^2 - x_2'^2 - x_3'^2.$$

Après le deuxième changement de coordonnées

$$x_1'' = x_1' + x_2', \; x_2'' = x_2', \; x_3'' = x_3', \tag{24}$$

la forme quadratique donnée se met sous une forme canonique

$$x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

L'indice d'inertie positif de la forme donnée est égal à 1, le négatif à 2. Le rang de la forme est $1 + 2 = 3$, la signature est $1 - 2 = -1$.

On peut écrire le changement de coordonnées qui transforme la forme donnée en canonique comme un composé des changements (23) et (24):

$$x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'', \; x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'', \; x_3 = x_3''.$$

32.27. 10) La matrice $B = A_{203}$ associée à la forme quadratique donnée possède les nombres caractéristiques 3 (de multiplicité 2) et -3 (de multiplicité 1). Le sous-espace invariant associé à la valeur propre 3 est défini par le système d'équations linéaires homogènes de matrice $B - 3E$; on obtient deux vecteurs propres linéairement indépendants a_1, a_2 définis respectivement par les matrices-colonnes de coordonnées ${}^t(1, 0, -1)$ et ${}^t(2, 1, 0)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre -3 est défini par le système d'équations linéaires homogènes de matrice $B + 3E$; on obtient un seul vecteur propre linéairement indépendant a_3 défini par la matrice-colonne de coordonnées ${}^t(1, -2, 1)$. Les vecteurs a_1, a_2, a_3 forment une base propre de la transformation associée à la forme quadratique donnée. Or c'est à la base propre orthonormée qu'on s'intéresse. Vu que les vecteurs propres des transformations linéaires auto-adjointes de l'espace euclidien, associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux, on a $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$. Il ne reste qu'à orthogonaliser le système des vecteurs a_1, a_2. Posons $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - \alpha a_1$; α est choisi de telle manière que $(b_1, b_2) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_1)} = 1$, d'où l'on conclut que le vecteur b_2 est défini par la matrice-colonne de coordonnées ${}^t(-1, -1, -1)$. Les vecteurs b_1, b_2, a_3 forment une base orthogonale propre de la transformation associée ; en normant ces vecteurs, on obtient la base propre orthonormée recherchée. Pour plus de commodité, on change le signe de toutes les coordonnées du vecteur b_2. Les matrices-colonnes de coordonnées des vecteurs obtenus forment la matrice de passage de la base orthonormée donnée à la base $(b_1, -b_2, a_3)$, c'est-à-dire la matrice $S = A_{322}$. Dans la base trouvée, la forme quadratique s'écrit $3x_1'^2 + 3x_2'^2 - 3x_3'^2$. En se servant de la matrice S, on peut écrire le changement de coordonnées réduisan

la forme quadratique donnée à la forme diagonale:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x'_1+\frac{1}{\sqrt{3}}x'_2+\frac{1}{\sqrt{6}}x'_3,$$
$$x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}x'_2-\frac{2}{\sqrt{6}}x'_3,$$
$$x_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'_1+\frac{1}{\sqrt{3}}x'_2+\frac{1}{\sqrt{6}}x'_3.$$

32.36. 11) Indiquons deux procédés de résolution du problème.

1[er] procédé. Les deux formes seront étudiées dans l'espace arithmétique tridimensionnel des matrices-colonnes. Ecrivons les matrices associées aux formes données dans la base initiale:

$$F=\begin{Vmatrix}6&0&3\\0&1&-3\\3&-3&6\end{Vmatrix},\quad G=\begin{Vmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{Vmatrix}.$$

Tous les mineurs principaux de la matrice G

$$2,\ \begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}\ \text{et}\ \begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=1$$

sont strictement positifs, donc d'après la loi de Sylvester, la forme g est définie positive. Considérons la forme bilinéaire

$${}^t xGy=2x_1y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3$$

qui lui correspond et traitons-la comme produit scalaire, de sorte que l'espace donné devient un espace euclidien. La méthode exposée dans l'introduction au § 32 permet de trouver une base orthonormée de vecteurs propres de la transformation linéaire auto-adjointe φ associée à la forme f. Les valeurs propres et les vecteurs propres se calculent d'après les formules (6) et (7) du § 32:

$$\det(F-\lambda G)=\begin{vmatrix}6-2\lambda&0&3-\lambda\\0&1-\lambda&-3+\lambda\\3-\lambda&-3+\lambda&6-2\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(3-\lambda)^2\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1-\lambda&-3+\lambda\\1&-1&2\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2(3+\lambda);\qquad \lambda=\pm3.$$

$$F+3G=\begin{Vmatrix}12&0&6\\0&4&-6\\6&-6&12\end{Vmatrix},\quad F-3G=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{Vmatrix}.$$

La solution fondamentale du système d'équations $(F+3G)\,\xi=o$ est $x={}^t(-1,\ 3,\ 2)$. La valeur de la fonction $g\,(x)$ sur le vecteur ${}^t(-1,\ 3,\ 2)$ est le carré de sa longueur. En calculant cette valeur, on obtient un vecteur propre normé associé à $\lambda=-3$; soit $e'_1={}^t(-1/\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2/\sqrt{3})$. Du système d'équations $(F-3G)\,\xi=o$ on trouve qu'à la valeur propre $\lambda=3$ correspond le plan propre $x_2=0$. Cherchons-y deux vecteurs propres orthogonaux. A titre du premier

vecteur on peut prendre toute solution non nulle de l'équation $x_2 = 0$, par exemple, $b = {}^t(1, 0, 0)$. Pour obtenir le deuxième vecteur propre $c = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, joignons à l'équation $x_2 = 0$ la condition d'orthogonalité des vecteurs b et c; soit ${}^t bGc = 2x_1 + x_3 = 0$. Des deux équations $x_2 = 0$ et $2x_1 + x_3 = 0$ on tire que $c = {}^t(1, 0, -2)$ à un facteur numérique près. Normons maintenant les vecteurs trouvés b et c en calculant le carré de leurs longueurs $g(b) = 2$ et $g(c) = 6$. Notons que les vecteurs b et c sont orthogonaux à a, vu que les valeurs propres associées sont distinctes et la transformation φ est auto-adjointe. On a obtenu la base orthonormée des vecteurs propres de la transformation φ, soit $e'_1 = {}^t(-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$, $e'_2 = {}^t(1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $e'_3 = {}^t(1/\sqrt{6}, 0, -2/\sqrt{6})$. Dans cette base, la matrice F' de f est diagonale, par suite, f est de la forme diagonale:

$$F' = \operatorname{diag}(-3, 3, 3); \quad f(x) = -3x_1'^2 + 3x_2'^2 + 3x_3'^2.$$

Vu que la base (e'_1, e'_2, e'_3) est orthonormée par rapport au produit scalaire introduit, le carré scalaire du vecteur (valeur de la fonction g sur le vecteur) s'y exprime sous la forme canonique

$$g(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Il reste à écrire avec e'_1, e'_2, e'_3 la matrice de passage

$$S = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{Vmatrix},$$

et d'après cette dernière les formules de changement des coordonnées

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3; \quad x_2 = \sqrt{3}\, x'_1;$$
$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} x'_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3.$$

Attirons l'attention du lecteur sur la non-unicité de la base recherchée, fait apparaissant déjà au cours de la résolution (comp. avec la réponse).

2e p r o c é d é. Donnons sa description abrégée. On constate tout d'abord que la forme g est définie positive et on introduit le produit scalaire à l'aide de g. Ensuite, on trouve une base dans laquelle g est de la forme canonique. On y parvient par la méthode de décomposition en carrés ou par les transformations élémentaires. La nouvelle base e' est orthonormée pour le produit scalaire introduit. Soit S_1 la matrice de passage à la base e'. On calcule la matrice F' associée à la forme f dans la base e'. Vu que la base e' est orthonormée, la transformation φ associée à f dans cette base a la même matrice F'. On trouve les valeurs propres et la base orthonormée e'' de vecteurs propres de φ d'après sa matrice F' en utilisant le procédé habituel fourni par les équations (1) et (2) du § 24. Soit S_2 la matrice orthogonale de passage de la base e' à la base e'' (elle est formée par les coordonnées des vecteurs e''_1, e''_2 et e''_3 dans la base e'). La matrice de la transformation φ dans la base e'' est égale à la matrice de la forme f; elle est diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de φ; la forme g exprime toujours le carré scalaire du vecteur dans la base orthonormée et, par suite, est égale à la somme des carrés des coordonnées du vecteur. La matrice S de passage de la base e à la base e'' se définit par la formule $S = S_1 S_2$. En effet, $e'' = e'S_2$ et $e' = eS_1$ entraînent $e'' = eS_1S_2$. Les colonnes de la matrice S contiennent les coordonnées des vecteurs e''_1, e''_2 et e''_3 par rapport à la base initiale e.

36.7. Exprimons les anciennes composantes du tenseur en fonction des nouvelles. A cette fin multiplions les deux membres de l'égalité $a'_{ij} = \sigma^k_i\sigma^l_j a_{kl}$ par $\tau^i_p\tau^j_q$ et sommons sur i et j. On obtient

$$\tau^i_p\tau^j_q a'_{ij} = \tau^i_p\tau^j_q\sigma^k_i\sigma^l_j a_{kl} = \delta^k_p\delta^l_q a_{kl} = a_{pq}.$$

Donc, $a_{pq} = \tau^i_p\tau^j_q a'_{ij}$. Ces égalités peuvent être écrites sous la forme matricielle.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau^1_1\tau^1_1 & \tau^1_1\tau^2_1 & \tau^2_1\tau^1_1 & \tau^2_1\tau^2_1 \\ \tau^1_1\tau^1_2 & \tau^1_1\tau^2_2 & \tau^2_1\tau^1_2 & \tau^2_1\tau^2_2 \\ \tau^1_2\tau^1_1 & \tau^1_2\tau^2_1 & \tau^2_2\tau^1_1 & \tau^2_2\tau^2_1 \\ \tau^1_2\tau^1_2 & \tau^1_2\tau^2_2 & \tau^2_2\tau^1_2 & \tau^2_2\tau^2_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{21} \\ a'_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (25)$$

Rappelons-nous maintenant que dans un espace vectoriel arbitraire (et, par suite, dans l'espace des tenseurs de type (0, 2)) les anciennes composantes du vecteur s'expriment en fonction des nouvelles par la formule $\xi = S\xi'$. Cela signifie que la matrice des produits $\tau^i_p\tau^j_q$ dans la formule (25) est justement la matrice de passage recherchée. On vérifie aisément qu'elle est égale à ${}^tT \otimes {}^tT$.

37.15. En se servant du résultat obtenu dans le problème 37.7, 1), on obtient les composantes du tenseur associé au produit $\varphi\varphi^*$:

$$c_{sk} = g_{ms}a^m_l\, g^{lj}g_{ik}a^i_j = a_{s\cdot}^{\cdot j}a_{kj}^{\cdot\cdot}.$$

Si l'on introduit les notations $b_{kj} = g_{ik}a^i_j = a_{kj}^{\cdot\cdot}$, il vient

$$c_{sk} = g^{lj}b_{sl}b_{kj}, \quad c_{ks} = g^{lj}b_{kl}b_{sj}.$$

En utilisant la symétrie du tenseur g^{lj}, on est en mesure de vérifier que les expressions de c_{ks} et c_{sk} ne diffèrent que par la notation des indices de sommation et par l'ordre des facteurs numériques.

RÉPONSES ET CONSEILS

1.4. (−12, −1), (0, 0). **1.5.** $\alpha=2/7$, $\beta=13/7$. **1.6.** $\mathbf{c}(1/16, 11/16)$. $\mathbf{d}(0, -2)$. **1.7.** (0, 0, 0), (1, −7, −3). **1.8.** $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-4$. **1.9.** $\mathbf{l}(1, 1, 1)$, $\mathbf{m}(0, 2, 0)$, $\mathbf{n}(0, 1, 1)$. **1.10.** 1) oui; $\mathbf{l}+\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{0}$; 2) non; 3) oui; $2\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{n}=\mathbf{0}$. **1.11.** $\beta:\alpha$. **1.12.** $\overrightarrow{BD}(-1, 1)$, $\overrightarrow{CO}(-1/2, -1/2)$, $\overrightarrow{KD}(-1, 1/2)$. **1.13.** $\overrightarrow{AM}(1/2, 0)$, $\overrightarrow{AO}(1/3, 1/3)$, $\overrightarrow{MO}(-1/6, 1/3)$. **1.14.** $\overrightarrow{AB}(3/5, -2/5)$, $\overrightarrow{BC}(2/5, 2/5)$, $\overrightarrow{CD}(-2/5, 3/5)$, $\overrightarrow{DA}(-3/5, -3/5)$. **1.16.** $\overrightarrow{BC}(1, 1)$, $\overrightarrow{CD}(0, 1)$, $\overrightarrow{DE}(-1, 0)$, $\overrightarrow{EF}(-1, -1)$, $\overrightarrow{BD}(1, 2)$, $\overrightarrow{CF}(-2, 0)$, $\overrightarrow{CE}(-1, 1)$. **1.17.** 1) $\overrightarrow{AB}(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BC}(0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$; 2) $\overrightarrow{KL}(-1/2, 1/2, 0)$, $\overrightarrow{PQ}(-1/2, 1/2, 0)$, $\overrightarrow{NC}(1/2, 1/2, -1)$, $\overrightarrow{MP}(1/2, 0, 0)$, $\overrightarrow{KQ}(-1/2, 1/2, 1/2)$; 3) $\overrightarrow{OS}(1/3, 1/3, 1/3)$, $\overrightarrow{KS}(-1/6, 1/3, 1/3)$. **1.18.** 1) $\overrightarrow{OM}\left(\frac{n}{m+n}, \frac{m}{m+n}\right)$; 2) $\overrightarrow{ON}\left(\frac{n}{n-m}, \frac{m}{m-n}\right)$. **1.19.** $\left(\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}; \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\right)$.
1.20. $A(0, 0)$, $B(2/3, -1/3)$, $C(1, 0)$, $D(2/3, 2/3)$, $E(0, 1)$, $F(-1/3, 2/3)$, $O(1/3, 1/3)$; O est le centre de l'hexagone. **1.21.** $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1/4, 1)$, $D(1, 0)$, $M(1/5, 4/5)$, $S(0, 4/3)$. **1.22.** $C(1, 1, 0)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $K(1/2, 0, 1)$, $L(1, 1, 1/2)$, $M(1/2, 1/2, 1)$, $N(1/2, 0, 1/2)$, $O(1/2, 1/2, 1/2)$.
1.23. $D(x_1-x_2+x_3, y_1-y_2+y_3)$. **1.24.** 1) $M\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}, \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$; 2) $N\left(\frac{nx_1-mx_2}{n-m}, \frac{ny_1-my_2}{n-m}, \frac{nz_1-mz_2}{n-m}\right)$. C o n s e i l : se servir du problème 1.18. **1.25.** 1) (−3, 16); 2) (9, −20). **1.26.** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$. **1.27.** $\mathbf{r}_C=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{B_1}=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{D_1}=\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{C_1}=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4-2\mathbf{r}_1$. **1.28.** $\mathbf{r}_D=\mathbf{r}_1+\frac{m}{n}(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_M=\frac{n}{m+n}\mathbf{r}_1+\frac{m}{m+n}\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_S=\frac{n}{n-m}\mathbf{r}_1+\frac{m}{m-n}\mathbf{r}_2$.
1.30. $\frac{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\,\mathbf{r}_3+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|\,\mathbf{r}_1+|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|\,\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|+|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|+|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|}$. **1.31.** O est le point d'in-

tersection des médianes du triangle; en dehors du plan du triangle ces points n'existent pas. 1.32. $\frac{m_1\mathbf{r}_1+\ldots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+\ldots+m_n}$. 1.33. $\left(\frac{a^2}{2(a+b)}, \frac{b^2}{2(a+b)}\right)$. 1.34. $\left(\frac{22}{9}, \frac{23}{9}\right)$. 1.37. $|BO|:|ON|=\frac{(m_2+n_2)n_1}{m_1n_2}$, $|CO|:|OM|=\frac{(m_1+n_1)n_2}{n_1m_2}$. 1.39. $|DM|:|MK|=3:2$, $|BM|:|ML|=16:9$. 1.40. $\frac{m+n}{2}$. 1.41. Conseil: se servir du problème 1.15. 1.42. $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}S$. 1.45. 1 : 3. 1.46. 2 : 3.

2.1. 1) $3/\sqrt{2}$; 2) -21; 3) 0; 4) 5; 5) -6. 2.2. 1) 6; 2) 38. 2.3. 1) 3; 2) -1; 3) 0. 2.4. 1) 0; 2) Arc cos (4/5); 3) 90°; 4) Arc cos $(-3/\sqrt{10})$; 5) 180°. 2.5. 1) 10; 2) 5; 3) 0. 2.6. 1) 22; 2) -1; 3) 0. 2.7. 1) Arc cos (5/9); 2) 180°; 3) 0; 4) 90°; 5) Arc cos $(-1/3)$. 2.8. 1) $5\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 3. 2.9. 1) $(-28, -14)$; 2) -13; 3) 77. 2.10. 1) $(-25, -20, 5)$; 2) 11; 3) -28. 2.12. Non. 2.13. $-3/2$. 2.14. 1) 0; 2) -4; 3) 2. 2.15. 1) $\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b}, \mathbf{c})}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2(\mathbf{b}, \mathbf{c})}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b}, \mathbf{c})^2}$.

2.16. $\left(\frac{|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b}, \mathbf{c})}, \frac{|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b}, \mathbf{c})}\right)$. 2.18. 1) $|AB|=|\mathbf{b}|$, $|BC|=\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b}, \mathbf{c})}$, $|AD|=3|BC|$, $|CD|=\sqrt{9|\mathbf{b}|^2+4|\mathbf{c}|^2-12(\mathbf{b}, \mathbf{c})}$, $\cos\hat{A}=\frac{(\mathbf{b}, \mathbf{c})-|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|\cdot|BC|}$, $\hat{B}=180°-\hat{A}$, $\cos\hat{D}=\frac{2|\mathbf{c}|^2+3|\mathbf{b}|^2-5(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|BC|\cdot|CD|}$, $\hat{C}=180°-\hat{D}$; 2) $|SM|=\frac{3}{4}\sqrt{4|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-4(\mathbf{b}, \mathbf{c})}$.

2.19. Les longueurs des diagonales sont $5\sqrt{2}$ et $\sqrt{10}$, l'angle aigu est égal à 45°. 2.20. $|AB|=6$, $|AC|=4\sqrt{3}$, $|BC|=2\sqrt{3}$, $\hat{A}=30°$, $\hat{B}=90°$, $\hat{C}=60°$. 2.21. Les longueurs des côtés sont 3 et 5, l'angle aigu vaut Arc cos (4/5). 2.22. $\sqrt{94}$. 2.23. $\frac{1}{15}(10, -11, -2)$. 2.24. $\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 2.25. $\frac{3}{2}\mathbf{a}$. 2.26. 1) $(-1, -1)$ et $(2, -2)$; 2) $(0, 0)$ et $(1, -1)$; 3) $(3, 3)$ et $(0, 0)$; 4) $(-2, -2)$ et $(0, 0)$. 2.27. 1) $(2, -2, 4)$ et $(0, 0, 0)$; 2) $\frac{2}{3}(1, -1, 2)$ et $\frac{1}{3}(1, 5, 2)$; 3) $(0, 0, 0)$ et $(4, 0, -2)$. 2.28. $(5, 2)$. 2.29. $(1, -1, 3)$. 2.30. $\mathbf{x}=\frac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. Conseil: chercher le vecteur $\mathbf{x}$ sous la forme $\lambda\mathbf{a}$. 2.31. 1) L'ensemble des extrémités des vecteurs $\mathbf{x}$ vérifiant l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$ est une droite (tous les vecteurs sont issus d'un point arbitraire O). Le vecteur normal à cette droite est le vecteur $\mathbf{a}$. La projection du point O sur la droite est l'extrémité du vecteur $\mathbf{x}_0=\frac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 2) L'ensemble des extrémités des vecteurs $\mathbf{x}$ vérifiant l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$ est un plan (tous les vecteurs sont issus d'un point arbitraire O). Le vecteur normal à ce plan est le vecteur $\mathbf{a}$. La projection du point O sur le plan est l'extrémité du vecteur $\mathbf{x}_0=\frac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 2.32. 1) Le rayon vecteur du point

d'intersection de deux droites (voir problème 2.31). 2) Le rayon vecteur du point commun de trois plans (voir problème 2.31). **2.33.** Deux solutions: $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, -3)$. **2.34.** Deux solutions: $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ et $\frac{1}{7\sqrt{2}}(5, -3, -8)$. **2.35.** L'angle au sommet est $\operatorname{Arc}\cos\frac{4}{5}$. **2.36.** L'angle aigu est égal à $\operatorname{Arc}\cos\frac{m^2-n^2}{\sqrt{m^4+n^4-2m^2n^2\cos 2\alpha}}$. **2.37.** 90°. **2.38.** 1) $\sqrt{m^2+n^2-mn} : \sqrt{mn}$; 2) $\sqrt{m} : \sqrt{n}$; 3) $\operatorname{Arc}\cos\frac{m-n}{\sqrt{m^2+n^2-mn}}$. **2.40.** $|AC_1|^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta$. **2.42.** Arc cos (1/18). **2.43.** $\frac{\sqrt{29}}{3}a$. **2.44.** $|EM|:|MF| = |CN|:|ND| = 3:1$. **2.45.** $6\sqrt{3}$.

3.1. 1) (11, 19, −7); 2) (0, 0, 0); 3) (0, 0, −15). **3.2.** 1) $2[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$; 2) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+4[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+\frac{9}{2}[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$. **3.4.** $\lambda=\pm\sqrt{3}$. **3.5.** 1) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]=\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]=\mathbf{e}_2$; 2) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]=-\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]=-\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]=-\mathbf{e}_2$; 3) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]=\frac{|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}_3|}\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]=\frac{|\mathbf{e}_2|\cdot|\mathbf{e}_3|}{|\mathbf{e}_1|}\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]=\frac{|\mathbf{e}_3|\cdot|\mathbf{e}_1|}{|\mathbf{e}_2|}\mathbf{e}_2$. **3.6.** Soit les vecteurs **a**, **b**, **c** sont tous nuls, soit ils engendrent une base orthonormée (le triplet des vecteurs de base **a**, **b**, **c** est direct). **3.7.** Problème 2.33: une solution unique $\frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 2, 3)$; problème 2.34: une solution unique $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. **3.8.** 1) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{\frac{3}{14}}$, $\frac{5}{\sqrt{2}}$, $5\sqrt{\frac{3}{14}}$. **3.9.** 18. **3.14.** $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, où θ est le dièdre formé par les angles plans β, γ. Les autres dièdres se déterminent d'après les formules analogues. C o n s e i l: utiliser dans les calculs la formule du problème 3.13, 3). **3.15.** $\mathbf{x}=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$. C o n s e i l: chercher le vecteur **x** sous la forme $\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. **3.16.** L'ensemble des extrémités des vecteurs **x** vérifiant l'équation $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ est une droite (tous les vecteurs sont issus d'un point arbitraire O). Le vecteur directeur de cette droite est le vecteur **a**. La projection du point O sur la droite est l'extrémité du vecteur $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]/|\mathbf{a}|^2$. **3.17.** $\mathbf{d} = \pm\mathbf{f}/|\mathbf{f}|$, $\mathbf{f} = |\mathbf{a}|[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + |\mathbf{b}|[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + |\mathbf{c}|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 1) le signe plus correspond au triplet direct des vecteurs **a**, **b**, **c**, le signe moins, au triplet rétrograde; 2) le signe plus correspond au triplet rétrograde des vecteurs **a**, **b**, **c**, le signe moins, au triplet direct. **3.18.** $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$. **3.19.** 1) 0; 2) −23; 3) 0; 4) 6. **3.20.** 1) oui; 2) non. **3.21.** $\lambda = 3$, $\lambda = -4$. **3.22.** 1) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|/2$; 2) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|/6$. **3.23.** 1) 1/3; 2) $1/\sqrt{30}$. **3.24.** $10\sqrt{2}$. **3.25.** L'ensemble des extrémités des vecteurs **x** vérifiant l'équation $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b})=p$ est un plan (tous les vecteurs sont issus d'un point arbitraire O). Ce plan est parallèle aux vecteurs **a** et **b**. La projection du point O sur le plan est l'extrémité du vecteur $\mathbf{x}_0=\frac{p}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; ce vecteur est une solution particulière de l'équation donnée. C o n s e i l: se servir du résultat obtenu dans le problème 2.30.

3.26. Conseils: 2) utiliser la formule du produit vectoriel double (problème 3.13, 2)) ; 3) et 4) utiliser la formule du problème 3.26, 2) ; 5) poser $\mathbf{d}=[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ dans la formule du problème 3.26, 3), pour le calcul des produits mixtes utiliser la formule du problème 3.13, 3). 3.28. 2) $\mathbf{b}_1=\frac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{b}_2=\frac{[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{b}_3=\frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$. 3.29. $\mathbf{b}_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{b}_2\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b}_3\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, -\frac{1}{4}\right)$. 3.30 $\mathbf{x}=\frac{p[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+q[\mathbf{c}, \mathbf{a}]+s[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$. 3.31. $\frac{3}{\sqrt{43}}a$. 3.33. 2 : 1 ou 1 : 2 (deux solutions). 3.34. h^2. 3.35. $\frac{2}{15}S$ ou $\frac{1}{15}S$. 3.36. $2\sqrt{2}a$. 3.38. $\sqrt{2\left[S_1+S_2+d^2+\left(\frac{S_1-S_2}{2d}\right)^2\right]}$.

4.1. 1) $\alpha_1=-\alpha_1'+2\alpha_2', \alpha_2=3\alpha_1'-7\alpha_2'$; 2) $\alpha_1'=-7\alpha_1-2\alpha_2$, $\alpha_2'=-3\alpha_1-\alpha_2$; 3) $\mathbf{e}_1(-7, -3)$, $\mathbf{e}_2(-2, -1)$. 4.2. 1) $\alpha_1=\alpha_1'-\alpha_2'+\alpha_3'$, $\alpha_2=\alpha_1'-2\alpha_2'+3\alpha_3'$, $\alpha_3=\alpha_1'-3\alpha_2'+6\alpha_3'$; 2) $\alpha_1'=3\alpha-3\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_2'=3\alpha_1-5\alpha_2+2\alpha_3$, $\alpha_3'=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$; 3) $\mathbf{e}_1(3, 3, 1)$, $\mathbf{e}_2(-3, -5, -2)$, $\mathbf{e}_3(1, 2, 1)$. 4.3. 1) $x=2x'+y'-1$, $y=3x'+y'+3$; 2) $x'=-x+y-4$, $y'=3x-2y+9$; 3) $O(-4, 9)$, $\mathbf{e}_1(-1, 3)$, $\mathbf{e}_2(1, -2)$. 4.4. 1) $x=4x'+5y'+3z'+1$, $y=2x'+3y'+2z'+1$, $z=x'+2y'+z'+2$; 2) $x'=x-y-z+2$, $y'=-y+2z-3$, $z'=-x+3y-2z+2$; 3) $O(2, -3, 2)$, $\mathbf{e}_1(1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_2(-1, -1, 3)$, $\mathbf{e}_3(-1, 2, -2)$. 4.5. 1) $x'=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{7}{5}$, $y'=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y+\frac{11}{5}$; 2) $O\left(\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)$, $\mathbf{e}_1\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$; 3) $O'(5, 2)$, $\mathbf{e}_1'(2, 3)$, $\mathbf{e}_2'(-1, 1)$. 4.6. 1) $x'=x-y+z+6$, $y'=-x+y-2z-8$, $z'=x+z+3$; 2) $O(6, -8, 3)$, $\mathbf{e}_1(1, -1, 1)$, $\mathbf{e}_2(-1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3(1, -2, 1)$; 3) $O'(-1, 3, -2)$, $\mathbf{e}_1'(1, -1, -1)$, $\mathbf{e}_2'(1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3'(1, 1, 0)$. 4.7. $\alpha_1=-7\alpha_1'-17\alpha_2'$, $\alpha_2=5\alpha_1'+12\alpha_2'$. 4.8. $\alpha_1=-\frac{3}{2}\alpha_1'+\frac{1}{2}\alpha_2'+4\alpha_3'$, $\alpha_2=\frac{19}{2}\alpha_1'-\frac{1}{2}\alpha_2'-18\alpha_3'$, $\alpha_3=5\alpha_1'-9\alpha''$. 4.9. $x=\frac{1}{3}x'+2y'+\frac{7}{9}$, $y=-\frac{2}{3}x'-2y'-\frac{2}{9}$. 4.10. $x=4x'+3y'+6z'$, $y=-8x'-3y'-13z'-1$, $z=13x'+4y'+23z'+1$. 4.11. $=x\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}$. 4.12. $x=\frac{1}{3}x'-y'+1$, $y=\frac{2}{7}x'+y'$. 4.13. $x=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x'+y'+\frac{1}{3}$. 4.14. $x=x'+\frac{3}{5}y'$, $y=-3x'-\frac{13}{5}y'+3$. 4.15. $x=-x'-y'+2$, $y=-x'+y'+1$. 4.16. $x=-\frac{3}{5}x'+\frac{2}{5}y'+\frac{3}{5}$, $y=-\frac{2}{5}x'-\frac{2}{5}y'+\frac{2}{5}$. 4.17. $x=-x'-2y'+2$, $y=-2x'-y'+2$. 4.18. $x=-2x'-2y'-z'+2$, $y=y'+z'$, $z=z'$. 4.19. $x=2x'+y'+\frac{1}{3}z'-1$, $y=y'+\frac{1}{3}z'$, $z=-x'-y'+1$. 4.20. $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-$

$-\frac{1}{3}z'+\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'+\frac{1}{3}$, $z=-\frac{1}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{1}{3}z'+\frac{1}{3}$. **4.21.** $x=2x'+2y'+z'$, $y=x'+2y'+z'$, $z=-x'-y'-z'+1$. **4.22.** $x=-z'+1$, $y=y'+2z'-1$, $z=-x'-y'-3z'+2$. **4.23.** $a_{11}^2+a_{21}^2=1$, $a_{12}^2+a_{22}^2=1$, $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$. **4.24.** 1) $a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1$, $a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1$, $a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1$, $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0$, $a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0$, $a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0$;
2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0$. **4.25.** 1) $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi+x_0$, $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+y_0$; 2) $x'=(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi$, $y'=(y-y_0)\cos\varphi-(x-x_0)\sin\varphi$; 3) $O(-x_0\cos\varphi-y_0\sin\varphi,\ x_0\sin\varphi-y_0\cos\varphi)$. **4.26.** 1) $x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'+1$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'+3$; 2) $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+1$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+3$; 3) $x=-y'+1$, $y=x'+3$; 4) $x=-x'+1$, $y=-y'+3$. **4.27.** 1) $x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+x_0$, $y=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi+y_0$; 2) $x'=(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\sin\varphi$, $y'=(x-x_0)\sin\varphi-(y-y_0)\cos\varphi$; 3) $O(-x_0\cos\varphi-y_0\sin\varphi,\ -x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi)$. **4.28.** $x=-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'+\frac{48}{25}$, $y=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'+\frac{36}{25}$. **4.29.** $x=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'-1$, $y=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'+3$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'+5$. **4.30.** $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'+\frac{2}{3}$.

5.1. 1) $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ ne sont pas colinéaires; 2) $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont colinéaires, $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ ne le sont pas; 3) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ sont colinéaires. **5.2.** 1) $\operatorname{Arc}\cos\frac{|(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|}$; 2) $\operatorname{Arc}\cos\frac{|(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)|}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}$. **5.3.** $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0,\mathbf{n})}{(\mathbf{a},\mathbf{n})}\mathbf{a}$. **5.4.** 1) $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0,\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$; 2) $\mathbf{r}_0+2\frac{D-(\mathbf{r}_0,\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. **5.5.** 1) $\frac{|(\mathbf{r}_0,\mathbf{n})-D|}{|\mathbf{n}|}$; 2) $\frac{|[\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1,\mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$.
5.6. 1) $(1, k)$; 2) $(-B, A)$. **5.7.** 1) $2x-3y+5=0$; 2) $x=4t$, $y=1+3t$, c'est-à-dire $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$. **5.8.** 1) $x-2y+11=0$; 2) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$; 3) $x=-3$; 4) $y=4$; 5) $x=-3+t$, $y=4-7t$. **5.9.** 1) $x-4y+7=0$; 2) $2x-y+2=0$; 3) $x=2$; 4) $y=-3$. **5.10.** Les droites se coupent au point $(5/7, -3/7)$; 2) coïncident; 3) sont parallèles; 4) se coupent au point $(5, -1)$. **5.11.** 1) $a\neq\pm2$; 2) $a=-2$; 3) $a=2$. **5.12.** $a=1$, $a=-1$, $a=-2$. **5.14.** $y=\frac{x}{2}$, $y=\frac{x}{2}+1$, $y=-1$, $y=5$. **5.15.** $(-4, 3)$; $5x+2y-13=0$; $x-5y+19=0$; $4x+7y-5=0$. **5.16.** $43x+12y-67=0$. *Conseil*: la droite recherchée est la petite diagonale du parallélogramme dont les côtés sont situés sur les droites données et dont le centre est au point A. **5.17.** $10x+11y-21=0$; $4x+5y-9=0$; $2x+y-15=0$. **5.18.** Deux droites: $4x-y+9=0$, $2x+3y-13=0$. **5.19.** Trois droites: $x-3y+7=0$,

$3x+4y-18=0$, $2x+7y-12=0$. 5.20. 5 : 18. 5.21. 1) $(-k, 1)$; 2) (A, B). 5.22. 1) $2x+y+2=0$; 2) $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-4}{2}$; 3) $y=4$; 4) $x=-3$; 5) $x=-3+7t$, $y=4+t$. 5.23. $5x-y-17=0$, $5x-y+9=0$, $x+5y-19=0$, $x+5y+7=0$. 5.24. $x-y\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1=0$, $x-y\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=0$, $x+y\sqrt{3}-3\sqrt{3}-1=0$, $x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=0$. 5.25. (3, 11). 5.26. 1) $\sqrt{13}$; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 6; 6) 11. 5.27. $|C_2-C_1|/\sqrt{A^2+B^2}$. 5.28. $2x-y-14=0$, $2x-y+6=0$. 5.29. (7, 6) ou (−3, −2/3). 5.30. (3, 5) ou (−37, 45). 5.31. Un couple de droites: $A_1x+B_1y+C_1=\pm\lambda(A_2x+B_2y+C)$, où $\lambda=k\sqrt{(A_1^2+B_1^2)/(A_2^2+B_2^2)}$. 5.32. 1) (−2, 3); 2) (−5, 4). 5.33. $x-3y+7=0$. 5.34. $5x-10y-11=0$. 5.35. $x=5$. 5.36. (7, −5); $2x-3y+11=0$; $2x+y-9=0$; $x+y-2=0$. 5.37. $3x+4y-11=0$, $3x+4y+1=0$, $63x+59y-205=0$. 5.38. $x+y-4=0$, $x+y=0$, $y=5$, $x=3$. 5.39. 1) Arc cos $(1/\sqrt{10})$; 2) Arc cos $(2/\sqrt{5})$; 3) 90°; 4) 0; 5) Arc cos $(4/\sqrt{65})$. 5.40. Deux droites: $2x+y-7=0$, $x-2y-1=0$. 5.41. $x=2+y(2+\sqrt{3})$, $x=2+y(2-\sqrt{3})$. 5.42. $2x-11y+16=0$ ou $2x-11y+6=0$. 5.43. (3, 12). 5.44. $3x-y+17=0$. 5.45. $x+3y+9=0$. 5.46. $77x+21y-50=0$, $7x-56y+25=0$, $y=x$. 5.47. Le rayon du cercle inscrit est égal à 4, le rayon du cercle circonscrit vaut 325/16. Le centre du cercle inscrit a pour coordonnées (−8, −1), le centre du cercle circonscrit a pour coordonnées (−3/16, 51/4). 5.48. $6x+y-11=0$, $x+6y+4=0$, $146x+99y-641=0$. 5.49. (−3, 5). 5.50. $11x-15y+11=0$. 5.51. Deux solutions: 1) le rayon est égal à $2\sqrt{2}$, le centre a pour coordonnées (−3, 1); 2) le rayon vaut $\sqrt{2}$, le centre a pour coordonnées (−2, 4). 5.52. $x=3$, $y=-1$ ou $3x+4y-5=0$, $4x-3y-15=0$. 5.53. $(Aa_{11}+Ba_{21})x'+(Aa_{12}+Ba_{22})y'+Aa_{10}+Ba_{20}+C=0$. 5.54. $3x'-y'+3=0$. 5.55. 1) $x=-\frac{12}{11}x'-\frac{10}{11}y'+1$, $y=-\frac{4}{11}x'+\frac{15}{11}y'+1$; 2) $2x'+5y'-4=0$. 5.56. $5x'+\sqrt{3}y'-4\sqrt{3}=0$. 5.57. 1) $x=-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+1$, $y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'+3$; 2) $6x'-7y'-6\sqrt{5}=0$.

6.1. 1) $(\mathbf{r}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])=(\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$; 2) $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$; 3) $\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}+\mathbf{a}t$; 4) $[\mathbf{r}, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]]=D_2\mathbf{n}_1-D_1\mathbf{n}_2$; 5) $\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{a}, D_2\mathbf{n}_1-D_1\mathbf{n}_2]}{|\mathbf{a}|^2}+\mathbf{a}t$, $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. 6.2. 1) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]\neq 0$; 2) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=0$; si $\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_2$, on a $D_1\neq\lambda D_2$; 3) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=0$; si $\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_2$, on a $D_1=\lambda D_2$. 6.3. 1) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\neq 0$, $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)=0$; 2) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\neq 0$, $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\neq 0$; 3) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]=0$, $[\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1]\neq 0$; 4) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]=0$, $[\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1]=0$. 6.4. 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})\neq 0$; 2) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\neq D$; 3) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})=D$. 6.5. 1) $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$; 2) $\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}+\frac{D|\mathbf{a}|^2-(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})}{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$. 6.6. 1) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{n}t$; 2) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$. 6.7. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$. 6.8. 1) $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$; 2) $\mathbf{r}_0+2\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. 6.9. 1) $\mathbf{r}_1+\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 2) $2\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+2\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 6.10. 1) $(\mathbf{r}, \mathbf{n})=D$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n})=0$; 2) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$; 3) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1)=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_2)=0$; 4) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1,$

$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0$. **6.11.** 1) $\frac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}$; 2) $\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}$; 3) $\frac{|D_1-D_2|}{|\mathbf{n}|}$; 4) $\frac{|[\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$; 5) $\frac{|[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]-\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$; 6) $\frac{|[\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$; 7) $\frac{|\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{a}|}$; 8) $\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$; 9) $\frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)+(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$. **6.12.** Deux solutions : $\mathbf{r}_0 + \frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \pm \rho|\mathbf{n}|}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$. **6.14.** 1) $4x-y+3z+1=0$; 2) $x=u$, $y=v$, $z=-1-2u+3v$. **6.16.** 1) $x+3y-11=0$, $y+z-4=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{1}$; 2) $x=7+3t$, $y=11+5t$, $z=t$; $\frac{x-7}{3}=\frac{y-11}{5}=\frac{z}{1}$. **6.17.** 1) $x-3y+2z-8=0$; 2) $x=1$; 3) $y=-1$; 4) $z=2$; 5) $x=1-u+v$, $y=-1+u+2v$, $z=2+7u+3v$. **6.18.** 1) $x+y-z-3=0$, $2x+3y+z-12=0$; 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{21}$; 3) $x=1$, $y=3$; 4) $x=1$, $z=1$; 5) $y=3$, $z=1$. **6.19.** 1) $x+3y-10=0$, $2y+z-5=0$; 2) $x+y-5=0$, $z=5$; 3) $y=1$, $z=2$. **6.20.** 1) $2y-z+1=0$; 2) $6x+y-10z+25=0$; 3) $4x-12y+3z-12=0$; 4) $x=2$; 5) trois points donnés sont alignés et ne définissent pas un plan. **6.21.** Les plans se coupent suivant la droite $\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{3}{4}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{4}}{1}$; 2) coïncident; 3) sont parallèles; 4) se coupent suivant la droite $\frac{x+3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

6.22. 1) $a \neq \pm 3$; 2) $a=3$; 3) $a=-3$. **6.23.** 1) La droite appartient au plan; 2) l'intersection est au point (53, 24, 18); 3) l'intersection est au point (—3/4, 1/4, 1/2); 4) la droite appartient au plan; 5) la droite est parallèle au plan. **6.24.** 1) $a \neq \pm 1/2$; 2) $a=-1/2$; 3) $a=1/2$. **6.25.** Les droites se coupent au point (—3, 0, 4) et appartiennent au plan $2x-y+6z-18=0$; 2) sont non coplanaires; 3) sont parallèles et appartiennent au plan $5x-22y+19z+9=0$, 4) coïncident; 5) se coupent au point (—3, 5, —5) et appartiennent au plan $9x+10y-7z-58=0$. **6.26.** 1) $a=3$; 2) $a \neq \pm 1$, $a \neq 3$; 3) $a=-1$; 4) $a=1$. **6.27.** 1) Les plans ont un seul point commun (1, 1, 1); 2) les plans n'ont pas de points communs: sont parallèles deux à deux; 3) les plans coïncident (l'ensemble des points communs est le plan $x+2y-z-1=0$); 4) les plans forment un prisme (l'intersection de chaque couple de plans est une droite, trois droites d'intersection sont parallèles deux à deux); il n'existe aucun point appartenant aux trois plans; 5) les plans se coupent suivant la droite commune $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-5}{-6}$. **6.28.** $39x+27y-11z-120=0$. **6.29.** $4x+y-8z+6=0$. **6.30.** 1) $x+7y-6z+6=0$; 2) $10x+2y-z+10=0$. **6.31.** 1) $x=0$, $y=3t$, $z=1-t$; 2) $x=0$, $y-4z+3=0$. C o n s e i l: en éliminant x des équations de la droite donnée, on obtient l'équation du plan projetant. **6.32.** 1) $x=-5-4t$, $y=-3+5t$, $z=-3+2t$. C o n s e i l : établir les équations paramétriques du plan projetant. 2) $2x+y+5z-6=0$, $x+2y-3z+2=0$. **6.33.** $x-3z+4=0$, $2x-4y+5z+9=0$, $6x+y+z+2=0$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$. **6.34.** $4x+y-3z+5=0$, $10x+y-3z+11=0$, $20x+5y+3z-29=0$, $x-2y-3z+8=0$. **6.35.** 1) $5x-6y+7z=0$, $x-3y+2z=$

$=0$; 2) $2x-y+z=0$, $25x+12y-20z=0$. **6.36.** 1) $13x-12y+11z+36=0$, $x-2y+z+4=0$; 2) $x-y-z+1=0$, $8x+14y+19z+13=0$. **6.37.** $2x-3y+5z+21=0$, $x-y-z-17=0$. **6.38.** Deux plans: $11x-13y+8z+18=0$, $20x-8y-5z-22=0$. **6.39.** Quatre plans: $x+4y+z-5=0$, $x-10y-6z+23=0$, $2x+y+2z-10=0$, $2x+y+9z-38=0$. **6.40.** Sept plans: $5x+y-7z+13=0$, $3x-y-5z+15=0$, $z-4=0$, $x+y+z-7=0$, $x-z+1=0$, $x+y-3z+5=0$, $x-2z+6=0$. **6.41.** 1) a) $P(11/3, 0, 0)$, $Q(0, 11/2, 0)$, $R(0, 0, 11/4)$, $S(-5, 13, 0)$; $(L_1): 3x+2y+4z-11=0$, $z=0$; $(L_2): 3x+2y+4z-11=0$, $y=0$; (L_3): $3x+2y+4z-11=0$, $x=0$; b) $P(7/2, 0, 0)$, $Q(0, 7, 0)$, $R(0, 0, 7/2)$, $S(-2, 7, 2)$; $(L_1): 2x+y+2z-7=0$, $z=0$; (L_2): $2x+y+2z-7=0$, $y=0$; $(L_3): 2x+y+2z-7=0$, $x=0$; c) $P(2/3, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 2)$, $S(-3, 10, 1)$; $(L_1): 3x+y+z-2=0$, $z=0$; $(L_2): 3x+y+z-2=0$, $y=0$; $(L_3): 3x+y+z-2=0$, $x=0$; 2) a) $P(-4/3, -1/3)$, $Q(1/2, 3/2)$, $R(1/2, -5/4)$, $(L_1): u-v+1=0$, $(L_2): u+2v+2=0$, $(L_3): u=1/2$; b) $P(-1/2, -3/2)$, $Q(3, 2)$, $R(-1/2, 2)$, (L_1): $u-v-1=0$, $(L_2): u=-1/2$, $(L_3): v=2$; c) $P(1/3, 1/3)$, $Q(1, 1)$, $R(-1, 1)$, (L_1): $u-v=0$, (L_2): $u+2v-1=0$, (L_3): $v=1$. **6.42.** 18: 125. **6.43.** 1) (A, B, C); 2) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, où $\mathbf{n}_i\ (a_i, b_i, c_i)$, $i=1, 2, 3$.

6.44. 1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{2}$; 2) $y=-1$, $z=2$; 3) $x=1$, $z=2$; 4) $x=1$, $y=-1$; 5) $\frac{x-1}{11}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z-2}{3}$. **6.45.** 1) $4x-3y+z+4=0$; 2) $3x+4y+21z-36=0$; 3) $z=1$; 4) $y=3$; 5) $x=1$. **6.46.** $5x-10y-3z-3=0$. **6.47.** 1) $5x-2y-z-2=0$; 2) $7x-y+4z-3=0$. **6.48.** $x-y+2z=0$, $13x+5y-4z+30=0$. **6.49.** $(1, -3, 2)$. **6.50.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 2; 4) 1/3; 5) 0; 6) 2; 7) 4; 8) 1. **6.51.** 1) 2; 2) 5; 3) 3/10. **6.52** 1) $6x-3y+2z+26=0$ et $6x-3y+2z-16=0$; 2) $x+3y-z+4\sqrt{11}=0$ et $x+3y-z-2\sqrt{11}=0$; 3) $2x+2y-z+2=0$ et $2x+2y-z-16=0$; 4) $3x+4z\pm 15=0$. **6.53.** $(1, 0, -1)$ ou $(-1, -3, -2)$. **6.54.** $(0, 0, 1)$ ou $(-6/97, -18/97, 127/97)$. **6.55.** $2x-2y-z-2=0$, $x+2y-2z+5=0$, $2x+y+2z-5=0$, $2x-2y-z-11=0$, $x+2y-2z+14=0$, $2x+y+2z-14=0$. **6.56.** $x\sqrt{2}+z-3\sqrt{2}=0$, $x\sqrt{2}-z+3\sqrt{2}=0$, $y\sqrt{2}\pm z=0$. **6.57.** 1) $(3, -1, 0)$, $(3, -1, -1)$, $(3, 0, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$, $(-3, -1, 1)$; 2) $(2, -3, -1)$, $(1, -5, -3)$; 3) $(1, -4, -5)$, $(-1, -7, -11)$. **6.58.** $\frac{x+5}{-11}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-4}{8}$. **6.59.** 1) $x+5y-z-25=0$, $17x-7y-18z+35=0$; 2) $x+5y-z-25=0$, $7x-y+2z+8=0$; 3) un point unique $(0, 5, 0)$.

6.60. 1) Arc cos $(\sqrt{6}/3)$; 2) Arc cos $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 3) Arc cos $\frac{2}{3}$; 4) 90°; 5) 90°; 6) 0.

6.61. 1) Arc cos $\frac{\sqrt{3}}{5}$; 2) 90°; 3) 0. **6.62.** 1) Arc sin $(11/9\sqrt{6})$; 2) Arc sin (62/63); 3) 90°; 4) 0. **6.63.** 1) $y=3$, $z=2$ ou $x=1$, $z=2$; 2) $2x-y+1=0$, $z=2$ ou $x-2y+5=0$, $z=2$. **6.64.** $2x+y+z-1=0$ ou $14x+13y-11z-1=0$. **6.65.** $x-z+4=0$ ou $x+20y+7z-12=0$.

6.66. 1) $\frac{x}{7}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-10}=\frac{z-2}{-13}$; 2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$; 3) $\frac{x-3}{7-2\sqrt{3}}=\frac{y-5}{7-3\sqrt{3}}=\frac{z-5}{-7+6\sqrt{3}}$, $\frac{x-3}{7+2\sqrt{3}}=$

$=\frac{y-5}{7+3\sqrt{3}}=\frac{z-5}{-7-6\sqrt{3}}$. 6.67. 90°, 45°, 45°; $4x+3y-24=0$. 6.68. 1) 3, (4, −3, 1), (6, −5, 2), $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$; 2) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$, $\left(\frac{31}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right)$, $\left(\frac{44}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{32}{9}\right)$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-16}$; 3) $3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\left(\frac{3}{7}, -\frac{15}{7}, -\frac{2}{7}\right)$, $\left(-\frac{8}{7}, -\frac{23}{7}, -\frac{4}{7}\right)$, $\frac{x-2}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z}{2}$.
6.69. (3, 0, 0) ou (2, −1, 2). 6.70. 1) $\sqrt{26/7}$; 2) $\sqrt{62}$; 3) $1/\sqrt{59}$. 6.71. 1) $5x+4y-z-24=0$, $4x-y+2z-43=0$; (5, 3, 13) et (6, 1, 10); $\sqrt{14}$; 2) $2x-5y+8z-9=0$, $x-z+8=0$; (−4, 3, 4) et (−1, 9, 7); $3\sqrt{6}$; 3) $3x-2y-z-6=0$, $5x+34y-11z-38=0$; (7, 3, 9) et (3, 1, 1); $2\sqrt{21}$.
6.72. 1) $1/\sqrt{2}$; 2) $\frac{24}{11}\sqrt{2}$; 3) $\frac{8}{3\sqrt{41}}$; 4) Arc cos $(3\sqrt{2}/10)$; 5) Arc sin (1/10).
6.73. 1) $2/\sqrt{3}$; 2) $1/\sqrt{6}$; 3) le segment AC_1 est partagé dans le rapport 2 : 1 le segment CD_1 l'est dans le rapport 1 : 1. 6.74. 1) $\frac{30}{\sqrt{65}}$; 2) $\frac{15}{13}\sqrt{29}$; 3) $\frac{9}{11}\sqrt{65}$; 4) 6; 5) Arc cos $\frac{118}{143}$; 6) Arc cos $\frac{3}{13}$; 7) Arc sin $\frac{15}{19\sqrt{10}}$. 6.75. 1) L'expression $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\cdot(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)\cdot(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)$ est strictement négative; 2) la même expression est strictement positive.
6.76. $3y-4z=0$ ou $4y-3z=0$. 6.77. $x+y+2z+5=0$, $x-2y+z-9=0$. 6.78. $8x+5y-z-25=0$. 6.79. $2x-5y-9z-25=0$. 6.80. 1) $x-10y+13z-18=0$; 2) $x-10y+13z-18=0$, $3x+2z-3=0$. 6.81. Le rayon de la sphère inscrite vaut 1, le rayon de la sphère circonscrite vaut $\frac{3}{2}\sqrt{14}$. Le centre de la sphère inscrite possède les coordonnées (2, 3, 4), le centre de la sphère circonscrite a les coordonnées (5/2, 5, 15/2).
6.82. Deux solutions: 1) le rayon est égal à $\sqrt{2}$, le centre possède les coordonnées (0, 2, 1); 2) le rayon est égal à $\sqrt{2}/3$, le centre possède les coordonnées (0, 2/3, 1/3). 6.83. Le rayon du cercle inscrit vaut $\sqrt{2}$, le rayon du cercle circonscrit, $\frac{27}{8}\sqrt{2}$. Le centre du cercle inscrit possède les coordonnées (2, 18/5, −4/5), le centre du cercle circonscrit possède les coordonnées (31/8, 6/5, −29/40). 6.84. Le rayon du cylindre inscrit est égal à 1/3, le rayon du cylindre circonscrit vaut $\frac{5}{6}$. L'axe du cylindre inscrit est défini par les équations $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$, l'axe du cylindre circonscrit l'est par les équations $\frac{x-8/9}{-2}=\frac{y-11/9}{1}=\frac{z-5/18}{2}$. 6.85. $\frac{9}{50}a^3$. 6.86. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 6.87. $\frac{27\sqrt{3}}{4}a^3$. 6.88. $(Aa_{11}+Ba_{21}+Ca_{31})x'+(Aa_{12}+Ba_{22}+Ca_{32})y'+(Aa_{13}+Ba_{23}+Ca_{33})z'+Aa_{10}+Ba_{20}+Ca_{30}+D=0$. 6.89. $y'+14z'-3=0$. 6.90. 1) $x=-x'+6y'-4z'+1$, $y=6x'-33y'+28z'-1$, $z=4x'-24y'+20z'+1$; 2) $\frac{x'+1}{72}=\frac{y'+2/9}{4}=\frac{z'}{-9}$. 6.91. 1) $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+1$, $y=$

$=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+1$, $z=-z'-1$; 2) $4x'+y'-z'+4\sqrt{2}=0$. **6.92.** 1) $x=$ $=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'-1$, $y=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'$, $z=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-$ $-\frac{1}{3}z'+1$; 2) $\frac{x'}{2}=\frac{y'+3}{-7}=\frac{z'}{1}$ et $\frac{x'-1}{1}=\frac{y'}{-5}=\frac{z'-1}{-1}$; Arc cos $(2\sqrt{2/3})$; $\sqrt{2}$.

7.1. 1) 2; (0, −2); 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (−2,5, 2,5); 3) 11/4; (3, −1/4); 4) 9/14; (1/7, 1/2). **7.2.** $A=B\neq 0$, $C^2+D^2>AE$. Le rayon est égal à $\sqrt{C^2+D^2-AE}/|A|$, les coordonnées du centre sont $(-C/A, -D/A)$ **7.3.** $(x-2)^2+(y-2)^2=10$. **7.4.** 1) $|Aa+Bb+C|>R\sqrt{A^2+B^2}$; 2) $|Aa+Bb+$ $+C|<R\sqrt{A^2+B^2}$; 3) $|Aa+Bb+C|=R\sqrt{A^2+B^2}$. **7.5.** 1) $4x-3y+15=0$; 2) $4x+3y-16=0$, $4x-3y+8=0$. **7.6.** $5x-12y+29=0$, $5x-12y-23=0$. **7.7.** 1) $x+y-9=0$; 2) $x+2y-16=0$. **7.8.** $x-5=0$, $y-2=0$, $3x-4y+$ $+5=0$, $4x+3y-20=0$. **7.11.** $\frac{k}{|1-k^2|}\cdot|AB|$. **7.12.** a, $\sqrt{a^2-\frac{1}{4}|AB|^2}$. **7.13.** a, $\sqrt{\frac{1}{4}|AB|^2-a^2}$. **7.15.** 1) Disque fermé de rayon 2 et de centre au point (0, −2); 2) extérieur du disque fermé de rayon 5 et de centre au point (−1/2, 3/2); 3) partie du disque de rayon 3/2 et de centre au point (−3/2, 0), située dans le demi-plan inférieur (sans points frontières); 4) partie du plan, comprise entre deux cercles concentriques de rayons 1 et 3 et de centre au point (1, −1) (avec les points de ces cercles); 5) intérieur de l'ellipse de demi-axes 4 et 3, dont le centre est le point (0, 0) et dont les foyers se trouvent sur l'axe Ox (avec les points de la frontière); 6) extérieur de l'ellipse de demi-axes 3 et 2, dont le centre est le point (0, 0) et dont les foyers appartiennent à l'axe Oy (sans points frontières); 7) partie du plan, comprise entre deux ellipses de centre commun (0, 0) et de foyers situés sur l'axe Ox; l'une des ellipses a pour demi-axes 9 et 3, et l'autre 3 et 1 (avec les points de la frontière); 8) intérieur de l'ellipse de demi-axes 1/2 et 1/3 et de centre au point (1/2, −1/3), dont le grand axe est parallèle à l'axe Ox (sans points frontières); cette ellipse est inscrite dans le quatrième quadrant; 9) intérieur de l'ellipse de foyers aux points (1, 0) et (−1, 0) et de demi-grand axe égal à 3 (sans points frontières); son demi-petit axe vaut $2\sqrt{2}$; 10) extérieur de l'ellipse de foyers (0, 1) et (0, −1) situés sur l'axe Oy et de demi-grand axe égal à 2 (sans points frontières); son demi-petit axe vaut $\sqrt{3}$; 11) partie du plan, comprise entre les branches de l'hyperbole de centre au point (0, 0) et de foyers situés sur l'axe Ox (avec les points de la frontière); le demi-axe focal vaut 4 et le demi-axe non focal est 3; 12) parties du plan se trouvant à droite de la branche droite et à gauche de la branche gauche de l'hyperbole de centre au point (0, 0) et de foyers situés sur l'axe Ox (avec les points de la frontière); le demi-axe focal de l'hyperbole vaut 2 et le demi-axe non focal est 3; 13) partie du plan se trouvant au-dessus de la branche supérieure et au-dessous de la branche inférieure de l'hyperbole de centre au point (0, 0) et de foyers situés sur l'axe Oy (avec les points de la frontière); le demi-axe focal de l'hyperbole est égal à 3 et son demi-axe non focal à 2; 14) partie du plan, comprise entre les quatre branches de deux hyperboles de centre commun au point (0, 0) (sans points frontières); les foyers de la première hyperbole appartiennent à l'axe Ox, le demi-axe focal vaut 2 et le demi-axe non focal est 6; les foyers de la seconde hyperbole appartiennent à l'axe Oy, son demi-axe focal est égal à 6 et le demi-axe non focal à 2; 15) extérieur du domaine compris

entre les quatre branches de deux hyperboles de centre commun (0, 0) (sans points frontières) ; les foyers de la première hyperbole appartiennent à l'axe Ox, le demi-axe focal est $1/\sqrt{3}$ et le demi-axe non focal est 1/3 ; les foyers de la seconde hyperbole appartiennent à l'axe Oy, le demi-axe focal est 1/3 et le demi-axe non focal est $1/\sqrt{3}$; 16) partie du plan se trouvant à droite de la branche gauche de l'hyperbole de foyers (2, 0) et (—2, 0) et de demi-axe focal égal à 1 (sans points frontières), le demi-axe non focal vaut $\sqrt{3}$; 17) intérieur de la parabole de sommet (0, 0) et de foyer (1, 0) (avec les points de la frontière) ; 18) extérieur de la parabole de sommet (0, 0) et de foyer (1,5, 0) (sans points frontières) ; 19) partie du plan, comprise entre deux paraboles de sommet commun (0, 0) (avec les points de la frontière) ; le foyer de l'une des paraboles est au point (1/4, 0), celui de l'autre au point (3/4, 0) ; 20) partie du plan, comprise entre la parabole de sommet (0, 0) et de foyer (—1/2, 0) et le cercle de rayon 1 et de centre (1, 0) (sans points frontières). **7.16.** 1) Cercle de rayon 3 et de centre au point (0, 0) ; 2) cercle de rayon 2 et de centre au point (1, 2) ; 3) partie supérieure du cercle de rayon 1 et de centre au point (0, 0). **7.18.** L'autre branche de l'hyperbole est définie par les équations paramétriques $x = x_0 - a \operatorname{ch} t$, $y = y_0 + b \operatorname{sh} t$; les deux branches sont définies par les équations $x = x_0 \pm a \operatorname{ch} t$, $y = y_0 + b \operatorname{sh} t$. **7.19.** 1) Cercle de rayon 1 et de centre à l'origine des coordonnées ; 2) branche de l'hyperbole dont le foyer se trouve à l'origine des coordonnées, le sommet au point (—1/3, 0), le centre au point (—2/3, 0), et dont le demi-axe focal est égal à 1/3 et le demi-axe non focal à $1/\sqrt{3}$; 3) ellipse dont le foyer gauche se trouve à l'origine des coordonnées, le centre au point (1, 0), le demi-grand axe est 2, le demi-petit axe est $\sqrt{3}$; 4) parabole dont le foyer se trouve à l'origine des coordonnées et le sommet au point (—1, 0). **7.20.** Branche de l'hyperbole dont le foyer se trouve au point A, le demi-axe focal est la droite AB, la longueur du demi-axe focal vaut $a/3$, celle du demi-axe non focal est $a/\sqrt{3}$ (a est ici la longueur du segment AB). **7.21.** L'excentricité est égale à zéro, les deux foyers coïncident avec le centre du cercle, les directrices sont absentes (se trouvent à l'infini). **7.22.** 1) a et b ; $\sqrt{1-(b/a)^2}$; $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ et $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$; $x = \pm a^2/\sqrt{a^2-b^2}$; 2) b et a ; $\sqrt{1-(a/b)^2}$; $(0, \sqrt{b^2-a^2})$ et $(0, -\sqrt{b^2-a^2})$; $y = \pm b^2/\sqrt{b^2-a^2}$; 3) 5 et 3 ; 4/5 ; (4, 0) et (—4, 0) ; $x = \pm 25/4$; 4) 1 et 1/2 ; $\sqrt{3}/2$; $(0, \sqrt{3}/2)$ et $(0, -\sqrt{3}/2)$; $y = \pm 2/\sqrt{3}$. **7.23.** 1) En dehors de l'ellipse ; 2) appartient à l'ellipse ; 3) à l'intérieur de l'ellipse. **7.24.** 8/3. **7.25.** 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 6) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$; 7) $\frac{x^2}{9/32}+\frac{y^2}{1/4}=1$; 8) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **7.26.** 1) 4/5 ; 2) 1/2 ; 3) 1/2 ; 4) $1/\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2/3}$; 6) $(\sqrt{5}-1)/2$; 7) $(\sqrt{5}-1)/2$. **7.27.** $x = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{4ab}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}$. **7.28.** Une partie de la droite $18x - 25y = 0$ située à l'intérieur de l'ellipse. **7.29.** $x+2y-7=0$. **7.30.** Deux solutions : $y = 3 \pm \frac{x}{2}$. **7.31.** 1) Quatre points $(\pm\sqrt{8/3}, \pm 1/\sqrt{3})$; 2) deux points $(0, \pm 1)$; 3) ces points n'existent pas. **7.32.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, où $a > |c|$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{d^2y^2}{a^2(d^2-a^2)}=1$, où $0 < a < |d|$. **7.33.** 1) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$; 2) $\frac{(5x+14)^2}{576}+\frac{5(y-2)^2}{64}=1$ ou

$\frac{(x+22)^2}{576}+\frac{(y-2)^2}{320}=1$; 3) quatre solutions: $\frac{x^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, $\frac{(x-12)^2}{162}+\frac{(y-7)^2}{81}=1$, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{18}=1$, $\frac{(x+3)^2}{81}+\frac{(y+8)^2}{162}=1$.

7.34. 1) $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; 2) $\max AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $\min AB=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **7.35.** 1) a et b; $\sqrt{1+(b/a)^2}$; $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ et $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$; $x=\pm a^2/\sqrt{a^2+b^2}$; $bx\pm ay=0$; 2) b et a; $\sqrt{1+(a/b)^2}$; $(0, \sqrt{a^2+b^2})$ et $(0, -\sqrt{a^2+b^2})$; $y=\pm b^2/\sqrt{a^2+b^2}$; $bx\pm ay=0$; 3) 4 et 3; 5/4; (5, 0) et (—5, 0); $x=\pm 16/5$; $3x\pm 4y=0$; 4) 1 et 1; $\sqrt{2}$; $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$; $y=\pm 1/\sqrt{2}$; $y\pm x=0$; 5) $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $x+y\pm\sqrt{2}=0$; $x=0$ et $y=0$; 6) 2 et 2; $\sqrt{2}$; (—2, 2) et (2, —2); $y-x\pm 2=0$; $x=0$ et $y=0$. **7.36.** 1) Le point A appartient à l'hyperbole; 2) A est situé à l'intérieur (à droite) de la branche droite; 3) A se trouve entre les branches; 4) A est situé à l'intérieur (à gauche) de la branche gauche. **7.37.** 24,5. **7.38.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$; 2) $\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{3}=1$; 3) $x^2-\frac{y^2}{1/5}=1$ ou $\frac{x^2}{485/6}-\frac{y^2}{7760}=1$; 4) $\frac{x^2}{9/64}-\frac{y^2}{1/4}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; 6) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{2}=1$; 7) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$; 8) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$; 9) pas de solutions. **7.39.** $\frac{X^2}{5}-\frac{Y^2}{5/4}=1$. **7.40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{10}$ ou $\sqrt{10/3}$. **7.41.** 1) $3/\sqrt{5}$ ou $\sqrt{41/5}$; 2) $3/\sqrt{5}$ ou 6/5. **7.42.** $1/\varepsilon$. **7.43.** $\frac{5x^2}{4}-\frac{5y^2}{6}=1$. **7.44.** Deux demi-droites d'équation $x-4y=0$ situées à droite de la branche droite et à gauche de la branche gauche de l'hyperbole. **7.45.** $4x-3y-4=0$. **7.46.** 1) Quatre points $(\pm 3/\sqrt{5}\ \pm 4/\sqrt{5})$; 2) quatre points $(\pm\sqrt{17/5}, \pm 4\sqrt{3/5})$. **7.47.** 1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$, où $0<a<|c|$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{d^2y^2}{a^2(a^2-d^2)}=1$, où $a>|d|$; 3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k^2a^2}=\pm 1$. **7.48.** 1) $2(x-4)^2-2(y+2)^2=1$; 2) $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$ ou $\frac{(x+14)^2}{100}-\frac{(y-3)^2}{125}=1$; 3) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. **7.49.** 1) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; 2) $\frac{ab}{2}$. **7.50.** a. **7.51.** 1) $(p/2, 0)$, $x=-p/2$; 2) $(-p/4, 0)$, $x=p/4$; 3) (3/2, 0), $x=-3/2$; 4) (—3/4, 0), $x=3/4$; 5) (0, 1/4), $y=-1/4$; 6) $(0, -\sqrt{3}/4)$; $y=\sqrt{3}/4$. **7.52.** 1) A l'intérieur de la parabole; 2) à l'extérieur de la parabole; 3) appartient à la parabole. **7.53.** 1/5. **7.54.** 1) $y^2=5x$; 2) $y^2=24x$; 3) $y^2=9x$. **7.55.** Demi-droite $y=-9/4$ située à l'intérieur de la parabole. **7.57.** $x-y-2=0$. **7.58.** 1) $(15/2, 5\sqrt{3})$ et $(15/2, -5\sqrt{3})$; 2) (2/5, 2) et (2/5, —2); 3) $(5/4, 5/\sqrt{2})$ et $(5/4, -5/\sqrt{2})$; 4) $(8, 4\sqrt{5})$, $(8, -4\sqrt{5})$, $(10/3, 10/\sqrt{3})$ et $(10/3, -10/\sqrt{3})$. **7.59.** Segment $[0, 2/\sqrt{3}]$. **7.60.** 1) $(y-b)^2=2p(x-a)$; 2) $(y-b)^2=2p(a-x)$; 3) $(x-a)^2=$

$= 2p(y-b)$; 4) $(x-a)^2 = 2p(b-y)$. 7.61. 1) $y^2 = p^2 + 2px$, $p \neq 0$; 2) $y^2 = -p^2 + 2px$, $p \neq 0$. 7.62. 1) $y^2 = 12x - 48$; 2) $y^2 = 15-2x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) quatre paraboles $\pm 6y = x(x \pm 6)$. 7.63. p.

8.1. 1) $x + y = 4$; 2) $x - 3y - 12 = 0$; 3) $x = -3$; 4) $3x - 2y - 16 = 0$; 5) $x + 2y - 8 = 0$; 6) $2x - 2y + 3 = 0$. 8.2. 1) $\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} + \frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2} = 1$; 2) $\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} - \frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2} = 1$; 3) $xy_0 + yx_0 = 2k$; 4) $(y-\beta)(y_0-\beta) = p(x + x_0 - 2\alpha)$. 8.3. 1) $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$; 2) $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$, $C \neq 0$; 3) $a^2A^2 - b^2B^2 = -C^2$, $C \neq 0$; 4) $4ABk = C^2$, $C \neq 0$; 5) $pB^2 = 2AC$. 8.4. $a \mid \beta \mid > b \mid \alpha \mid$. 8.5. 1) $(6, -3)$; 2) $(5, 3)$; 3) $(-4, 3/4)$; 4) $(1, -2)$. 8.6. 1) $(2x - y \pm 12 = 0$; 2) $x + 2y \pm 3\sqrt{14} = 0$; 3) $2x + y \pm 12 = 0$; $x - 2y \pm 3\sqrt{14} = 0$. 8.7. 1) $4x - 3y \pm 16 = 0$; 2) $x = \pm 5$; 3) pas de solutions. 8.8. 1) $x - 2y + 10 = 0$; 2) $x = 0$; 3) pas de solutions. 8.9. 1) $(-2/3, -2/3)$, $1/15$; 2) $\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $\left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 0; 3) $(2, -1)$, 1; 4) $(2, -1)$ et $(-2, 1)$, 19/13; 5) $(9, 24)$, 8. Conseil: étudier les tangentes parallèles à la droite donnée. 8.10. 1) $\frac{3\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{34}}$; 2) $\sqrt{3}$. 8.11. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1$ ou $\frac{16x^2}{225} + \frac{9y^2}{100} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. 8.12. 1) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ ou $\frac{9x^2}{128} - \frac{y^2}{64} = 1$; 2) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. 8.13. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$. 8.14. 1) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$; 2) $y^2 = 4x$. 8.15. Quatre droites $x \pm y \pm \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$. 8.16. $x + y - 2 = 0$ ou $x - y - 2 = 0$. 8.18. 2) ab. 8.21. $x \pm y \pm 3 = 0$. 8.22. 1) $x = -3$, $x \pm \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$ ou $x = 3$, $x \pm \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$; 2) $y = -1$, $\pm x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{7} = 0$ ou $y = 1$, $\pm x\sqrt{3} + y + 2\sqrt{7} = 0$. 8.23. 1) $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$ (le point est situé à l'extérieur de l'ellipse); 2) $0 \neq \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ (le point est situé entre les branches de l'hyperbole, mais n'appartient pas aux asymptotes); 3) $y_0^2 > 2px_0$ (le point est situé à l'extérieur de la parabole). 8.24. 1) $2x \pm 3y + 12 = 0$; 2) $10x + 3\sqrt{7}y - 48 = 0$ et $10x + 51\sqrt{7}y - 384 = 0$; 3) $8x + 3\sqrt{2}y + 36 = 0$ (le point est sur l'ellipse); 4) le point est à l'intérieur de l'ellipse, il n'existe aucune solution. 8.25. 1) $x + 2 = 0$ et $5x + 8y - 6 = 0$; 2) $5x \pm 6y - 8 = 0$; 3) $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ (le point est sur l'hyperbole); 4) le point se trouve à droite de la branche de l'hyperbole, les solutions n'existent pas; 5) $17x - 30y - 16 = 0$ (le point est sur l'asymptote); 6) le point coïncide avec le centre de l'hyperbole, il n'y a pas de solutions. 8.26. 1) Le point est à l'intérieur de la parabole, il n'y a pas de solutions; 2) $2x - y + 2 = 0$ (le point est sur la parabole); 3) $x - y + 4 = 0$ et $4x - y + 1 = 0$; l'aire du triangle vaut 37,5. 8.28. 1) Quatre tangentes $x \pm 4y \pm 10 = 0$; 2) quatre tangentes $x \pm y \pm 1 = 0$; 3) deux tangentes $x \pm \sqrt{6}y + 3 = 0$; 4) deux tangentes $x \pm \sqrt{2}y + 1 = 0$; 5) quatre tangentes $x \pm \sqrt{2}y + 1 = 0$, $x \pm \sqrt{6}y + 3 = 0$;

6) quatre tangentes $x \pm y \pm 3 = 0$; 7) deux tangentes $x \pm 6y + 8 = 0$. 8.32. 1) $6x + 17y - 10 = 0$ et $6x + 17y - 46 = 0$; 2) $24x + 41y - 22 = 0$ et $24x + 41y - 94 = 0$; 3) les solutions n'existent pas (la courbe donnée est une hyperbole et la droite donnée est son asymptote). 8.33. 1) $x + 3y - 12 = 0$ et $3x + y - 12 = 0$; 2) $13x + 15y + 12 = 0$ (le point est sur la courbe); 3) il n'y a pas de solutions (la courbe donnée est une ellipse et le point donné se trouve à l'intérieur de cette ellipse).

9.1. 1) Ellipse $\left(\text{cercle de rayon } \frac{7}{4\sqrt{5}}\right)$ $\frac{X^2}{49/80}+\frac{Y^2}{49/80}=1$; $O^*\left(-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$; 2) hyperbole $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$; $O^*\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0, 1)$; 3) ellipse $X^2+\frac{Y^2}{4/9}=1$; $O^*\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 4) parabole $Y^2=\frac{8}{3}X$; $O^*\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 5) couple de droites parallèles $y=16/9$, $y=-1$; $Y^2=(25/18)^2$; $O^*(0, 7/18)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$; 6) couple de droites imaginaires se coupant au point réel $O^*(-1, 3)$; 7) ellipse imaginaire; 8) couple de droites parallèles imaginaires; 9) deux droites confondues $x=3/5$; $Y^2=0$; $O^*(3/5, 0)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 10) couple de droites concourantes $3\sqrt{5}(x-1)=\pm 2(3y+1)$; $\frac{X^2}{1/5}-\frac{Y^2}{1/5}=0$; $O^*(1, -1/3)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$. 9.2. Notons $K=\frac{C^2}{A}+\frac{D^2}{B}-E$. 1) La courbe est une ellipse si et seulement si A, B, K sont non nuls et de même signe; le centre est au point $(-C/A, -D/B)$. Pour $A=B$, on a le cercle de rayon $\sqrt{K/A}$, les deux foyers coïncident avec le centre. Pour $|A|<|B|$, le demi-grand axe vaut $\sqrt{K/A}$, le demi-petit axe est $\sqrt{K/B}$; les foyers sont aux points $\left(-\frac{C}{A}\pm\sqrt{\frac{K}{A}-\frac{K}{B}}, -\frac{D}{B}\right)$. Pour $|A|>|B|$, le demi-grand axe vaut $\sqrt{K/B}$, le demi-petit axe, $\sqrt{K/A}$; les foyers sont aux points $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{B}\pm\sqrt{\frac{K}{B}-\frac{K}{A}}\right)$. 2) La courbe est une hyperbole si et seulement si A, B, K ne sont pas nuls et $AB<0$; le centre est au point $(-C/A, -D/B)$. Pour $AK>0$, le demi-axe focal est égal à $\sqrt{K/A}$ et le demi-axe non focal, à $\sqrt{-K/B}$; les foyers sont aux points $\left(-\frac{C}{A}\pm\sqrt{\frac{K}{A}-\frac{K}{B}}, -\frac{D}{B}\right)$. Pour $BK>0$, le demi-axe focal vaut $\sqrt{K/B}$, le demi-axe non focal est $\sqrt{-K/A}$; les foyers sont aux points $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{B}\pm\sqrt{\frac{K}{B}-\frac{K}{A}}\right)$. 9.3. L'origine du repère canonique coïncide partout avec l'origine du repère initial. 1) Ellipse $\frac{X^2}{121}+\frac{Y^2}{11}=1$; $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $E_2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; 2) hyperbole $\frac{X^2}{8/9}-\frac{Y^2}{8/9}=1$; $E_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 3) hyperbole $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{3}=1$; $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 4) el-

lipse $\frac{X^2}{3/2}+\frac{Y^2}{1/9}=1$; $E_1\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$, $E_2\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$; 5) parabole $Y^2=\sqrt{2}X$; $E_1(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, $E_2(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$; 6) couple de droites parallèles $3x-y\pm\sqrt{10}=0$; $Y^2=1$; $E_1(1/\sqrt{10},\ 3/\sqrt{10})$, $E_2(-3/\sqrt{10},\ 1/\sqrt{10})$; 7) deux droites confondues $9x-2y=0$; $Y^2=0$; $E_1(2/\sqrt{85},\ 9/\sqrt{85})$, $E_2(-9/\sqrt{85},\ 2/\sqrt{85})$; 8) couple de droites concourantes $(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})\,x-2y=0$; $X^2-\frac{Y^2}{1/8}=0$; $E_1(\sqrt{5}/3,\ 2/3)$, $E_2(-2/3,\ \sqrt{5}/3)$. **9.4.** 1) Ellipse $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1/3}=1$; $O^*(-3,\ -1)$, $E_1(2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$, $E_2(-1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$; 2) hyperbole $\frac{X^2}{1/4}-Y^2=1$; $O^*(-1,\ 1)$, $E_1(-1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, $E_2(-2/\sqrt{5},\ -1/\sqrt{5})$; 3) parabole $Y^2=X/5$; $O^*(6/25,\ -8/25)$, $E_1(-4/5,\ -3/5)$, $E_2(3/5,\ -4/5)$; 4) ellipse $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2/3}=1$; $O^*(-1,\ -1)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 5) hyperbole $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}=1$; $O^*(-1,\ -2)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 6) parabole $Y^2=4\sqrt{2}X$; $O^*(2,\ 1)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 7) ellipse $\frac{X^2}{14}+Y^2=1$; $O^*(3,\ -2)$, $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{13}},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $E_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},\ -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; 8) hyperbole $\frac{X^2}{1/9}-\frac{Y^2}{1/25}=1$; $O^*(1,\ -1)$, $E_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 9) parabole $Y^2=\frac{6}{\sqrt{34}}X$; $O^*\left(-\frac{11}{17},\ \frac{10}{17}\right)$, $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{34}},\ -\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$, $E_2\left(\frac{5}{\sqrt{34}},\ -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$; 10) couple de droites concourantes $x=-1/2$, $4x+3y+1=0$; $\frac{X^2}{1/9}-Y^2=0$; $O^*(-1/2,\ 1/3)$, $E_1(3/\sqrt{10},\ 1/\sqrt{10})$, $E_2(-1/\sqrt{10},\ 3/\sqrt{10})$; 11) couple de droites parallèles $2x+3y-5=0$, $2x+3y+1=0$; $Y^2=9/13$; $O^*(4/13,\ 6/13)$, $E_1(-3/\sqrt{13},\ 2/\sqrt{13})$, $E_2(-2/\sqrt{13},\ -3/\sqrt{13})$; 12) deux droites confondues $15x-8y+1=0$; $Y^2=0$; $O^*(-15/289,\ 8/289)$, $E_1(8/17,\ 15/17)$, $E_2(-15/17,\ 8/17)$; 13) couple de droites parallèles $x+y-4=0$, $x+y-1=0$; $Y^2=9/8$; $O^*(5/4,\ 5/4)$, $E_1(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $E_2(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$; 14) couple de droites imaginaires se coupant au point réel $O^*(1,\ 2)$; 15) couple de droites parallèles imaginaires; 16) ellipse imaginaire; 17) couple de droites concourantes $3x-5y-13=0$, $5x+3y+1=0$; $X^2-Y^2=0$; $O^*(1,\ -2)$, $E_1(1/\sqrt{17},\ 4/\sqrt{17})$, $E_2(-4/\sqrt{17},\ 1/\sqrt{17})$. **9.5.** Les longueurs des demi-axes sont égales à $\sqrt{2}$ et 1, l'excentricité vaut $1/\sqrt{2}$, le centre est au point $(1,\ -1)$, l'équation du grand axe est $3x+4y+1=0$, celle du petit axe, $4x-3y-7=0$. Au foyer $F_1\ (1/5,\ -2/5)$ correspond la directrice $4x-3y+3=0$, au foyer $F_2\ (9/5,\ -8/5)$ est associée la directrice $4x-3y-17=0$. **9.6.** Les longueurs des deux demi-axes sont égales à $\sqrt{2}$, l'excentricité vaut $\sqrt{2}$, le centre est au point $(1,\ 1)$, l'équation de l'axe focal est $4x+3y-7=0$, l'équation de l'axe non focal est $3x-4y+1=0$. Au foyer $F_1\ (-1/5,$

13/5) correspond la directrice $3x - 4y + 6 = 0$, au foyer F_2 (11/5, $-3/5$) est associée la directrice $3x - 4y - 4 = 0$. Les équations des asymptotes sont $x + 7y - 8 = 0$ et $7x - y - 6 = 0$. **9.7.** Le paramètre de la parabole est $\sqrt{2}/8$, le sommet est au point ($-1/16$, $-13/16$), le foyer est au point F ($-1/8$, $-1/8$). L'axe de la parabole est la droite $4x + 4y + 1 = 0$, la directrice est la droite $4x - 4y - 1 = 0$. **9.10.** 1) Hyperbole $\frac{X^2}{200/147} - \frac{Y^2}{200/63} = 1$; 2) ellipse $\frac{X^2}{1/3} + \frac{Y^2}{2/9} = 1$; 3) parabole $Y^2 = 0{,}16 \cdot \sqrt{5}X$. **9.13.** 1) Hyperbole; 2) ellipse; 3) hyperbole; 4) couple de droites parallèles $4x + 3y = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; 5) ellipse; 6) parabole; 7) hyperbole; 8) ellipse imaginaire; 9) couple de droites concourantes $x - 3y + 4 = 0$, $2x + y + 1 = 0$; 10) couple de droites parallèles $x + 5y - 1 = 0$, $x + 5y + 3 = 0$; 11) couple de droites imaginaires se coupant au point réel (1, 1); 12) couple de droites parallèles imaginaires; 13) deux droites confondues $x - 4y + 3 = 0$. **9.14.** 1) $11x^2 - 20xy + 11y^2 - 3x - 3y - 8 = 0$ (ellipse); 2) $x^2 - 4xy + y^2 + 3x + 3y - 4 = 0$ (hyperbole); 3) $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ (couple de droites parallèles $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$); 4) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 6x + 6y - 9 = 0$ (couple de droites concourantes $3x - y - 3 = 0$, $3y - x - 3 = 0$); 5) quatre des cinq points appartiennent à la droite $x - y + 1 = 0$, et les cinq points donnés ne définissent pas de façon unique une courbe d'ordre 2; 6) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (parabole). **9.15.** 1) Ellipse si $|\lambda| < 2$, hyperbole si $|\lambda| > 2$, couple de droites parallèles si $\lambda = \pm 2$; 2) ellipse imaginaire si $\lambda < 41/8$, ellipse si $5 < \lambda < 41/8$ et si $\lambda < -5$, couple de droites imaginaires se coupant au point réel si $\lambda = 41/8$, parabole si $\lambda = 5$, hyperbole si $-5 < \lambda < 5$, couple de droites parallèles si $\lambda = -5$; 3) ellipse si $\lambda > 2$, hyperbole si $\lambda < 2$, $\lambda \neq 0$, couple de droites confondues si $\lambda = 2$, couple de droites concourantes si $\lambda = 0$; 4) ellipse si $\lambda > 1/2$, hyperbole si $\lambda < 1/2$, $\lambda \neq 1/3$, parabole si $\lambda = 1/2$, couple de droites concourantes si $\lambda = 1/3$. **9.16.** Si $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, les équations données définissent: 1) une parabole; 2) une ellipse; 3) une hyperbole; 4) une hyperbole; 5) un couple de droites sécantes. Si $\Delta = 0$, les équations 1) à 4) peuvent définir un couple de droites parallèles, un couple de droites parallèles imaginaires; l'équation 5) peut définir un couple de droites parallèles, deux droites confondues. Au cas de $\Delta = 0$ et pour certaines valeurs des coefficients, il arrive que les équations 1) à 5) ne définissent aucune conique. **9.17.** 1) $A_1x + B_1y + C_1 = \pm (A_2x + B_2y + C_2)$; 2) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. **9.19.** 1) (8, 3), $x'^2 - 8x'y' + 17y'^2 - 1 = 0$; 2) (1, -6), $5x'^2 + x'y' = 0$; 3) ($-9/8$, $-5/8$), $8x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 1{,}5 = 0$. **9.22.** 2) C o n s e i l : si A et B son deux centres de symétrie, le point symétrique de A par rapport à B est également un centre de symétrie. 3) $y - \sin x = 0$.

10.3. 1) Ellipsoïde pour $\lambda > 0$, point pour $\lambda = 0$, ensemble vide pour $\lambda < 0$; 2) ellipsoïde pour $\lambda > 0$, cylindre elliptique pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à une nappe pour $\lambda < 0$; 3) ellipsoïde pour $\lambda > 0$, droite pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à deux nappes pour $\lambda < 0$; 4) hyperboloïde à une nappe pour $\lambda > 0$, cône pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à deux nappes pour $\lambda < 0$; 5) hyperboloïde à deux nappes pour $\lambda > 0$, cône pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à une nappe pour $\lambda < 0$; 6) ellipsoïde pour $\lambda > 0$, couple de plans parallèles pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à deux nappes pour $\lambda < 0$; 7) ellipsoïde pour $\lambda > 0$, plan pour $\lambda = 0$, hyperboloïde à une nappe pour $\lambda < 0$; 8) paraboloïde elliptique pour $\lambda \neq 0$, droite pour $\lambda = 0$; 9) paraboloïde elliptique pour $\lambda > 0$, cylindre parabolique pour $\lambda = 0$, paraboloïde hyperbolique pour $\lambda < 0$; 10) paraboloïde elliptique pour $\lambda \neq 0$, plan pour $\lambda = 0$; 11) paraboloïde elliptique pour $\lambda > 0$, plan pour $\lambda = 0$, paraboloïde hyperbolique pour $\lambda < 0$; 12) paraboloïde elliptique pour $\lambda > 0$, couple de plans parallèles pour $\lambda = 0$, paraboloïde hyperbolique pour $\lambda < 0$;

13) cylindre elliptique pour $\lambda > 0$, droite pour $\lambda = 0$, ensemble vide pour $\lambda < 0$; 14) cylindre hyperbolique pour $\lambda \neq 0$, couple de plans sécants pour $\lambda = 0$. **10.5.** 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$. **10.6.** 1) $C(2, 2, 2)$, $R = 2\sqrt{3}$; 2) $C(-1, -2, -3)$, $R = 5/\sqrt{2}$. **10.7.** 1) Ellipsoïde; centre $C(-1, -1, -1)$, demi-axes $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, plans de symétrie $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$; 2) ellipsoïde; centre $C(-1, -1, -1)$, demi-axes 2, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, plans de symétrie $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$. Les ellipsoïdes sont semblables. **10.8.** 1) Hyperboloïde à deux nappes; centre de symétrie $C(-3, 1, 1)$, sommets $A(-5, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, axe de symétrie $y = z = 1$, plans de symétrie $x = -3$, $y = 1$, $z = 1$; 2) hyperboloïde à deux nappes; centre de symétrie $C(-1, 0, -1)$, sommets $A(-1, 0, -1 - \sqrt{3})$, $B(-1, 0, -1 + \sqrt{3})$, axe de symétrie $x = -1$, $y = 0$, plans de symétrie $x = -1$, $y = 0$, $z = -1$. **10.9.** 1) Hyperboloïde à une nappe; 2) cône; 3) hyperboloïde à deux nappes; 4) paraboloïde elliptique; 5) paraboloïde hyperbolique; 6) cylindre elliptique. **10.10.** 1) Plans de coordonnées Oxz et Oyz; 2), 3) cylindre hyperbolique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et la directrice est l'hyperbole donnée dans le plan Oxy; 4) paraboloïde hyperbolique dont les plans de symétrie sont $x = \pm y$. **10.11.** Cylindre de rayon 1/2 et d'axe $x = -1/2$, $z = 0$. **10.12.** 1) Paraboloïde de révolution d'axe Oy et de sommet $C(0, 1/2, 0)$; 2) cône de sommet à l'origine des coordonnées, dont l'axe de révolution est la droite $x = y$, $z = 0$. **10.13.** Hyperboloïde à une nappe de centre à l'origine des coordonnées et d'axe de révolution $x = 0$, $y + z = 0$; son cercle de gorge de rayon 1 se trouve dans le plan $y = z$ et a pour équation $x^2 + 2yz - 1 = 0$, $y = z$. **10.14.** 1) (0, 0, 0) et (2, 2, 8); 2) aucun point d'intersection; 3) (3, 1, 10). **10.16.** A l'extérieur. **10.17.** Au-dessous. **10.26.** $|[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]| = R\,|\mathbf{a}|$. **10.27.** $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R$. **10.28.** $|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \times |\mathbf{a}|\,|\cos\alpha|$. **10.29.** $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = 2a$. **10.30.** 1) $x^2 + y^2 - z^4 = 0$; 2) $x = y^2 + z^2$. **10.31.** 1) Hyperboloïde à deux nappes $x^2 - y^2 - z^2 = 2$; 2) hyperboloïde à une nappe $x^2 - y^2 + z^2 = 2$. **10.32.** Tore $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$. **10.33.** $x^2(y^2 + z^2) = 1$ et $y^2(x^2 + z^2) = 1$. **10.34.** 1) $x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$, $z = f(t)$ $(t \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi)$; 2) $x = \varphi(t)\cos\theta$, $y = \psi(t)\sin\theta$, $z = \chi(t)$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. **10.37.** $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + 3x - 3z = 0$. **10.38.** $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + 3x - 3z + 2 = 0$. **10.39.** $xy + xz + yz = 0$. **10.40.** Hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 4 = 0$. Conseil: voir problème 10.34, 2). **10.41.** Cône $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$. Conseil: la droite coupe l'axe Oz. **10.42.** Cône $xy + xz + yz = 0$. Conseil: voir problème 10.28. **10.43.** $xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 3 = 0$. **10.44.** $x = u + 2\cos v$, $y = u + 2\sin v$, $z = 4 + u - 2\cos v - 2\sin v$. Conseil: voir problème 10.35. **10.45.** Cylindre $(2x - y - z)^2 + (2y - x - z)^2 = 9$. **10.49.** Cercle $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2$. **10.52.** Ellipse $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$. **10.54.** $x = -1 + 2\cos t$, $y = -1 + 2\sin t$, $z = 3 - 2\cos t - 2\sin t$. Conseil: en éliminant z des équations données, on obtient l'équation de la projection de l'ellipse sur le plan Oxy, c'est-à-dire l'équation du cercle $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. En guise de paramètre on choisit le paramètre angulaire du cercle. **10.55.** Suivant l'hyperbole. Conseil: trouver l'équation de la projection de la ligne d'intersection sur le plan Oxy. **10.56.** $C(10/3, -14/3, 5/3)$, $R = 3$. **10.57.** $x = u(-1 + 2\cos v)$, $y = u(-1 + 2\sin v)$, $z = u(3 - 2\cos v - 2\sin v)$. Conseil: utiliser le problème 10.54. **10.58.** $x^2 + y^2 = 2$. **10.59.** $x^2 + y^2 = 4$. **10.60.** $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$. Axe $x = y = -1$, $R = 2$. Conseil: voir problème 10.54. **10.61.** $(x - z + 2)^2 + (y - z + 2)^2 = 4$. **10.62** $xy + yz + xz = 0$. **10.63.** $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$. **10.65.** 1) (2, 1, 1); 2) (4, 1, 1). **10.66.** (4, 2, −2). **10.67.** $\frac{u^2}{110} + \frac{y^2}{390} = 1$; (5, 7, 20); $x = 5 +$

$+ t$, $y = 7 + t$, $z = 20 + 2t$; $x = 5 - 3t$, $y = 7 + t$, $z = 20 + t$. **10.68.** Le diamètre $x = 6t$, $y = 3t$; $z = 2t$ $\left(|t| \leqslant \sqrt{\frac{2}{33}}\right)$. **10.69.** Le diamètre $x = 3t$, $y = 3t$, $z = -t$. **10.70.** Le diamètre $x = y = 1$, $z \geqslant 1$. **10.71.** $3x + 4y + 4z - 21 = 0$. **10.72.** $x^2 - z^2 = 0$ ($|x| \leqslant 3\sqrt{2}$); $y^2 + 2z^2 = 9$; $2x^2 + y^2 = 0$. La section est un couple de cercles situés dans les plans $x = \pm z$. **10.73.** $x^2 + y^2 = 2$; $y^2 + 3z^2 = 2$; $3z^2 - x^2 = 0$ ($|x| \leqslant \sqrt{2}$). La section est un couple d'ellipses situées dans les plans $x = \pm \sqrt{3}z$. **10.74.** $x \pm y \pm \sqrt{2} = 0$; $z \pm x\sqrt{2} + 1 = 0$; $z \pm y\sqrt{2} - 1 = 0$. La section comprend quatre droites: $x = t$, $y = \pm (t + \sqrt{2})$, $z = -1 - t\sqrt{2}$ et $x = t$, $y = \pm (t - \sqrt{2})$, $z = -1 + t\sqrt{2}$. **10.75.** $2x^2 + z^2 = 3$; $2y^2 - z^2 = 5$, $|y| \leqslant 2$ ($|z| \leqslant \sqrt{3}$) (deux arcs d'hyperbole); $x^2 + y^2 = 4$, $|y| \geqslant \sqrt{5/2}$ ($|x| \leqslant \sqrt{3/2}$) (deux arcs de cercle). **10.76.** Les points d'intersection sont M_1 ($\sqrt{2}$, 0, -2), M_2 ($-\sqrt{2}$, 0, -2); les rayons $R = 2$. **10.79.** $\alpha (x - y) = \beta$, $\beta (x + y) = \alpha$ ($\alpha^2 + \beta^2) \neq 0$). **10.80.** $\alpha (z - y) = \beta x$, $\beta (z + y) = \alpha x$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$). **10.81.** $x = t$, $y = 2t - 4$, $z = t - 1$; $x = t$, $y = 4 - 2t$, $z = t - 1$. **10.82.** $3x + y - 2z - 2 = 0$. **10.83.** $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **10.84.** Le plan est $x + y + z = 0$, les droites sont $x = t - 2$, $y = t$, $z = 2 - 2t$ et $x = t$, $y = -t$, $z = 0$. L'angle est $\pi/2$. **10.85.** 1) $\pi/2$; 2) $\pi/3$; 3) Arc cos $\frac{h^2}{h^2 + 1}$. **10.86.** 1) Cercle $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; 2) couple des droites $y \pm x = 0$, $z = 0$; 3) hyperbole $4x^2 - 16y^2 + 3 = 0$, $z = -3/8$.

Conseil pour les problèmes **11.1** à **11.11**: dans les calculs et les démonstrations, utiliser le tableau donné au début du § 11. **11.1.** 1) Ellipsoïdes, hyperboloïdes, cônes; 2) cônes et cylindres; 3) couples de plans non confondus; 4) couples de plans confondus; 5) ellipsoïdes, hyperboloïdes, cônes; 6) paraboloïdes, cylindres (sauf cylindres paraboliques), couples de plans sécants; 7) cylindres paraboliques, couples de plans (sauf plans sécants). **11.2.** $R = 4 > \Sigma$. **11.3.** 1) $R = r + 2$; 2) $R \leqslant 2$; 3) $R = \Sigma \geqslant 1$. **11.4.** 1) « Ellipsoïdes imaginaires », « cylindres elliptiques imaginaires », « couples de plans parallèles imaginaires », $R = \Sigma > r$; 2) «cônes imaginaires » (points), « couples de plans sécants imaginaires » (droites), $R = \Sigma = r > 1$. **11.5.** $R \geqslant 3$, $R - \Sigma \geqslant 2$. **11.6.** 1) $R = 4$, $\Sigma = 0$; 2) $R = 3$, $\Sigma = 1$. **11.7.** Ellipsoïdes, hyperboloïdes, cylindres, couples de plans parallèles, $R = r + 1$. **11.8.** ${}^t\xi' A \xi' + 2\,({}^t\boldsymbol{b}A + \boldsymbol{a})\,\xi' + ({}^t\boldsymbol{b} A \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + k) = 0$, $\boldsymbol{a}' = {}^t\boldsymbol{b}A + \boldsymbol{a}$. **11.9.** Paraboloïdes et cylindres paraboliques, $R = r + 2$. **11.10.** Cônes, couples de plans sécants et couples de plans confondus, $R = r$. **11.11.** 1) 0, 1 ou infiniment beaucoup; 2) paraboloïdes et cylindres paraboliques; 3) ellipsoïdes, hyperboloïdes, cônes; 4) cylindres (sauf cylindre parabolique) et couples de plans. **11.13.** $A\boldsymbol{b} + {}^t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ où $\boldsymbol{b}$ est la colonne des coordonnées du centre de symétrie. **11.15.** 1) $A' = {}^tSAS$, $\boldsymbol{a}' = ({}^t\boldsymbol{b}A + \boldsymbol{a})S$, $k' = {}^t\boldsymbol{b} A \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + k$. 5) Conseil: vérifier les conditions du théorème de Kronecker-Capelli. 6) Conseil: utiliser la réponse du problème 1). **11.16.** 1) La matrice A et toutes les racines de l'équation caractéristique sont multipliées par μ; 2) det A ne varie pas. **11.17.** 1) $B = \left\|\begin{matrix} A & {}^t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & k \end{matrix}\right\|^{\square}$; 2) $T = \left\|\begin{matrix} S & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{o} & 1 \end{matrix}\right\|^{\square}$. **11.18.** Conseil: calculer les invariants R, r. **11.19.** 1) Cylindre hyperbolique; 2) couple de plans parallèles; 3) cylindre parabolique; 4) cylindre hyperbolique; 5), 6) paraboloïde hyperbolique; 7) couple de plans sécants; 8) cylindre parabolique; 9) cône; 10) cylindre parabolique; 11) hyperboloïde à une nappe; 2) hyperboloïde à deux nappes; 13) hyperboloïde à une nappe; 14) « cône imaginaire »; 15), 16) « cou-

ple de plans sécants imaginaires »; 17) ellipsoïde; 18), 19) cylindre elliptique; 20) « cylindre elliptique imaginaire ». **11.20.** $(x + y + z)(x - y + z) = (2x - y + 2z)^2$. **11.21.** 1) Hyperboloïde à deux nappes pour $k > 7/4$, cône pour $k = 7/4$, hyperboloïde à une nappe pour $k < 7/4$; 2) hyperboloïde à deux nappes pour $k < 0$, cylindre hyperbolique pour $k = 0$, hyperboloïde à une nappe pour $k > 0$; 3) « ellipsoïde imaginaire » pour $k > 6$, « cône imaginaire » pour $k = 6$, ellipsoïde pour $k < 6$; 4) ellipsoïde pour $k > 8$; cylindre elliptique pour $k = 8$, hyperboloïde à une nappe pour $k < 8$; 5) paraboloïde hyperbolique pour $k \neq 3$, cylindre hyperbolique pour $k = 3$; 6) hyperboloïde à une nappe pour $k > 1$, cône pour $k = 1$, hyperboloïde à deux nappes pour $k < 1$. **11.22.** *Dans les réponses de ce numéro on donne: la matrice formée par les colonnes des coordonnées des vecteurs de la base quasi canonique (dans le cas où il y a raison de procéder au changement de base dans l'un quelconque des plans de coordonnées, on fournit, dans la réponse, la matrice correspondante d'ordre deux), les coordonnées de l'origine O du repère canonique, l'équation quasi canonique de la surface donnée, écrite en coordonnées* ξ, η, ζ, *la classe de la surface donnée. Pour la résolution complète du problème, c'est-à-dire pour la définition du repère canonique et de l'équation canonique de la surface, il est quelque fois nécessaire de faire une ou plusieurs transformations peu compliquées de l'équation et du repère. Le passage de l'équation quasi canonique à l'équation canonique est décrit en détail dans l'introduction au présent paragraphe. Voir également les solutions des problèmes* 16) *et* 17). 1) A_{313}; O (0, 0, 0); $\xi^2 + 2\eta^2 + 10\zeta^2 = 1$; ellipsoïde; 2) A_{314}; O (0, 0, 0); $\xi^2 + 6\eta^2 - 6\zeta^2 = 0$; cône; 3) A_{315}; O (0, 0, 0); $\sqrt{3}\xi^2 = \zeta$; cylindre parabolique; 4) A_{316}; O (0, 0, 0); $\xi^2 + \eta^2 + 2\sqrt{3}\zeta = 0$; paraboloïde elliptique; 5) A_{60}; O (0, 2, −1); $\xi^2 - 4\eta^2 + \zeta^2 = 0$; cône; 6) A_{61}; O (1, −1, 0); $2\eta^2 + \zeta^2 = 1$; cylindre elliptique; 7) A_{61}; O (−1, 0, −1); $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; hyperboloïde à une nappe; 8) A_{60}; O (0, −5, 0); $\xi^2 + 6\eta^2 + \zeta^2 = 60$; ellipsoïde; 9) A_{61}; O (1, 2, −4); $\xi^2 - 9\eta^2 - \zeta^2 = 1$; hyperboloïde à deux nappes; 10) A_{61}; O (−1, −1, −1); $\xi^2 + 4\eta^2 + \zeta^2 = 4$; ellipsoïde; 11) A_{61}; O (3, 3, −7); $2\xi^2 + 6\eta^2 = 5\zeta^2$; paraboloïde elliptique; 12) A_{61}; O (0, 2, −3); $2\xi^2 + \zeta^2 = -8\eta\sqrt{2}$; paraboloïde elliptique; 13) A_{63}; O (2/13, −3/13, 0); $\sqrt{13}\eta^2 = 2\xi$; cylindre parabolique; 14) A_{64}; O (−10, 0, 1); $\xi^2 - 9\eta^2 - \zeta^2 = -90$; hyperboloïde à une nappe; 15) A_{60}; O (1, −3, 0); $9\xi^2 + 4\eta^2 = 36\zeta$; paraboloïde elliptique; 16) A_{61}; O (1, −2, 0); $-\xi^2 + 2\zeta^2 = \sqrt{2}\eta$; paraboloïde hyperbolique; 17) A_{317}; O (−26/15, −1/3, 0); $5\xi^2 = -\sqrt{2}\zeta$; cylindre parabolique; 18) A_{62}; O (3, 4, 2); $25\xi^2 - \zeta^2 = 15\eta$; paraboloïde hyperbolique; 19) A_{61}; O (0, 2, 0); $3\xi^2 - 7\eta^2 - \xi^2 = 21$; hyperboloïde à deux nappes; 20) A_{62}; O (1, 0, 5); $\xi^2 - 16\eta^2 + 9\zeta^2 = 1$; hyperboloïde à une nappe; 21) A_{61}; O (−1, −1, −1); $\xi^2 + \eta^2 - 9\zeta^2 = 0$; cône; 22) A_{60}; O (1, −2, −1); $4\xi^2 - \eta^2 = 4\zeta$; paraboloïde hyperbolique; 23) A_{325}; O (1, −3, 0); $2\eta^2 = 7\zeta$; cylindre parabolique; **11.23.** *Les réponses de ce numéro contiennent: la matrice formée par les colonnes des coordonnées des vecteurs du repère quasi canonique, les coordonnées de l'origine O du repère canonique, les équations quasi canoniques des surfaces pour les valeurs données du paramètre k, la description de la classe des coniques données pour toutes les valeurs possibles du paramètre. Voir également les remarques se rapportant aux réponses du problème* 11.22. 1) A_{318}; O (−2, −3, 0); $2\xi^2 + 4\eta^2 + 7\zeta^2 = 28$; ellipsoïde pour $k < 77$, point O pour $k = 77$, ensemble vide pour $k > 77$; 2) A_{313}; O (−2, −1, 2); $\xi^2 + 2\eta^2 + 10\zeta^2 = 10$; ellipsoïde pour $k < 9$, point O pour $k = 9$; ensemble vide pour $k > 9$; 3) A_{314}; O (−2, 0, 1); a) $\xi^2 + 6\eta^2 - 6\zeta^2 = 6$; b) $\xi^2 + 6\eta^2 - 6\zeta^2 = 0$, c) $\xi^2 + 6\eta^2 - 6\zeta^2 = -6$; hyperboloïde à une nappe pour $k < 5$, cône pour $k = 5$, hyperboloïde à deux nappes pour $k > 5$; 4) A_{319}; O (−2, 2, 0); $\xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2 = 4$; ellipsoïde pour $k < 8$; point O pour $k = 8$, ensemble vide pour $k > 8$; 5) A_{319}; O (1, −1, 0); a) $4\xi^2 + 4\eta^2 + \zeta^2 = 4$; b) $\xi = \eta = \zeta = 0$; ellipsoïde pour $k < 8$, point O pour $k = 8$, ensemble vide pour $k > 8$; 6) A_{320}; O (1, −1, 2); $\zeta^2 = 5$;

couple de plans parallèles $x - y + 2z - 6 \pm \sqrt{36 - k} = 0$ pour $k < 36$, plan $x - y + 2z - 6 = 0$ pour $k = 36$, ensemble vide pour $k > 36$; 7) A_{320}; O (2, 0, 2); $\zeta^2 = -2\sqrt{2}\xi$ cylindre parabolique pour tous les k; 8) A_{321}; O (0, 0, 0); $\sqrt{6}\xi^2 = -\sqrt{5}\eta$; cylindre parabolique pour tous les k; 9) A_{316}; O (1, 1, 2); a) $\xi^2 + \eta^2 = 1$; b) $\xi = \eta = 0$; cylindre circulaire droit pour $k < 18$, droite $x = y = 3 - z$ pour $k = 18$, ensemble vide pour $k > 18$; 10) A_{316}; O (—1, —1, 2); $\xi^2 + \eta^2 = 2\sqrt{3}\zeta$; paraboloïde de révolution pour tous les k; 11) A_{322}; O (—2, 1, 1); a) $\xi^2 + 3\zeta^2 = 1$; b) $\xi = \zeta = 0$; cylindre elliptique pour $k < 9$, droite $y = z = x + 3$ pour $k = 9$, ensemble vide pour $k > 9$; 12) A_{322}; O (—1, 5, 5); $\xi^2 + 3\zeta^2 = -6\sqrt{3}\eta$; paraboloïde elliptique pour tous les k; 13) A_{323}; O (10/9, 5/9, 8/9); a) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = -9$; b) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = 0$; c) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = 9$; hyperboloïde à deux nappes pour $k < -3$, cône pour $k = -3$, hyperboloïde à une nappe pour $k > -3$; 14) A_{324}; O (2, $-2\sqrt{3}$, 3); a) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = 0$; b) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = 5$; c) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = -5$; hyperboloïde à une nappe pour $k > -75$, cône pour $k = -75$, hyperboloïde à deux nappes pour $k < -75$; 15) A_{329}; O (0, 1, 0); a) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; b) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; c) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; hyperboloïde à une nappe pour $k < 2$, cône pour $k = 2$, hyperboloïde à deux nappes pour $k > 2$; 16) A_{320}; O (1, —1, 2); a) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; b) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; c) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; hyperboloïde à une nappe pour $k < -36$, cône pour $k = -36$, l'hyperboloïde à deux nappes pour $k > -36$; 17) A_{326}; O (8/9, —4/9, —10/9); a) $9\xi^2 - \eta^2 = 0$; b) $9\xi^2 - \eta^2 = 9$; cylindre hyperbolique pour $k \neq 0$, couple de plans sécants $x + 2y = 0$ et $2y + z + 2 = 0$ pour $k = 0$; 18) A_{326}; O (2/9, —1/9, —16/9); $\eta^2 - 9\xi^2 = 6\zeta$; paraboloïde hyperbolique pour tous les k; 19) A_{327}; O (—1/7, —1/14, 3/14); $14\xi^2 = 5\sqrt{3}\eta$; cylindre parabolique pour tous les k; 20) A_{328}; O (—8/7, 27/14, 3/14); $14\xi^2 = 2\sqrt{5}\eta$; cylindre parabolique pour tous les k 21) A_{328}; O (—1/7, 1/14, 3/14); a) $\xi^2 = 0$; b) $\xi^2 = 1$; couple de plans parallèles $2x + y - 3z + 1 \pm \sqrt{1 - k} = 0$ pour $k < 1$, plan $2x + y - 3z + 1 = 0$ pour $k = 1$, ensemble vide pour $k > 1$; 22) A_{323}; O (1/6, 4/3, —13/6); a) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = 6$; b) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = 0$; c) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = -6$; hyperboloïde à une nappe pour $k < -14$, cône pour $k = -14$, hyperboloïde à deux nappes pour $k > -14$; 23) A_{322}; O (—1, —1, 1); a) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; b) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; c) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; hyperboloïde à une nappe pour $k < 5$, cône pour $k = 5$, hyperboloïde à deux nappes pour $k > 5$; 24) A_{320}; O (0, —2, 2); $\sqrt{6}\xi^2 - \sqrt{6}\eta^2 = \zeta$; paraboloïde hyperbolique pour tous les k; 25) A_{320}; O (0, —2, —1); a) $\xi^2 - \eta^2 = 1$; b) $\xi^2 - \eta^2 = 0$; cylindre hyperbolique pour $k \neq -6$, couple de plans sécants $(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})\,x + (\sqrt{3} \mp \sqrt{2})\,y \mp \sqrt{2}z + 2\sqrt{3} \mp 3\sqrt{2} = 0$ pour $k = -6$.

12.2. $n!$. 12.3. 1) n^n, $n!$; 2) 2^n; 3) m^n. 12.4. 1) Non; 2) non. 12.6. 1) $\mathcal{X}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $\mathcal{Y}$ l'ensemble des entiers positifs, $f(x) = x^2$; 2) $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ est l'ensemble des entiers relatifs, $f(x) = 2x$. 12.9. 2) C o n s e i l. Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des ensembles infinis dénombrables, $\mathcal{X} = \{x_n\}$, $\mathcal{Y} = \{y_n\}$, $\mathcal{Z} = \{z_n\}$, $f(x_n) = y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On pose $\varphi(x_{2k-1}) = y_k$, $\varphi(x_{2k}) = z_k$. Dans ce cas, $\varphi: \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ est l'application recherchée. D'une façon générale, soit $\{y_n\}$ une suite de points distincts de $\mathcal{Y}$ telle que $f(x_n) = y_n$. On admet que $\varphi(x_{2n-1}) = y_n$, $\varphi(x_{2n}) = z_n$ et $\varphi(x) = f(x)$ si $x \neq x_n$. 12.11. C o n s e i l: se servir du problème 12.9. 12.14. 1) Il n'y a pas de points immobiles si $a = 1$ et $b \neq 0$. Pour $a = 1$, $b = 0$, tous les points de la droite sont immobiles. Si $a \neq 1$, $b \neq 0$, le point immobile est unique: $x = b/(1 - a)$. 2) $f^{-1}(y) = \dfrac{y - b}{a}$. 12.15. $f(x) = \dfrac{d - c}{b - a}(x - a) + c$. 12.16.

$fg)(x) = acx + ad + b$, $(gf)(x) = acx + bc + d$; $fg = gf$ pour $d(a-1) = b(c-1)$. 12.17. 1) L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) non; 3) $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$. $n \in \mathbb{Z}$. 12.18. 1) La branche gauche de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$; 2) oui; 3) $t = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ $(y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = 1)$. 12.19. 1) a) oui; b) non; 2) le point $O(0, 0)$ n'a qu'un antécédent $O(0, 0)$; le point $M^*(x^*, y^*) \neq O$ a deux antécédents $M(x, y)$, où $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^* + \sqrt{x^{*2}+y^{*2}}}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sgn} y^* \sqrt{-x^* + \sqrt{x^{*2}+y^{*2}}}$ (on prend les deux signes supérieurs ou les deux signes inférieurs). 12.20. 1) Non; 2) par exemple, les bandes $a < y < b$, où $0 < b - a \leqslant 2\pi$, et leurs sous-ensembles; 3) $x = \frac{1}{2}\ln(x^{*2} + y^{*2})$, $y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y^* x^*) & \text{si } x^* > 0, \\ \pi + \operatorname{Arc\,tg}(y^*/x^*) & \text{si } x^* < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x^* = 0. \end{cases}$ 12.23. $\delta(x) = (x;\ x)$. 12.24. 1) Γ. 12.25. 1) $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$; 2) $\mathbf{r}^* = -\mathbf{r} + 2\mathbf{r}_0$; 3) $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{a}$; 4) $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 5) $\mathbf{r}^* = 2\mathbf{r}_0 - \mathbf{r} + 2\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 6) $\mathbf{r}^* = \lambda\mathbf{r} + (1-\lambda)\mathbf{r}_0 + (1-\lambda)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 12.26. Le point immobile de la transformation est le point d'intersection des médianes du triangle ABC. La transformation est orthogonale si et seulement si le triangle ABC est équilatéral. 12.27. La transformation est l'homothétie de centre O et de rapport $-1/2$. Les points K, L, M se transforment en milieux des médianes correspondantes, le point O est immobile. 12.36. $ab \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$ si $0 < \varphi < \pi$; $\pi ab/2$ si $\varphi = \pi$. 12.37. 1) $x^* = kx$, $y^* = ky$; 2) $x^* = x_0 + k(x - x_0)$, $y^* = y_0 + k(y - y_0)$; 3) $x^* = -x + 2x_0$, $y^* = -y + 2y_0$; 4) $x^* = x + \alpha$, $y^* = y + \beta$. 12.38. 1) $(-6, 1)$, $(-3, 5)$, $(-4, -2)$, $(-1, 2)$, $(1, -18)$; 2) $4x - 3y + 27 = 0$, $3x + 2y + 16 = 0$, $x - 5y - 6 = 0$, $x - 5y + 28 = 0$, $18x - 5y - 6 = 0$. 12.39. 1) $(2, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$; 2) $3x + 4y - 2 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$, $5x + 7y - 4 = 0$, $5x + 7y - 2 = 0$. 12.40. 1) $x^* = -4x + 3y + 1$, $y^* = 3x - 5y + 2$; 2) $x^* = -4y$, $y^* = 7x - 1$; 3) $x^* = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$; 4) $x^* = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, $y^* = -\frac{1}{2}y$. 12.41. 1) Le problème n'a pas de solutions (les points A, B, C sont alignés, les points A^*, B^*, C^* ne sont pas alignés); 2) $x^* = x$, $y^* = 1$ (la transformation est linéaire mais non pas affine); 3) le problème a une infinité de solutions; $x^* = px + (p+4)y + 2 - 2p$, $y^* = qx + (q+2)y + 1 - 2q$, où p et q sont des paramètres prenant toutes les valeurs réelles possibles; 4) le problème n'a pas de solutions (les points A, B, C sont alignés, A étant le milieu du segment BC, les points A^*, B^*, C^* sont alignés, mais B^* est le milieu du segment A^*C^*). 12.42. 1) $(0, 0)$; 2) la droite immobile $y = 6x$; 3) il n'y a pas de points immobiles; 4) $(-3, 0)$; 5) la droite immobile $3x + 3y - 1 = 0$; 6) tous les points sont immobiles. 12.43. 1) $x + y = 0$, $y = 0$; 2) $x + y = 0$, $x - y = 0$; 3) $3x + y - 13 = 0$, $3x - y + 7 = 0$; 4) pas de solutions; 5) $x + y - 3 = 0$, $2x - y + C = 0$; 6) $x + y - 1 = 0$; 7) $x - y + C = 0$. 12.45. $x^* = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}$, $y^* = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$. 12.46. 1) $x^* = x + y - 2$, $y^* = 2x - y + 3$; 2) $x^* = 3x - 4y - 5$, $y^* = 4x + 3y + 1$. 12.47. 1) $x^* =$

$= -\frac{16}{5}x+\frac{44}{5}y-\frac{33}{5}$, $y^* = -\frac{1}{5}x-\frac{41}{5}y+\frac{32}{5}$; 2) $x^*=(A_1x+B_1y+C_1)/(A_1x_0+B_1y_0+C_1)$, $y^* = (A_2x + B_2y + C_2)/(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)$. **12.48.** 1) $34x^2 - 42xy + 13y^2 = 1$; 2) $16x^2 - 18xy + 5y^2 = 1$; 3) $15x^2 - 19xy + 6y^2 + 2 = 0$; 4) $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 30x - 18y = 0$; 5) $(3x - y - 1)(29x - 18y + 1) = 0$; 6) $(2x - y - 1)(2x - y + 1) = 2$. **12.49.** 1) $10x^2 - 22xy + 29y^2 - 8x + 14y - 2 = 0$; 2) $35x^2 - 38xy - 9y^2 - 22x + 6y + 7 = 0$; 3) $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 8x - 40y = 0$; 4) $(2x + 3y - 1)(7y - 4x + 1) = 1$; 5) $(5x + y - 3)(5x + y + 1) = 0$. **12.50.** 1) $x^* = -\frac{1}{2}x-\sqrt{3}\,y$, $y^*=\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}y$; 2) $x^*= -\frac{1}{2}x-\sqrt{3}\,y$, $y^*=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}y$. **12.51.** $x^* = \sqrt{5}\,(x - y)$, $y^* = \pm\sqrt{5}\left(\frac{4}{5}x-y\right)$. **12.52.** 1) $x^* = x+2$, $y^*=x+y+1$; 2) $x^*=x+C$, $y^*=\frac{C}{2}x+y+\frac{C^2}{4}$. **12.53.** 1) $x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi$; 2) $x^* = x_0 + (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi$, $y^* = y_0 + (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi$; 3) $x^* = x$, $y^* = 0$; 4) $x^* = (9x + 3y - 1)/10$, $y^* = (3x + y + 3)/10$; 5) $x^* = -x$, $y^* = y$; 6) $x^* = (7x - 24y + 6)/25$, $y^* = (-24x - 7y + 8)/25$; 7) $x^* = x$, $y^* = \lambda y$; 8) $x^* = (2x - y) + 2)/3$, $y^* = (-x + 2y + 2/3)$; 9) $x^* = (9x - 2y + 10)/5$, $y^* = (-2x + 6y - 5)/5$. C o n s e i l: se servir du problème 12.25. **12.54.** 1) Les transformations 1), 2), 5), 6), 7), 8), 9) sont affines; 2) les transformations 1), 2), 5), 6) sont orthogonales. **12.55.** 1) Contraction vers l'axe des abscisses de rapport 3; 2) homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport 2; 3) translation de vecteur **a** $(-1, 1)$; 4) symétrie par rapport à l'axe des abscisses; 5) symétrie par rapport au point O; 6) rotation d'angle $\pi/2$ autour du point O; 7) symétrie par rapport à la droite $y = x$; 8) rotation d'angle $\pi/4$ autour du point O; 9) symétrie par rapport à la droite $y = (\sqrt{2} - 1)\,x$; 10) homothétie de centre au point P $(3, -1)$ et de rapport 3; 11) rotation d'angle $\pi/3$ autour du point $M\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; 12) symétrie par rapport à la droite $x - \sqrt{3}\,y + 2 = 0$; 13) symétrie par rapport au point K $(-1, 1)$; 14) contraction vers la droite $3x - 4y = 0$ de rapport $1/2$; 15) contraction vers la droite $x - y + 2 = 0$ de rapport $1/3$; 16) rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine des coordonnées; 17) projection orthogonale sur la droite $y=1$. C o n s e i l s: 9) déterminer les images des vecteurs de base; 10) à 13) déplacer l'origine des coordonnées au point immobile. **12.56.** 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $(0, 1+\sqrt{2})$; 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$; 3) $y=x+1$ et $y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $y=x+1+\sqrt{2}$ et $y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **12.57.** 1) $\operatorname{tg}\varphi= -3/4$; 2) $-5\pi/12$, $-\pi/12$, $7\pi/12$, $11\pi/12$, ... **12.58.** $x + 2y - 6 = 0$, $2x - y + 1=0$, $2x-y+7=0$. C o n s e i l: utiliser la rotation autour du point P. **12.59.** $\sqrt{3}\,x + y - 3 = 0$, $y = 3/4$, $\sqrt{3}\,x - y - 3 = 0$, $\sqrt{3}\,x + y - 6 = 0$, $y=9/4$. C o n s e i l: utiliser la rotation autour du point P. **12.60.** 1) $|(d_1 - c_1)(d_2 - c_2)(a_1b_2 - a_2b_1)^{-1}|$; 2) $\frac{\Delta^2}{2\,|\delta_1\delta_2\delta_3|}$, où $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\delta_1=$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$. **12.61.** $y=13$ et $15x+7y+14=0$. **12.62.** 1) $x^2+y^2-20x-6y+84=0$; 2) $x^2+y^2-10x=0$; 3) $x^2+y^2+12x+32y-108=0$. **12.63.** 1) fg: $x^*=-7x+5y-2$, $y^*=3x+4y+1$; gf: $x^*=4x+3y+1$, $y^*=5x-7y-2$; 2) fg: $x^*=-4x-6y+4$, $y^*=x+4y+1$; gf: $x^*=7x-3y+6$, $y^*=13x-7y+25$. **12.64.** 1) $x^*=3x-3$, $y^*=3y-3$ (homothétie de centre A (3/2, 3/2) et de rapport 3); 2) $x^*=\frac{1}{2}x$, $y^*=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$ (homothétie de centre B (0, —5) et de rapport 1/2). **12.65.** 1) $x^*=3x-y-10$, $y^*=x-3$; 2) $x^*=7x-4y-32$, $y^*=-5x+3y+22$; 3) $x^*=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{2}{25}$, $y^*=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{11}{25}$; 4) $x^*=\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}y+33$, $y^*=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y-19$; 5) $x^*=\frac{1}{3}x+8$, $y^*=\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}y-1$; 6) la transformation inverse n'existe pas; 7) $x^*=\frac{1}{25}(4x+3y)$, $y^*=\frac{1}{25}(-3x+4y)$; 8) $x^*=\frac{1}{25}(4x+3y)$, $y^*=\frac{1}{25}(3x-4y)$; 9) $x^*=r^{-1}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$, $y^*=r^{-1}(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)$; 10) $x^*=r^{-1}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$, $y^*=r^{-1}(x\sin\varphi-y\cos\varphi)$. **12.66.** 1) $x^*=x\cos n\alpha-y\sin n\alpha$, $y^*=x\sin n\alpha+y\cos n\alpha$; 2) $x^*=x\cos\frac{\pi n}{3}+y\sin\frac{\pi n}{3}$, $y^*=-x\sin\frac{\pi n}{3}+y\cos\frac{\pi n}{3}$; 3) $x^*=x+ny$, $y^*=y$; 4) $x^*=3^n x$, $y^*=(3^n-2^n)x+2^n y$. **12.67.** 1) $x^*=3x+4y+6$, $y^*=4x-3y-16$; 2) $x^*=(5x-4y-1)/3$, $y^*=(-4x+5y-1)/3$; 3) $x^*=2\sqrt{3}x-2y-2\sqrt{3}$, $y^*=2x+2\sqrt{3}y+5-2\sqrt{3}$; 4) $x^*=(-33x+9y+55)/26$, $y^*=(18x-51y-30)/52$. **12.68.** Dans les problèmes 4), 5), 7), 9), 12), 13), $f^{-1}=f$; 1) $x^*=x$, $y^*=y/3$, contraction de rapport 1/3 vers l'axe des abscisses; 2) $x^*=x/2$, $y^*=y/2$, homothétie de rapport 1/2 et de centre à l'origine des coordonnées; 3) $x^*=x+1$, $y^*=y-1$, translation de vecteur **a** (1, —1); 6) $x^*=y$, $y^*=-x$, rotation d'angle $-\pi/2$ autour de l'origine des coordonnées; 8) $x^*=(x+y)/\sqrt{2}$, $y^*=(-x+y)/\sqrt{2}$, rotation d'angle $-\pi/4$ autour de l'origine des coordonnées; 10) $x^*=(x+6)/3$, $y^*=(y-2)/3$, homothétie de centre au point M (3, —1) et de rapport 1/3; 11) $x^*=(x+\sqrt{3}y+1-\sqrt{3})/2$, $y^*=(-\sqrt{3}x+y-1-\sqrt{3})/2$, rotation d'angle $-\pi/3$ autour du point M $(-(1+\sqrt{3})/2, (1-\sqrt{3})/2)$; 14) $x^*=(14x-12y)/15$, $y^*=(-12x+21y)/15$, contraction de rapport 2 vers la droite $3x-4y=0$; 15) $x^*=2x-y+2$, $y^*=-x+2y-2$, contraction de rapport 3 vers la droite $x-y+2=0$. **12.69.** 1) fg: $x^*=-y+3$, $y^*=x-1$; gf: $x^*=-y+1$, $y^*=x-1$; 2) $fg=gf$: $x^*=\frac{1}{5}(3x+4y)+4$, $y^*=\frac{1}{5}(4x-3y)-3$; 3) fg: $x^*=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y)-2\sqrt{3}$, $y^*=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)-2$, gf: $x^*=\frac{1}{2}(-x-\sqrt{3}y)$, $y^*=\frac{1}{2}(-\sqrt{3}x+y)+4$; 4) $fg=gf$: $x^*=2-x$, $y^*=y$; 5) fg: $x^*=x+1{,}2$, $y^*=y-0{,}4$, gf: $x^*=x-1{,}2$, $y^*=y+0{,}4$; 6) fg: $x^*=-y-0{,}2$, $y^*=x-0{,}6$, gf: $x^*=-y+0{,}6$, $y^*=x+0{,}2$; 7) fg: $x^*=x+(1-\sqrt{3})/2$, $y^*=y+(\sqrt{3}-3)/2$, gf: $x^*=x+(\sqrt{3}-3)/2$, $y^*=y+(1-\sqrt{3})/2$.
12.70. 2) $\frac{1}{2}\left(x_0-y_0\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(y_0+x_0\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)$; 3) fg est une rotation

d'angle $\pi/2$ autour du point P (2, 1) ; gf est une rotation d'angle $\pi/2$ autour du point Q (1, 0). **12.71.** 1) $x \sin \varphi/2 - y \cos \varphi/2 = 0$; 2) $x_0 \cos(\varphi/2) + y_0 \sin(\varphi/2) = 0$, $(2x - x_0)\sin(\varphi/2) - (2y - y_0)\cos(\varphi/2) = 0$. **12.72.** 3) **a** $(\lambda \cos(\varphi/2), \lambda \sin(\varphi/2))$, où $\lambda = x_0 \cos(\varphi/2) + y_0 \sin(\varphi/2)$. **12.73.** 1) produit d'une symétrie par rapport à l'axe Ox par une translation de vecteur **a** (1, 0) ; 2) produit d'une symétrie par rapport à l'axe $y = 1$ par une translation de vecteur **a** (1, 0) ; 3) symétrie par rapport à l'axe $y = 1$. **12.74.** 1) Toutes les transformations sont de première espèce ; 2) la transformation g est de première espèce, les autres sont de deuxième espèce ; 3) la transformation f est de première espèce, les autres sont de deuxième espèce ; fg est le produit d'une symétrie par rapport à la droite $x\sqrt{3} - y + 2 = 0$ par une translation de vecteur $(-\sqrt{3}, -3)$, gf est le produit d'une symétrie par rapport à la droite $x\sqrt{3} + y - 2 = 0$ par une translation de vecteur $(-\sqrt{3}, 3)$; 4), 5) f, g sont de deuxième espèce, fg et gf de première espèce ; 6) toutes les transformations sont de première espèce, fg est une rotation d'angle $\pi/2$ autour du point P (1/5, —2/5), gf est une rotation d'angle $\pi/2$ autour du point Q (1/5,2/5) ; 7) toutes les transformations sont de première espèce. **12.75.** $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + 1$, $y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + 1 - \sqrt{2}$, c'est une rotation d'angle $\pi/4$ autour du point M (1, 1). **12.76.** $x^* = 1 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $y^* = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x)$; vecteur de translation **a** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, axe de symétrie $x + y(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$. **12.77.** 2) $fg = gf$, symétrie par rapport au point A (1, 0) ; 3) fg est une translation de vecteur **a** (6/5, —2/5), gf est une translation de vecteur —**a**. **12.78.** 2) fg est une translation de vecteur $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)$, gf est une translation de vecteur $\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **12.80.** 1) Produit de symétries par rapport à deux axes qui passent par le point M et font un angle $\varphi/2$; 2) produit de symétries par rapport à deux droites perpendiculaires au vecteur **a** et qui sont distantes l'une à l'autre de $|\mathbf{a}|/2$. 3) C o n s e i l : $f = hg$, où g est une symétrie axiale et h une translation (voir problème 12.72, 3)), on décompose h comme dans 12.80, 2). Les axes de symétrie peuvent être choisies de façon non univoque. Voir également le problème 12.77. 1). **12.81.** 1) (1, 0), (0, 1) ; 2) (1, 0), (0, 1) ; 3), 4) tout couple de vecteurs orthogonaux non nuls ; 5) $(2, 1 + \sqrt{5})$, $(2, 1 - \sqrt{5})$; 6) (1, 0), (0, 1) ; 7) (1, 1), (—1, 1) ; 8) (1, 2), (—2, 1) ; 9) (1, 3), (—3, 1) ; 10) $(1, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 1)$. **12.82.** 1) g est une transformation identique, h_1 une contraction de rapport 3 vers l'axe des abscisses, h_2 une contraction de rapport 4 vers l'axe des ordonnées ; 2) g est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, h_1 une contraction de rapport 3 vers l'axe des abscisses, h_2 une contraction de rapport 4 vers l'axe des ordonnées ; 3) g est une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, h_1 et h_2 sont des contractions de rapport 3 vers deux droites perpendiculaires quelconques ; 4) g est une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine des coordonnées, h_1 et h_2 sont des contractions de rapport $\sqrt{2}$ vers deux droites perpendiculaires quelconques ; 5) g est une rotation d'angle — Arc cos $(2/\sqrt{5})$ — autour de l'origine des coordonnées, h_1 une contraction de rapport $(\sqrt{5} + 1)/2$ vers la droite $(1 - \sqrt{5})x + 2y = 0$, h_2 une contraction de rapport $(\sqrt{5} - 1)/2$ vers la droite $(1 + \sqrt{5})x + 2y = 0$; 6) g est une rotation d'angle $-\pi/2$ autour du point M (—2/13, 8/13), h_1 une contraction de rapport 3 vers la droite $y = 8/13$, h_2 une contraction de rapport 4 vers la droite $x = -2/13$; 7) g est une rotation d'angle — Arc cos (3/5) autour de l'origine des

coordonnées, h_1 une contraction de rapport 15 vers la droite $7x+y=0$, h_2 une contraction de rapport 5 vers la droite $7x-y=0$; 8) $g=g_1g_2$, où g_2 est une rotation d'angle $-$ Arc cos $(3/\sqrt{10})$ autour de l'origine des coordonnées, g_1 une symétrie par rapport à la droite $y=x$; h_1 est une contraction de rapport $3\sqrt{10}$ vers la droite $y=x$, h_2 une contraction de rapport $2\sqrt{10}$ vers la droite $y=-x$; 9) g est une rotation d'angle $-3\pi/4$ autour de l'origine des coordonnées, h_1 une contraction de rapport $5\sqrt{2}$ vers la droite $2x+y=0$, h_2 une contraction de rapport $10\sqrt{2}$ vers la droite $x-2y+5=0$; 10) g est une rotation d'angle $-\pi/3$ autour du point M $(-1/9, -2/\sqrt{3})$, h_1 une contraction de rapport 6 vers la droite $y=-2/\sqrt{3}$, h_2 une contraction de rapport 2 vers la droite $x=-1/9$. **12.83.** h est une homothétie de centre à l'origine des coordonnées et de rapport k; 1) $k=5$, g est une rotation d'angle Arc sin (3/5) autour de l'origine des coordonnées; 2) $k=5$, g est une symétrie par rapport à la droite $x=3y$; 3) $k=r$, g est une rotation d'angle φ autour de l'origine des coordonnées; 4) $k=r$, g est une symétrie par rapport à la droite $x \sin(\varphi/2) = y \cos(\varphi/2)$. **12.85.** α est partout un nombre arbitraire non nul; 1) $\lambda_1=7$, $\alpha(2,-1)$; $\lambda_2=5$, $\alpha(0,1)$; 2) $\lambda_1=1$, $\alpha(1,-1)$; $\lambda_2=4$, $\alpha(1,2)$; 3) $\lambda_1=3$, $\alpha(2,1)$; $\lambda_2=-3$, $\alpha(1,2)$; 5) tous les vecteurs non nuls sont propres, $\lambda=2$; 6) $\lambda_1=1$, $\alpha(-1,1)$; $\lambda_2=0$, $\alpha(1,1)$; 7) il n'y a pas de vecteurs propres; 8) $\lambda=3$, $\alpha(1,2)$. **12.89.** 1) Produit d'une rotation d'angle φ autour de l'origine des coordonnées et d'une homothétie de centre (0, 0) et de rapport r; 2) produit d'une rotation d'angle φ, d'une homothétie de rapport r si $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, et d'une translation de vecteur représenté par le rayon vecteur du point b, ou produit d'une translation de vecteur représenté par le rayon vecteur du point ba^{-1}, d'une homothétie de rapport r et d'une rotation d'angle φ.

13.1. 1) Oui; 2) oui; 3) non; 4) oui si $A\in(D)$; non si $A\notin(D)$; 5) non; 6) oui; 7) oui; 8) oui; 9) non; 10) oui; 11) oui; 12) oui; 13) non; 14) non; 15) oui; 16) oui; 17) oui; 18) non; 19) oui. **13.2.** 1) Non; 2) oui; 3) oui; 4) non; 5) oui; 6) non; 7) oui; 8) oui; 9) non; 10) oui; 11) non; 12) oui; 13) oui; 14) oui. **13.3.** 1) Non; 2) oui; 3) oui; 4) non; 5) oui; 6) non; 7) oui; 8) non; 9) oui; 10) non; 11) oui; 12) oui. **13.4.** 1) Oui; 2) non; 3) non; 4) oui; 5) oui; 6) non; 7) oui; 8) non; 9) oui; 10) oui; 11) oui; 12) oui. **13.5.** 1) Oui; 2) oui; 3) non; 4) non. **13.10.** Groupe des rotations du plan autour du centre du carré, qui font coïncider ce carré avec lui-même (ou le groupe, qui lui est isomorphe, des racines complexes 4-ièmes de 1 pour la multiplication); groupe contenant quatre transformations du plan: transformation identique, symétrie par rapport à l'origine des coordonnées, symétrie par rapport à l'axe des abscisses et symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. **13.11.** 1) ± 1; 2) $\pm n$; 3) $e^{2\pi ik/n}$, où $1\leqslant k\leqslant n-1$, k et n sont premiers entre aux; 4) rotations de $\frac{2\pi}{n}k$, où k et n sont premiers entre eux. **13.12.** 1) $n\mathbb{Z}$, où n est un nombre entier; 2) $m\mathbb{Z}$, où m est un multiple de n; 3) racines m-ièmes de 1, où m est un diviseur de n; 4) rotations d'angle $2\pi k/m$, où m est un diviseur de n. **13.13.** 1) C o n s e i l: soient a un élément générateur de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ un sous-groupe dans $\mathcal{G}$ et m le plus petit entier naturel tel que $b=a^m\in\mathcal{H}$, alors b est l'élément générateur de $\mathcal{H}$. **13.16.** C o n s e i l: montrer que $b^{-1}ab$ est une rotation si a est une rotation et b une symétrie axiale. **13.19.** C o n s e i l: trouver un élément inverse de a parmi les puissances positives de a. **13.20.** C o n s e i l: 1) $b\in a\mathcal{H}$ si et seulement si $a\mathcal{H}=b\mathcal{H}$; 2) si $c\in a\mathcal{H}\cap b\mathcal{H}$, $a\mathcal{H}=c\mathcal{H}=b\mathcal{H}$; chaque élément $a\in\mathcal{G}$ appartient à la classe $a\mathcal{H}$, puis appliquer le point 1); 3) l'application $f\colon b\mathcal{H}\to a\mathcal{H}$ définie par la formule $f(bh)=ah$ est bijective. **13.21.** 1) C o n s e i l: se servir des assertions du problème 13.20. **13.22.** Soient a la rotation du triangle d'angle $2\pi/3$ autour de son centre, b la symétrie par rapport à l'une des hauteurs.

On a alors $\mathcal{G} = \{\iota, a, a^2 = a^{-1}, b, ab, a^{-1}b\}$, $\mathcal{H} = \{\iota, b\}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Les classes à gauche suivant $\mathcal{H}$ sont: $\mathcal{H}$, $a\mathcal{H} = \{a, ab\}$, $a^{-1}\mathcal{H} = \{a^{-1}, a^{-1}b\}$. Les classes à droite suivant $\mathcal{H}$ sont: $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}a = \{a, ba = a^{-1}b\}$, $\mathcal{H}a^{-1} = \{a^{-1}, ab\}$. **13.24.** 1) Conseil: démontrer que $b^{-1}ab$ est une translation si a est une translation et b une transformation orthogonale ayant un seul point immobile.

13.26. 2) Conseil: démontrer que les conditions $a\mathcal{H} = a'\mathcal{H}$ et $b\mathcal{H} = b'\mathcal{H}$ impliquent $(ab)\,\mathcal{H} = (a'b')\,\mathcal{H}$. **13.28.** 1) Groupe de tous les nombre, réels, muni de l'addition. 2), 4), 6) Groupe des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication. 3) Groupe des nombres réels strictement positifs muni de la multiplication. 5) Groupe cyclique d'ordre n. **13.29.** 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 1. **13.30.** 1) $n!$. **13.31.** 1) ι; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; 3) ι; 4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

13.32. 1) ι; trois groupes d'ordre deux à éléments générateurs $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$; le groupe d'ordre trois à élément générateur $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; tout le groupe $\mathcal{S}_3$. 2) Outre ι et $\mathcal{S}_4$, ce sont: le sous-groupe des permutations paires (d'ordre 12) et le sous-groupe non cyclique V^2 composé de quatre éléments: ι, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. **13.33.** $n!/2$.

14.3. 1) 10, paire; 2) 13, impaire; 3) 3, impaire; 4) 7, impaire; 5) 36, paire; 6) 12, paire; 7), 8) $n\,(n-1)/2$, la permutation est paire si $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$, et impaire dans les autres cas; 9) $n\,(n+1)/2$ la permutation est paire si $n = 4k$ ou $n = 4k + 3$ et impaire dans les autres cas. **14.4.** 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 0; 5) 1; 6) -1487600. **14.5.** ε. **14.6.** r. **14.7.** 1) -1; 2) -2; 3) -27; 4) -27; 5) -7; 6) 0; 7) -1; 8) 4; 9) 0; 10) $-2(x^3 + y^3)$; 11) $(a-c)\,(b-c) \times (b-a)$; 12) 0. **14.8.** $-3i\sqrt{3}$. **14.9.** $r^2 \cos \psi$. **14.10.** 1) 3, 3, 2; 2) 3, 3, -2; 3) 0, 0, 6. **14.11.** 1) 24; 2) 120. **14.13.** 1, 0 ou -1. **14.21.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 3) 4) 0; 5) -1; 6) 1; 7) -18; 8) 1; 9) 1; 10) -5; 11) -7; 12) -1; 13) 0; 14) 0; 15) 1. **14.22.** 1) -2; 2) -10; 3) 0; 4) 48; 5) 0. **14.23.** 1) $n!$; 2) $\lambda_1 \ldots \lambda_n$; 3) 1; 4) 3^n; 5) 1; 6) $(-1)^{n(n-1)/2}\lambda_1 \ldots \lambda_n$; 7) $(-1)^{n+1}$; 8) $(-1)^{n+1}$; 9) $1-n$; 10) $n!$; 11) $(-1)^n\,(1-2n)$; 12) $(-2)^{n-1}\,(5n-2)$; 13) $(-1)^{n-1}$; 14) $(-2)^{n-2}\,(1-n)$; 15) $(-1)^{n(n-1)/2}\,n^{n-1}\,(n+1)/2$; 16) $n+1$; 17) 0 si n est impair, $(-1)^{n/2}\,[(n-1)!!]^2$ si n est pair; 18) $(-3)^k$. **14.24.** Dans ce problème on désigne par Δ_n le déterminant d'ordre n. 1) $[1-(-1)^n]/2$. Conseil: $\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$. 2) $(-1)^n\,[\lambda^n - \lambda^{n-1}n\,(n+1)/2]$. Conseil: $\Delta_n = n\,(-\lambda)^{n-1} - \lambda\Delta_{n-1}$. 3) $n!\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$. Conseil: $\Delta_n = n\Delta_{n-1} + (n-1)!$. 4) $[1+(-1)^n]/2$. Conseil: $\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$. 5) 0 si n est impair, et $(-1)^{n/2}$ si n est pair. Conseil: $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$. 6) $[1+(-1)^n]/2$. Conseil: $\Delta_n = \Delta_{n-2}$. 7) $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i - x_k)$. Conseil: notons

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad p\,(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n-1} & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Vu que $p\,(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on a $p\,(x) = C\,(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$. Le coefficient C du terme dominant du polynôme $p\,(x)$ vaut Δ_{n-1}, d'où $\Delta_n = \Delta_{n-1}\,(x_n - x_1)\ldots$

... $(x_n - x_{n-1})$. 8) $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (a_i - a_k)(b_i - b_k)$. Conseil: une fois réalisé la division, représenter le déterminant sous forme de produit de deux déterminants de Vandermonde. 9) $[2x_1x_2 \ldots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \ldots$ $\ldots (x_n - 1)] \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$. Conseil: compléter la matrice en haut par une ligne composée de zéros, puis à gauche par une colonne d'unités. 10) $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n+1}^{2k+1} \alpha^{n-2k} (\alpha^2 - 1)^k$. 11) $\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$ pour $\varphi \neq k\pi$; $n + 1$ pour $\varphi = 2k\pi$; $(-1)^n (n+1)$ pour $\varphi = (2k + 1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Conseil: la solution est identique à celle de 10) pour $q = \cos\varphi + i \sin \varphi$. Si $q \neq \pm 1$, on calcule Δ_{n-1} en utilisant la formule $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$. 12) $\frac{\operatorname{sh} n\varphi}{\operatorname{sh} \varphi}$ pour $\varphi \neq 0$; $n+1$ pour $\varphi = 0$. 13) $\sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n+1}^{2k+1} \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2k} (a^2 - 4b^2)^k =$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(a - 2b \cos \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

14.26. 0. **14.27.** Le déterminant est multiplié par $(-1)^{n(n+1)/2}$. **14.28.** Le déterminant ne varie pas. Conseil: utiliser le problème 14.27. **14.29.** Conseil: multiplier la première colonne de la matrice par 1000, la deuxième par 100, la troisième par 10 et ajouter la somme des colonnes obtenues à la dernière colonne. **14.30.** Conseil: l'expression donnée est le développement suivant la i-ième ligne du déterminant de la matrice obtenue de A par répétition de la k-ième ligne à la i-ème place. **14.31.** 2)

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \ldots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1}(t) & \ldots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Conseil: en démontrant la formule, se servir du raisonnement par récurrence sur l'ordre de la matrice. **14.32.** Si l'on note $\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(-\lambda) + a_n$, a_s est la somme de tous les mineurs diagonaux d'ordre s de la matrice A; en particulier, a_1 est la trace de A, a_n le déterminant de A. Conseil: si l'on désigne $p(t) = \det(A + tE)$, on a $a_{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k p(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$. Dans le calcul des dérivées de la fonction $p(t)$, utiliser le résultat du problème 14.31. **14.33.** Les identités 1), 2) sont en général fausses, 3), 4) sont vraies. **14.34.** Conseil: selon le problème 14.30 et la formule de developpement du déterminant suivant une ligne $A({}^tC) = \operatorname{diag}(\det A, \ldots$ $\ldots, \det A)$, d'où l'on obtient $\det C$ si $\det A \neq 0$. La matrice B s'obtient de C par multiplication de la i-ème ligne par $(-1)^i$ et de la j-ième colonne par $(-1)^j$ (pour tous les i, j). **14.35.** Conseil: utiliser la formule $\det \overline{A} = \overline{\det A}$. **14.41.** $(-2)^n a^2$. Conseil: de la $(n+k)$-ième colonne de la matrice $H^{\square}$ soustraire le double de la k-ième colonne $(k = 1, \ldots, n)$ et appliquer le résultat du

problème 14.40. **14.42.** 0. C o n s e i l: les lignes de la matrice $\| A^3 \ A^4 \|^{\square}$ sont les combinaisons linéaires des lignes de $\| A \ A^2 \|^{\square}$ (à coefficients des lignes de la matrice A^2). **14.43.** 1) C o n s e i l: les lignes de la matrice $\| BC \ B \|^{\square}$ sont les combinaisons linéaires des lignes de $\| C \ E \|^{\square}$. Par suite, $\det \begin{Vmatrix} A & B \\ C & E \end{Vmatrix}^{\square} = \det \begin{Vmatrix} A-BC & O \\ C & E \end{Vmatrix}^{\square}$. Ensuite, appliquer le résultat du problème 14.40. 2) Pas toujours. **14.44.** $\det A \cdot (\det B)^n$.

15.1. Les matrices doivent être de même type. **15.2.** 1) 0; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ -11 \\ -16 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -3 & -8 & 21 & -29 \\ 3 & -8 & -19 & 19 \end{Vmatrix}$; 4) $5E$; 5) $2A_{22}$; 6) A_{572}; 7) c_{57}. **15.3.** 1), 2), 4) sont vraies si les matrices sont de même type; 3), 5) sont toujours vraies. **15.4.** 1) On peut le faire si $m = n$; 2) oui. **15.5.** 1) $\| -1 \|$; 2) $\begin{Vmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 8 & 14 \\ 8 & 14 \end{Vmatrix}$; 4) $\| 1 \ \ 1 \|$; 5) $\| 0 \ \ 3 \ \ 2 \|$; 6) c_{172}; 7) A_{115}; 8) $\| 6 \ \ 9 \ \ 12 \|$; 9) c_{173}; 10) E; 11) A_{606}; 12) A_{607}; 13) A_{246}; 14) E; 15) A_{618}; 16) nA_{616}. **15.6.** 1) Le nombre des colonnes de A est égal au nombre des lignes de B; 2) le nombre des lignes de A est égal au nombre des colonnes de B; 3) le nombre des colonnes de A est égal au nombre des lignes de B, le nombre des lignes de A est égal au nombre des colonnes de B. **15.7.** Le nombre des colonnes de AB est égal à celui de B, et le nombre des lignes de AB à celui de A. **15.8.** B est de type (n, p), ABC est de type (m, q). **15.9.** Les identités sont vraies si sont réalisables les opérations qui y figurent. **15.10.** 1) Le produit n'existe pas; 2) $\begin{Vmatrix} 8 \\ 16 \end{Vmatrix}$; 3) $\| 8 \ \ 16 \|$; 4) $\| -1200 \ \ 1300 \|$. **15.11.** 1) $2^{n-1} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) O pour $n > 1$; 5) A_{43}; 6) A_{14}; 7) A_{603}; 8) E; 9) O. **15.12.** 1) $\begin{Vmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_n \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_1 & & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\| 1 \ 2 \ 3 \ 4 \|$; 5) A_9; 6) A_{142}; 7) A_{546}; 8) $-A_{632}$. **15.13.** Les identités 2) à 4) sont vraies si sont réalisables les opérations qui y figurent; 1) est toujours vraie. **15.14.** P s'obtient de E par permutation de la i-ième et de la k-ième ligne. **15.17.** A, B sont des matrices carrées du même ordre. **15.18.** 1) $2A_5$; 2) O. **15.20.** 1) A_5; 2) $-{}^tA_{16}$. **15.22.** 1) E; 2) O; 3) O; 4) $-E$; 5) A_{247}. **15.23.** 1) O; 2) A_{248}. **15.24.** Les identités 1) à 3) sont vraies si les matrices A et B sont commutables. **15.26.** La k-ième ligne de AB est égale au produit de la k-ième ligne de A par la matrice B. **15.28.** La k-ième ligne de la matrice AB est égale à la combinaison linéaire des

lignes de la matrice B, dont les coefficients sont les éléments de la k-ième ligne de A. **15.29.** C o n s e i l: voir problème 15.26. **15.30.** 1) Si on permute deux colonnes de la matrice B, les colonnes correspondantes de AB sont également permutées; 2) si on multiplie la k-ième colonne de la matrice B par le nombre λ, la k-ième colonne de AB est également multipliée par λ; 3) si à la k-ième colonne de B on ajoute la j-ième colonne, la matrice AB subit la même transformation élémentaire. **15.31.** C o n s e i l: pour une colonne composée de deux éléments, les transformations sont les suivantes: $\left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} a+b \\ b \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} a+b \\ b-(a+b) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a+b \\ -a \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} b \\ -a \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right\|$. **15.32.** a_{ik} si $A = \| a_{ik} \|$. **15.33.** 1) Matrice dont toutes les lignes sont nulles à l'exception de la i-ième à la place de laquelle se trouve la j-ième ligne de A ; 2) matrice dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception de la j-ième à la place de laquelle se trouve la i-ième colonne de A. **15.34.** C o n s e i l: prendre en guise de ξ, η toutes les colonnes possibles de la matrice unité. **15.36.** 1) Multiplier A à droite par la colonne ${}^t\| 1 \ 0 \ 0 \ \ldots 0 \|$; 2) multiplier A à gauche par la ligne $\| 1 \ 0 \ \ldots \ 0 \|$. **15.37, 15.38.** La matrice K s'obtient à partir de E par une même transformation élémentaire. **15.40.** C o n s e i l: si $A = \left\|\begin{matrix} a & b \\ ta & tb \end{matrix}\right\|$, $A^m = (a + tb)^{m-1} A$. **15.43.** L'assertion 1) n'est pas en général vraie pour les matrices rectangulaires Exemple: $A_{393} \cdot A_{128} = E$ (a, b, sont des nombres quelconques). **15.44**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

ou, sous la forme matricielle, $Ax = e_j$, où e_j est la j-ième colonne de E. **15.45.** 1) $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{matrix}\right\|$; 2) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} 0 & & \lambda_n^{-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_1^{-1} & & 0 \end{matrix}\right\|$; 4) A_{24}; 5) ${}^tA_{77}$; 6) A_{25}; 7) A_{245}; 8) $\frac{1}{9} A_{203}$; 9) $\frac{1}{9} A_{202}$; 10) A_{229}. **15.47.** 1) $\left\|\begin{matrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 2) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\|$; 4) $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 5) $\left\|\begin{matrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 6) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 7) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 8) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|$; 9) $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 10) $\left\|\begin{matrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 11) A_{200}. **15.48.** L'assertion 6) est en général fausse. **15.51.** On fournit l'une des réponses possibles 1) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 2) $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|$; 4) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \times$

$\times\begin{Vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{Vmatrix}$. **15.52.** 1) $E\sim A^{-1}$; $B\sim A^{-1}B$; 2) $E\sim A^{-1}$; $B\sim BA^{-1}$. **15.53.** 1) On effectue avec les lignes de la matrice $\|A\ E\|^{\square}$ (c'est-à-dire avec les lignes de A et E) les transformations élémentaires qui réduisent A en E. On obtient ainsi la matrice E à la place de A, et la matrice A^{-1} à la place de E. 2) On effectue avec les colonnes de la matrice $\begin{Vmatrix}A\\E\end{Vmatrix}^{\square}$ les transformations élémentaires qui réduisent A en E. De ce fait, à la place de E on trouve la matrice A^{-1}. **15.54.** 1) $\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{6}\begin{Vmatrix}2&-3&1&0\\-2&0&2&0\\6&3&-3&0\\0&0&0&2\end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix}1&-1&0&\dots&0\\0&1&-1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{Vmatrix}$; 4) $-A_{430}$; 5) $-A_{432}$; 6) A_{450}; 7) $\frac{1}{7}A_{456}$; 8) A_{410}; 9) A_{602}; 10). ${}^tA_{614}$; 11) A_{617}; 12) A_{618}; 13) A_{637}. **15.55.** $A^{-1}=-(A+E)$. **15.62.** 1) On effectue avec les lignes de la matrice $\|A\ B\|$ les transformations élémentaires qui réduisent la matrice A en E. Il en résulte qu'à la place de A on trouve E et à la place de B on obtient la matrice $A^{-1}B$. 2) On effectue avec les colonnes de la matrice $\begin{Vmatrix}A\\B\end{Vmatrix}^{\square}$ les transformations élémentaires qui réduisent B en E. De ce fait, à la place de A on trouve la matrice AB^{-1}. **15.63.** 1) A_{66}; 2), 3) $\frac{1}{3}A_{205}$; 4) $\frac{1}{4}A_{208}$; 5) A_{437}; 6) A_{617}. **15.64.** 1) O; 2) $A^{-1}B$; 3) BA^{-1}; 4) $A^{-1}BC^{-1}$; 5) $A^{-1}B-C$. **15.65.** 1) $\begin{Vmatrix}1&-2\\0&1\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}5&-8\\2&-3\end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix}-7\\24\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}21&-14&-10\\-10&7&5\\-4&3&2\end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{Vmatrix}$; 6) pas de solutions. *Dans les réponses aux problèmes* 7) *à* 11), *a, b, c sont des nombres quelconques*: 7) $\begin{Vmatrix}a&b\\0&a\end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix}a&b\\1-a&-1-b\end{Vmatrix}$; 9) $\begin{Vmatrix}a&1-a\\b&1-b\end{Vmatrix}$; 10) $\begin{Vmatrix}a&b\\-a&b\end{Vmatrix}$; 11) $\begin{Vmatrix}a&b&c\\1-a&2-b&4-c\end{Vmatrix}$; 12) A_{127}; 13) $\frac{1}{9}c_{92}$; 14) A_{392}; 15) pas de solutions; 16) A_{244}. **15.70.** Conseil: poser $B=E_{kk}$, puis calculer AB et BA, et appliquer le résultat du problème 15.67. **15.71.** Conseil: utiliser le problème 15.70. **15.72.** Voir le problème 15.71. **15.73.** Matrices scalaires. **15.74.** 1) $-A_{82}$; 2) A_{86}; 3) A_{83}; 4) A_{84}. **15.76.** 1) Antihermitienne; 2), 9) symétriques, 3), 4) hermitiennes; 5), 10), 11) orthogonales; 6) diagonale; 7) triangulaire; 8) symétrique gauche; 9) unitaire, 10) matrice de permutation. **15.79.** 1) $\begin{Vmatrix}a&b+ic\\b-ic&d\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}ia&b+ic\\-b+ic&id\end{Vmatrix}$ (a, b, c, d sont des nombres réels quelconques); 3) $\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix}$. **15.87.** La

matrice inverse est la transposée de la matrice donnée. 15.88. La matrice inverse est l'adjointe de la matrice donnée: 1) A_{103}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{489}$. 15.89. Soient $A = \| a_{ij} \|$, $B = \| b_{ij} \|$, $C = AB = \| c_{ij} \|$. Dans ce cas, on a sur la diagonale principale de C: $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$; sur la diagonale non principale: $c_{i,i+1} = a_{ii} b_{i,i+1} + a_{i,i+1} b_{i+1,i+1}$, sur la m-ième diagonale non principale: $c_{i,i+m} = a_{ii} b_{i,i+m} + a_{i,i+1} b_{i+1,i+m} + \ldots + a_{i,i+m} b_{i+m,i+m}$. Au-dessous de la diagonale principale se disposent des zéros. 15.92. $AB = -BA$. 15.94. La décomposition est unique: $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. 15.95. 1) $A_{59} + A_{20}$; 2) $E + A_{20}$; 3) $A_{242} + A_{233}$. 15.100. La décomposition est unique: $A = \frac{1}{2}(A + {}^t\bar{A}) + \frac{1}{2}(A - {}^t\bar{A})$. 15.104. Ces propriétés garantissent l'orthogonalité de la matrice. 15.107. Conseil: vérifier les propriétés formulées dans le problème 15.104 pour une matrice orthogonale. 15.108. Conseil: la multiplication à gauche par une matrice de permutation équivaut à la permutation des lignes de la matrice multipliée. 15.109. Les éléments diagonaux sont égaux ou 1, ou −1. 15.110. Pour tous les i on a $|\lambda_i| = 1$. 15.111. 1), 2), 3), 6), 13) stochastiques; 4), 7), 8), 9), 12), 14) nilpotentes avec indices de nilpotence égaux respectivement à 2, 3, 2, 2, 3, n; 1), 6), 10), 11) périodiques de périodes égaux respectivement à 2, 2, 4, 4; 5) périodique pour $\alpha = 2\pi p/q$, sa période est q pour $p \neq 0$ (p un entier, q un nombre naturel, la fraction est irréductible) et la période est 1 pour $\alpha = 0$. 15.113. Conseil: utiliser les problèmes 15.112, 15.40. 15.115. Conseil: si $A^k = O$, $B^l = O$, on a $(AB)^{kl} = O$ et $(A + B)^{k+l} = O$. 15.116. AB est de période $k = lm$, où l, m sont des périodes de A, B. 15.117. Conseil: multiplier les deux membres de l'égalité par $E - A$. 15.123. Conseil: utiliser les résultats des problèmes 15.121, 15.122. 15.124. Par toujours. Exemples: A_{14} n'est pas inversible, $\left(\frac{1}{4} A_{28}\right)^{-1}$ n'est pas stochastique, mais les matrices de permutation sont stochastiques avec leurs inverses. 15.125. Si la matrice est une matrice de permutation. 15.127. $\sum_1^n a_{ii}^m$ si $A = \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Conseil: voir problème 15.89. 15.128. 1) $\sum_{i,k} a_{ik}^2$; 2) $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2$ si $A = \| a_{ik} \|$. 15.131. Si $A = \| A_{ij} \|$, $B = \| B_{ij} \|$ $(i = 1, 2)$, pour que AB existe, il faut, outre la condition qui découle de la définition d'une matrice composée de blocs, que la largeur de A_{11} soit égale à la hauteur de B_{11} et que la largeur de A_{12} soit égale à la hauteur de B_{21}. 15.132. $\begin{Vmatrix} M & N \\ O & P \end{Vmatrix}^{\square} \cdot \begin{Vmatrix} D & F \\ O & G \end{Vmatrix}^{\square} = \begin{Vmatrix} MD & MF + NG \\ O & PG \end{Vmatrix}^{\square}$. 15.133. 1) Si $A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Vmatrix}$, il faut, outre les conditions qui découlent de la définition d'une matrice composée de blocs, que la largeur de la matrice A_{11} soit égale à la hauteur de B_1 et la largeur de A_{12} soit égale à la hauteur de B_2. 3) $A^{\square} B^{\square} = \begin{Vmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{Vmatrix}^{\square}$. 15.134. 1) à 3) Les nombres des blocs sur les diagonales des matrices A, B coïncident, de même que les ordres des blocs diagonaux ayant les numéros identiques. 4) Pour que $AB = BA$, il faut et il suffit que soit remplie la condition 1) et que les blocs diagonaux de numéros identiques soient permutables. 15.136. 1) $-A_{422}$;

2) A_{460}; 3) E; 4) A_{439}; 5) A_{461}; 6) A_{345}. **15.137.** 1) $\left\|\begin{matrix} E & -A \\ O & E \end{matrix}\right\|^{\square}$; 2) $\left\|\begin{matrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{matrix}\right\|^{\square}$. **15.138.** 1) $\left\|\begin{matrix} -D \\ E \end{matrix}\right\|^{\square}\cdot h$; 2) $\left\|\begin{matrix} -D \\ E \end{matrix}\right\|^{\square}\cdot h + \left\|\begin{matrix} b \\ o \end{matrix}\right\|^{\square}$ (E est la matrice unité d'ordre s, o est la matrice-colonne nulle de hauteur s, h est une matrice-colonne arbitraire de hauteur s). **15.139.** 1) A_{160}; 2) A_{161}; 3) A_{162}; 4) A_{163}; 5) A_{462}; 6) A_{463}; 7) A_{464}. **15.140.** $a \otimes b = b \otimes a = ba$.

16.3. Oui, si la matrice est nulle. **16.4.** 1) Il n'y a pas de mineur principal; 2) tout élément de la matrice peut être un mineur principal; 3) à 5) les mineurs principaux sont respectivement égaux à $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, 1, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; 6), 7) le mineur $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ par exemple est un mineur principal. Les rangs sont: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 2; 6) 2; 7) 2. **16.5.** 1) Aucune ligne principale; 2) toute ligne; 3) toutes les lignes; 4) la première ligne; 5) la deuxième et la troisième lignes; 6) deux lignes quelconques; 7) tout couple de lignes distinctes, par exemple la première et la deuxième (mais non pas la première et la quatrième). **16.6.** 1) Aucune colonne principale; 2) toute colonne; 3) toutes les colonnes; 4) la deuxième colonne; 5) la première et la deuxième colonnes; 6) deux colonnes quelconques; 7) tout couple de colonnes dont l'une a un numéro supérieur à 3, par exemple, la première et la quatrième (mais non pas la première et la deuxième). **16.7.** Le mineur principal est égal au déterminant de la matrice. Toutes les lignes comme toutes les colonnes de la matrice sont principales. Le rang est égal à l'ordre de la matrice. **16.14.** $\operatorname{Rg} \| A \;\; B \|^{\square} \leqslant \operatorname{Rg} A + \operatorname{Rg} B$. **16.18.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 1; 8) 1; 9) 1; 10) 3; 11) 2; 12) 1; 13) 3; 14) 2; 15) 2; 16) 2; 17) 2; 18) 2; 19) 3; 20) 4; 21) 3; 22) 2; 23) 3; 24) 4; 25) 4; 26) 4; 27) 3; 28), 29) n si n est pair, et $n - 1$ si n est impair. **16.19.** 1) 1 pour $\varepsilon = \pm i$, 2 pour les autres ε; 2) 2 pour tous les λ; 3) 1 pour $\alpha = 1$, 2 pour les autres α; 4) 1 pour $\omega = 1$, 2 pour $\omega = 0$ et $\omega = -2$, 3 pour les autres valeurs de ω; 5) 2 pour $\lambda = 3$, 3 pour les autres valeurs de λ; 6) 1 pour $\lambda = 0$, $n - 1$ pour $\lambda = \frac{1}{2} n (n + 1)$, n pour les autres valeurs de λ; 7) 2 pour $\Sigma = 0$, k si ε est une racine primitive k-ième de 1 et $k < n$, n pour les autres valeurs de ε. **16.20.** 1) 1 pour $\lambda = 4$ et $\lambda = 9$, 2 pour les autres valeurs de λ 2) 1 pour $\lambda = 3$, 2 pour $\lambda = 2$, 3 pour les autres λ; 3) 2 pour $\lambda = \pm i$, 4 pour les autres valeurs de λ. **16.22.** $0 \leqslant \operatorname{Rg} A \leqslant 2$; les estimations sont exactes pour $n \geqslant 2$. **16.23.** $0 \leqslant \operatorname{Rg} A \leqslant 2\ (n - s)$; les estimations sont exactes pour $n \leqslant 2s$. **16.24.** $1 \leqslant \operatorname{Rg} A \leqslant 3$; les estimations sont exactes pour $n \geqslant 3$. **16.25.** 1) $\operatorname{Rg} AB \leqslant \min (\operatorname{Rg} A, \operatorname{Rg} B)$. **16.26.** 1) 1 si $a \neq o$ et $b \neq o$; dans les autres cas, 0. **16.27.** Les deux égalités se vérifient pour $A = B = C = O$ par exemple. **16.28.** C o n s e i l: simplifier la matrice par les transformations élémentaires des lignes et des colonnes en considérant comme principales les lignes et les colonnes choisies. Le rang de la matrice obtenue par leur intersection ne varie pas et la matrice-même se transforme en matrice unité. **16.29.** r. C o n s e i l: dans le cas considéré, le mineur principal de AB est le produit des mineurs principaux des matrices A et B. **16.30.** $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} B = r$. **16.31.** 1) C o n s e i l: la ligne de la matrice K est composée des coefficients du développement des lignes de la matrice A suivant les lignes de M. 2) Toute matrice A peut être représentée comme produit de la matrice M formée des colonnes principales de A par une matrice K, soit: $A = MK$, les colonnes de K étant formées par les coefficients du développement des colonnes de A suivant les colonnes de M. 3) Pour deux décompositions squelettiques quelconques $KM = K'M'$ de A on a les égalités $K' = KS^{-1}$, $M' = SM$, où S est une matrice régulière d'ordre $r = \operatorname{Rg} A$.

16.32. 1) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3/2 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{Vmatrix} \times$ $\times \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. **16.33.** C o n s e i l: représenter la matrice simplifiée correspondante sous la forme de la somme de r matrices de rang 1. **16.34.** 1) à 5) ne sont pas toujours possibles, les exemples sont fournis par les sommes $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 6) est toujours possible. **16.36.** C o n s e i l: représenter la matrice donnée sous la forme du produit d'une matrice de deux lignes par une matrice de deux colonnes. **16.38.** Exemple d'inégalité stricte: $\mathrm{Rg} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} > 0$. **16.40.** C o n s e i l: les lignes de la matrice $\| A \quad B \|^{\square}$ sont des combinaisons linéaires des lignes de $\| E \quad B \|^{\square}$. **16.41.** C o n s e i l: réduire le problème donné au problème 16.37 par des transformations élémentaires.

17.1. 1) $x_1 = -7$, $x_2 = 24$; 2) $x = -1$, $y = 1$; 3) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; 4) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$; 5) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; 6) $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, $t = 1$; 7) $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$; 8) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$, $x_5 = -2$, $x_6 = -1$. **17.2.** 1) c_{20}; 2) c_{21}; 3) c_{93}; 4) c_{94}; 5) c_{66}; 6) $\frac{1}{9} c_{92}$; 7) o. **17.4.** Les composantes des solutions subissent les mêmes transformations élémentaires. C o n s e i l: écrire le système d'équations sous la forme matricielle et exprimer les transformations élémentaires au moyen de la multiplication des matrices. **17.5.** La matrice principale du système se réduit à la matrice unité et on obtient la solution dans la partie droite. **17.6.** 1) c_{22}; 2) $\frac{11}{100} c_8$; 3) c_{24}; 4) c_{93}; 5) c_{51}; 6) c_{83}; 7) $-\frac{1}{2} c_{96}$; 8) $-c_{52}$; 9) c_{174}; 10) c_{171}; 11) $\frac{1}{6} c_{164}$; 12) c_{195}; 13) c_{175}; 14) c_{176}; 15) c_{177}; 16) c_{248}; 17) c_{236}; 18) c_{249}; 19) c_{250}; 20) c_{251}; 21) c_{237}; 22) c_{236}; 23) c_{270}.

18.1. Dans les réponses on désigne par h, h_1, h_2, . . . les constantes arbitraires (paramètres). 1) $x = h$, $y = h$; 2) $x_1 = h_1 - 2h_2$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$; 3) $x_1 = -h_1 - h_2 - h_3 - h_4$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = h_3$, $x_5 = h_4$; 4) $x = y = h$, $z = -2h$; 5) $x = y = z = h$; 6) $x = z = h$, $y = -2h$; 7) $x_1 = h_1 + 10h_2$, $x_2 = h_1 + 7h_2$, $x_3 = h_1$, $x_4 = 2h_2$; 8) $x_1 = 0$, $x_2 = x_4 = h$, $x_3 = -h$; 9) $x_1 = -2h_1 - 3h_2$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = 0$; 10) $x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$, $x_3 = h_3$,

$x_4 = h_1 + h_2 + h_3$, $x_5 = 3h_1 + 2h_2 + h_3$; 11), 12) $x_1 = h_1$, $x_2 = h_1 + h_2$, $x_3 = h_2$, $x_4 = -2h_1$, $x_5 = -h_2$. **18.3.** $k = n - r$, où n est le nombre des colonnes de la matrice, r son rang; $k = 0$ si les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes. **18.4.** 0. **18.5.** Un système d'équations homogènes est toujours compatible. **18.6.** 1) Les colonnes de la matrice du système sont linéairement indépendantes. 2) Les collonnes de la matrice du système sont linéairement dépendantes. **18.7.** 1) c_{24}; 2) A_{120}; 3) A_{401}; 4) c_{97}; 5) A_{150}; 6) A_{151}; 7) A_{156}; 8) c_{180}; 9) A_{410}; 10) A_{413}; 11) A_{164}. **18.8.** Dans les réponses on indique la matrice fondamentale ou, si elle manque, la colonne nulle. 1) c_{98} pour $\lambda = 2$; A_{121} pour $\lambda = 3$; o pour les autres valeurs de λ; 2) c_{98} pour $\lambda = -2$; A_{122} pour $\lambda = 3$; o pour les autres valeurs de λ; 3) A_{120} pour $\lambda = 0$; o pour $\lambda \neq 0$; 4) A_{120} pour $\alpha = 1$; c_{77} pour $\alpha \neq 1$; 5) c_{83} pour $\lambda = 6$; A_{120} pour $\lambda = 0$; o pour les autres valeurs de λ. 6) c_{77} pour $\omega = 0$; A_{120} pour $\omega = 1$; c_{277} pour $\omega = -2$; o pour les autres valeurs de ω. **18.9.** Dans les réponses on indique les matrices fondamentales des systèmes donné et adjoint ou, si elles manquent, les matrices-colonnes nulles. 1) o, c_{100}; 2) c_8, A_{124}; 3) o, c_{52}; 4) c_{101}, c_{101}; 5) o, o; 6) c_{102}, c_{103}; 7) c_{104}, A_{414}; 8) o, A_{154}; 9) o, A_{152}; 10) c_{178}, c_{179}; 11) A_{165}, c_{181}; 12) c_{259}, c_{252}. **18.10.** Oui, si la matrice principale du système est carrée. **18.11.** Oui, si la matrice du système est par exemple symétrique. **18.13.** ΦC, où $\det C \neq 0$. **18.14.** 1) A_{125}; 2) A_{129}; 3) A_{404}. Conseil: toutes les matrices fondamentales s'obtiennent d'une seule matrice par des transformations élémentaires des colonnes. **18.15.** 1) A_{120} et toutes les matrices obtenues par permutation de ses lignes et colonnes; 2) c_{197} et $\frac{1}{2} c_{197}$; 3) A_{130} et A_{131}; 4) A_{398} et toutes les matrices obtenues par permutation de ses lignes et colonnes. **18.16.** $A'y = o$, où $A' = AS$, avec la matrice fondamentale $\Phi' = S^{-1}\Phi$. **18.17.** 1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$; 2) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $5x_1 - x_2 + x_4 = 0$; 3) $x_1 - x_2 = 0$, $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_4 = 0$; 4) $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$; 5) $2x_1 - x_2 + 13x_4 + x_5 = 0$, $x_3 - 5x_4 + x_5 = 0$.

19.1. Dans les réponses on désigne les constantes arbitraires (paramètres) par h, h_1, h_2. 1) $x = 2 + 3h$, $y = 2h$; 2) $x_1 = 1 - h_1 - 2h_2 - 3h_3$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = h_3$; 3) $x = y = h$, $z = 4 - 3h$; 4) $x = h_1 + h_2$, $y = -1 - h_1 + h_2$, $z = -2 + h_1\sqrt{2} + 2h_2$; 5) $x = 14 + h$, $y = -9 - 2h$, $z = h$; 6) $x_1 = 1 - h_1$, $x_2 = -h_2$, $x_3 = 1 + h_1 + 2h_2$, $x_4 = -1 + 2h_1 + 3h_2$; 7) $x_1 = -2 - h$, $x_2 = h$, $x_3 = 2 + h$, $x_4 = 1$; 8) $x_1 = -1 - 5h$, $x_2 = 6h$, $x_3 = -1 - 5h$, $x_4 = 1 + 7h$; 9) $x_1 = 6 - h_1 - h_2 - h_3$, $x_2 = 8 - h_1 - h_2 - h_3$, $x_3 = h_1$, $x_4 = h_2$, $x_5 = h_3$; 10) $x_1 = 2 + 4h_1 - 11h_2 - 14h_3$, $x_2 = 1 - 22h_1 + 32h_2 + 23h_3$, $x_3 = -1 + 3h_1$, $x_4 = -1 + 15h_2$, $x_5 = -1 + 15h_3$. **19.3.** Pas plus que de 1. **19.4.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, $0 = 1$. **19.5.** Les rangs des matrices principale et complète sont égaux à n. **19.6.** Dans les réponses on donne une solution particulière et la matrice fondamentale et, si la solution est unique, la solution du problème. 1) c_{105}, c_{101}; 2) c_{106}, c_{101}; 3) pas de solutions; 4) c_{89}, c_{109}; 5) $\frac{1}{5} c_{68}$, c_{142}; 6) c_{77}, A_{123}; 7) pas de solutions; 8) $-c_{51}$, c_{107}; 9) $-3c_{141}$, c_{108}; 10) c_{90}; 11) $-c_{107}$, c_{104}; 12) c_{110}; 13) c_{96}, c_{111}; 14) $-c_{178}$, A_{154}; 15) c_{193}, A_{144}; 16) c_{182}, A_{155}; 17) c_{183}, A_{157}; 18) c_{185}, A_{158}; 19) c_{183}, A_{157}; 20) c_{184}, A_{151}; 21) c_{185}, A_{158}; 22) c_{186}, A_{173}; 23) pas de solutions; 24) c_{187}, c_{188}; 25) c_{171}, c_{189}; 26) c_{178}; 27) pas de solutions; 28) c_{191}, A_{159}; 29) c_{167}, A_{159}; 30) c_{167}, c_{181}; 31) c_{253}, A_{411}; 32) c_{270}, A_{412}; 33) $\frac{1}{2} c_{255}$, A_{415}; 34) $-\frac{1}{11} c_{266}$, A_{409}; 35) pas de solutions; 36) $-c_{246}$, A_{166}; 37) c_{253}, A_{411}; 38) c_{256}, A_{412}; 39) c_{258}, A_{167}; 40) c_{257}, A_{168}; 41) c_{258}, A_{170}; 42) c_{231}, A_{409}; 43) $-\frac{1}{2} c_{261}$, A_{169};

44) $-\frac{1}{3}c_{258}$, A_{417}; 45) $\frac{1}{3}c_{246}$, A_{418}; 46) $-\frac{1}{4}c_{236}$, A_{412}; 47) c_{259}, c_{260}; 48) c_{261}, c_{258}; 49) c_{272}, c_{262}; 50) $-c_{269}$, A_{419}. **19.7.** On donne dans les réponses: la valeur du paramètre pour laquelle le système est compatible, une solution particulière et la solution fondamentale du système homogène pour cette valeur du paramètre. 1) $\lambda = 15$, $X_0 = c_{112}$, $\Phi = c_{113}$; 2) $\lambda = 9$, $X_0 = c_{89}$, $\Phi = c_{114}$; 3) $\lambda = 7$, $X_0 = c_{77}$, $\Phi = c_{115}$; 4) $\lambda = 12$, $X_0 = c_{89}$, $\Phi = c_{77}$. **19.8.** Combinaisons linéaires dont la somme des coefficients vaut. 1. **19.9.** Combinaisons linéaires dont la somme des coefficients vaut 0. **19.10.** (1, 1, . . ., 1). **19.11.** (0, 0, ..., 0, 1). **19.12.** 1) $Az = \alpha a$; 2) $Az = a + b$; 3) $Az = \alpha a + \beta b$. **19.16.** Conseil: le théorème se réduit aux problèmes 18.12, 19.14. **19.17.** Si le système d'équations comprend m équations à n inconnues et le rang de la matrice principale est r, on a: 1) $n = r$; 2) $m = r$ (Conseil: appliquer le théorème de Fredholm); 3) $n > r$, 4) $m = n = r$. **19.18.** 1) Incompatible; 2) compatible; 3) incompatible. **19.19.** Le système d'équations est compatible pour $\alpha = 0, \alpha = 1$. Pour $\alpha = 0$ la matrice fondamentale est c_{101}; pour $\alpha = 1$ la matrice fondamentale est la même, la solution particulière est c_{77}. 2) Le système d'équations est compatible pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. Pour $\alpha = 0$ la matrice fondamentale est A_{133}; pour $\alpha = 1$ la matrice fondamentale est la même, la solution particulière est $\frac{1}{18}c_{192}$. 3) Le système d'équations est compatible pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$. Pour $\alpha = 0$ la matrice fondamentale est A_{147}; pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ les matrices fondamentales sont les mêmes; la solution particulière est c_{193} pour $\alpha = 1$ et c_{194} pour $\alpha = 2$. **19.20.** Le système est compatible si: 1) tous les λ_i sont distincts, ou 2) $\lambda_i = \mu$ pour un i. Dans le cas 1), la solution est unique: $x_k = \prod \frac{\lambda_i - \mu}{\lambda_i - \lambda_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Dans le cas 2) on peut choisir pour la solution particulière la matrice-colonne dont tous les éléments sont nuls à l'exception de $x_i = 1$. Pour décrire la famille fondamentale de solutions, notons que les inconnues principales sont celles auxquelles correspondent les différentes matrices-colonnes des coefficients. Par suite, la k-ième solution de la famille fondamentale a la k-ième inconnue non principale égale à 1 et l'inconnue principale, à laquelle correspond la même colonne des coefficients, égale à -1; les autres composantes de la k-ième solution de la famille fondamentale sont nulles. **19.21.** Conseil: représenter la solution du système d'équations homogènes comme différence de deux solutions d'un système non homogène. **19.22.** 3) La condition nécessaire et suffisante d'équivalence des équations non triviales $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$, $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = b$, $\ldots$, $h_1x_1 + \ldots + h_nx_n = h$ prises deux à deux est $\operatorname{Rg}\left\| \begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n a \\ b_1 & \ldots & b_n b \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ h_1 & \ldots & h_n h \end{matrix} \right\| = 1$. Conseil: comparer chacune des équations données avec le système obtenu par réunion de toutes ces équations. **19.23.** Le conseil est identique à celui du problème 19.22. **19.24.** Les systèmes sont équivalents. **19.25.** 1) Equivalents; 2) équivalents; 3) ne sont pas équivalents. **19.26.** Les systèmes sont équivalents. **19.32.** Conseil: le système d'équations pour la détermination des coefficients possède la matrice principale de déterminant de Vandermonde $W(a_1, \ldots, a_{n+1})$ (voir problème 14.24,8)). **19.33.** $x^3 - 6x^2 + 11x - 5$. **19.34.** 1) $\operatorname{Rg}\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{matrix} \right\| = 3$;

2) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{Vmatrix}=3.$ **19.35.** $\begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{Vmatrix}=0.$ **19.36.** $\begin{Vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{Vmatrix}=0.$

19.37. 1) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{Vmatrix}<\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$; 2) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{Vmatrix}<\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{Vmatrix}.$

19.38. 1) Les droites se coupent en un point unique; 2) les droites se coupent en un point unique. **19.39.** 1) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{Vmatrix}=4$; 2) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 1 \end{Vmatrix}=4.$

19.40. 1) Tous les points se trouvent dans un même plan; 2) les points considérés ne se trouvent pas dans un même plan. **19.41.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2+c_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$

19.42. 1) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{Vmatrix}=3$; 2) $\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m & 1 \end{Vmatrix}\geqslant 3.$ **19.43.** 1) Tous les points sont alignés. 2) Les points ne sont pas alignés. **19.44.** $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$

Conseil: voir solution du problème 19.35. **19.45.** 1) $r=R=1$; 2) $r=R=2$; 3) $r=1$, $R=2$, où $r=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$, $R=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix}$.
19.46. 1) $r=R=1$; 2) $r=R=3$; 3) $r=R=2$; 4) $r=1$, $R=2$, 5) $r=2$, $R=3$, où $r=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$, $R=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_2 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix}$. **19.47.** 1) Les plans forment un prisme: 2) les plans ont une droite commune. **19.48** 1) $r=R=3$; 2) $r=2$, $R=3$; 3) $r=R=2$; 4) $r=3$, $R=4$, où

$$r=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{Vmatrix}, \quad R=\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{Vmatrix}.$$

19.49. 1) Les droites ne sont pas coplanaires; 2) les droites se coupent.

20.1. 1) Non; 2) Oui. **20.2.** Non. **20.4.** 1) Oui; la dimension est 1. 2) Oui; la dimension est $n-1$. 3) Oui; la dimension est $n-1$. 4) Non. 5) Oui; la dimension est 1. 6) Oui; la dimension est 2. 7) Non. 8) L'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel de dimension 1 pour $\alpha=0°$ et pour $\alpha=90°$, et il

n'est pas un sous-espace vectoriel pour $0° < \alpha < 90°$. **20.5.** La dimension de l'espace est mn. La base est formée par les unités matricielles numérotées dans un certain ordre (voir introduction au § 15). La base canonique est définie dans l'introduction au ch. VIII. **20.6.** 1) Oui ; la dimension est $n(n-1)$. 2) Oui ; la dimension est n. 3) Oui ; la dimension est $n(n+1)/2$. 4) Oui ; la dimension est $n(n+1)/2$. 5) Oui ; la dimension est $n(n-1)/2$; 6) Non. **20.7.** 1) Oui ; 2) oui ; 3) oui ; 4) oui ; 5) non ; 6) non ; 7) oui ; 8) non ; 9) non ; 10) non ; 11) non. **20.8.** 1) La dimension est $n+1$; la base est $(1, t, \ldots, t^n)$. 2) La dimension est $[n/2]+1$, la base est $(1, t^2, \ldots, t^{2k})$ $(k=[n/2])$. 3) La dimension est $[(n+1)/2]$; la base est $(t, t^3, \ldots, t^{2k-1})$ $(k=[(n+1)/2])$. 4) La dimension est $2n+1$, la base est $(1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt)$ 5) La dimension est $n+1$; la base est $(1, \cos t, \ldots, \cos nt)$. 6) La dimension est n ; la base est $(\sin t, \sin 2t, \ldots, \sin nt)$. 7) La dimension est $2n+1$; la base est $(e^{\alpha t}, e^{\alpha t}\cos t, e^{\alpha t}\sin t, \ldots, e^{\alpha t}\cos nt, e^{\alpha t}\sin nt)$. **20.10.** 1) (-11) ; 2) ${}^t(1, -3)$; 3) ${}^t(-3, 1/2, -5)$; 4) ${}^t(5, -11, 14, -2)$. **20.11.** $\left\|\begin{matrix} 0 & 1/2 & -14/3 \\ 7/2 & 1 & -3 \\ 16/3 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|$.

20.12. 1) ${}^t(0, 5)$; 2) ${}^t(-4, 11, 5)$; 3) $\frac{1}{5}\,{}^t(7, 9, 4, 0)$. **20.13.** 1) $c_{29}=10c_{34}-7c_{35}$; 2) $c_{120}=c_{84}-2c_{83}$; 3) $c_{201}=c_{199}-c_{198}-c_{166}$; 4) $c_{205}=-c_{166}+c_{197}$, $c_{206}=c_{166}+c_{197}$. **20.14.** 1) La dimension est 1 ; la base est c_1. 2) La dimension est 2 ; la base est (c_{31}, c_{28}). 6) La dimension est 1 ; la base est c_{31}. 4) La dimension est 2 ; la base est (c_{121}, c_{124}). 5) La dimension est 3 ; la base est $(c_{166}, c_{198}, c_{199})$. 6) La dimension est 2 ; la base est (c_{196}, c_{198}). 7) La dimension est 4 ; la base est $(c_{166}, c_{196}, c_{197}, c_{198})$. 8) La dimension est 0. 9) La dimension est 2 ; la base est (c_{166}, c_{197}). **20.15.** La dimension est 2 ; la base est (A_{391}, A_{390}). **20.16.** La dimension est 3 ; la base est $((1+t)^3, t^3, 1)$. **20.17.** 1) (-2) ; 2) ${}^t(1/4, -1/4)$; 3) ${}^t(1, -2, -1)$; 4) ${}^t(1, -1, 2, -1)$; 5) ${}^t(1, 2, -1, 0, 1)$. **20.18.** ${}^t(-1, 2, -1, 1)$. **20.19.** ${}^t(1, 1, -1, 1, 1, 1)$. **20.20.** ${}^t\left(p_n(\alpha), \frac{1}{1!}p_n'(\alpha), \frac{1}{2!}p_n''(\alpha), \ldots, \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(\alpha)\right.$. **20.21.** ${}^t(4, 2, -3)$. **20.22.** 1) La dimension est 1 ; la base est ${}^t(3, 1)$, 2) La dimension est 1 : la base est ${}^t(0, 1, 1)$. 3) La dimension est 2 ; la base est $({}^t(2, 0, -3), {}^t(1, 3, 0))$. 4) La dimension est 1 ; la base est $(23, -18, 3)$. 5) La dimension est 0. 6) La dimension est 0. 7) La dimension est 3 ; la base est $({}^t(1, 2, 0, 0, 0), {}^t(-13, 0, 10, 2, 0), {}^t(1, 0, 2, 0, -2))$. **20.23.** 1) $x_1-2x_2+x_3=0$; 2) $x_1+x_2=0$; 3) $0=0$; 4) $x_1-x_3=0$, $x_1-2x_2+x_4=0$; 5) $x_1-x_2=0$, $2x_1-x_3=0$, $2x_1-x_4=0$; 6) $3x_1-x_2-2x_3=0$; 7) $0=0$; 8) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. **20.24.** 1) $\|3\|$; $\xi_1=3\xi_1'$; 2) $\left\|\begin{matrix} -6 & 13 \\ 10 & -20 \end{matrix}\right\|$;

$\xi_1=-6\xi_1'+13\xi_2'$, $\xi_2=10\xi_1'-20\xi_2'$; 3) $\left\|\begin{matrix} -5 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{matrix}\right\|$; $\xi_1=-5\xi_1'-4\xi_3'$, $\xi_2=-4\xi_1'-\xi_2'+4\xi_3'$, $\xi_3=13\xi_1'+3\xi_2'-\xi_3'$; 4) $\left\|\begin{matrix} 3/2 & -3/2 & 0 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 11/2 & -7/2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\|$; $\xi_1=\frac{3}{2}\xi_1'-\frac{3}{2}\xi_2'+2\xi_4'$, $\xi_2=-8\xi_1'+9\xi_2'-\xi_3'$, $\xi_3=4\xi_1'-5\xi_2'$, $\xi_4=\frac{11}{2}\xi_1'-\frac{7}{2}\xi_2'+2\xi_3'$.

20.25. $\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ -1 & 7 & 5 & -3 & 5 & 6 \\ -1 & 19 & 13 & -3 & 12 & 13 \\ 4 & 29 & 19 & -3 & 19 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -25 & -287 & -192 & 30 & -186 & -199 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = \xi_1' - 4\xi_2' - 3\xi_3' + 3\xi_4' -$ $- 3\xi_5' - 3\xi_6'$, $\xi_2 = -\xi_1' + 7\xi_2' + 5\xi_3' - 3\xi_4' + 5\xi_5' + 6\xi_6'$, $\xi_3 = -\xi_1' + 19\xi_2' + 13\xi_3' - 3\xi_4' +$ $+ 12\xi_5' + 13\xi_6'$, $\xi_4 = 4\xi_1' + 29\xi_2' + 19\xi_3' - 3\xi_4' + 19\xi_5' + 20\xi_6'$, $\xi_5 - 2\xi_2' + \xi_3' + \xi_5' + \xi_6'$, $\xi_6 = -25\xi_1' - 287\xi_2' - 192\xi_3' + 30\xi_4' - 186\xi_5' - 199\xi_6'$. **20.26.** $\begin{Vmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = 9\xi_1' + 40\xi_2' + 9\xi_3'$, $\xi_2 = -3\xi_1' - 11\xi_2' - 2\xi_3'$, $\xi_3 = 8\xi_1' + 37\xi_2' + 8\xi_3'$. **20.27.** $\begin{Vmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = -18\xi_2' + \xi_3' - 10\xi_4'$, $\xi_2 = -2\xi_2' + \xi_3'$, $\xi_3 = 6\xi_2' +$ $+ 4\xi_4'$, $\xi_4 = \xi_1' - 5\xi_2' - 3\xi_4'$. **20.28.** $\begin{Vmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = \frac{3}{4}\xi_1' + \frac{1}{4}\xi_2' + \frac{1}{2}\xi_3'$, $\xi_2 = \frac{1}{4}\xi_1' + \frac{3}{4}\xi_2' + \frac{1}{2}\xi_3'$, $\xi_3 = -\xi_3'$. **20.29.** 1) La i-ième et la j-ième ligne de la matrice de passage changent de place; 2) la i-ième et la j-ième colonne de la matrice de passage changent de place; 3) la matrice de passage se transforme par symétrie par rapport à son centre. **20.30.** 1) S_1S_2; 2) S_1^{-1}. **20.31.** 1) Les vecteurs e_i' sont colinéaires aux vecteurs e_i, $i = 1, 2, 3$; 2) e_1' et e_1 sont colinéaires, e_1, e_2, e_2' sont coplanaires; 3) e_3' et e_3 sont colinéaires, e_2, e_3, e_2' sont coplanaires.

21.5. 1) $x = a_1 - 4b_1$; 2) $x = a_1 - 2a_2 \in \mathcal{P}$; 3) $x = y + z$, $y = -a_1 - 3a_2 = {}^t(-7, -9, -10) \in \mathcal{P}$, $z = 9b_1 \in \mathcal{Q}$; 4) $x = -2b_1 \in \mathcal{Q}$; 5) $x = y + z$, $y = -\frac{13}{a}a_1 + \frac{29}{2}a_2 = {}^t(8, 8, 8, 37) \in \mathcal{P}$, $z = -9b_1 - 5b_2 = {}^t(-9, 0, -14, -32) \in \mathcal{Q}$. **21.6.** 1) x; 2) o; 3) $\frac{1}{4}a_1 = {}^t\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$; 4) $2a_1 + a_2 = {}^t(-1, 4, 2)$; 5) $a_2 - a_1 = {}^t(2, -6, 5, 1)$. **21.7.** 1) La dimension de la somme est 2 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, a_3). La dimension de l'intersection vaut 1 (l'intersection se confond avec le second sous-espace); la base est b_1. 2) La dimension de la somme vaut 3 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, a_2, a_3). La dimension de l'intersection vaut 2 (l'intersection se confond avec le second sous-espace); la base est (b_1, b_2). 3) La dimension de la somme vaut 3 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, b_1, b_2). La dimension de l'intersection vaut 0 (la somme est directe). 4) La dimension de la somme vaut 3 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection vaut 1; la base est (1, 0, 1). 5) La dimension de la somme vaut 3 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection vaut 1; la base est (3, 1, 0). 6) La dimension de la somme vaut 3 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection vaut 1; la base est (40, 45, 43). 7) La dimension de la somme vaut 3; la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection vaut 1; la base est ${}^t(2, -6, 7, -2)$. 8) La dimension de la somme vaut 4 (la somme se confond avec tout l'espace); la base est

(a_1, a_2, b_1, b_3). La dimension de l'intersection vaut 0 (la somme est directe). 9) La dimension de la somme vaut 3 ; la base est (a_1, a_2, a_3). La dimension de l'intersection vaut 2 ; la base est (b_1, b_2). La somme se confond avec le premier sous-espace, l'intersection avec le second. 10) La dimension de la somme vaut 4 (la somme se confond avec tout l'espace) ; la base est (a_1, a_2, a_3, b_1). La dimension de l'intersection vaut 2 ; la base est (b_1, a_1). **21.8.** La dimension de la somme vaut 5 ; la base est $(A_{202}, A_{201}, A_{209}, A_{204}, A_{256})$. La dimension de l'intersection vaut 2 ; la base est (A_{202}, A_{258}). **21.9.** La dimension de la somme vaut 3 ; la base est $(1 + 2t + t^3, 1 + t^2, 1 + t + t^2)$. La dimension de l'intersection vaut 1 ; la base est $2 + 3t + t^2 + t^3$. **21.14.** 2) Si $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ sont des espaces unidimensionnels engendrés par trois vecteurs coplanaires, mais non pas colinéaires, on a $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$.

22.1. 1) $(4-8i)$; 2) ${}^t(-2+3i,\ 9+5i)$; 3) $\frac{1}{2}\,{}^t(4+i,\ -18i,\ 1-10i)$. **22.2.** $\begin{Vmatrix} 1+5i & -6+i \\ -11+13i & -8-14i \end{Vmatrix}$. **22.3.** 1) ${}^t(-1,\ -8i,\ -3+6i)$; 2) ${}^t(2,\ -10i,\ 4-6i)$. **22.4.** 1) $c_{43}=(-1+i)\,c_{26}$; 2) $c_{40}=-\frac{2+9i}{5}c_{26}+\frac{-3+4i}{5}c_{30}$; 3) $c_{133}=-2c_{131}+c_{132}$. **22.5.** 1) La dimension vaut 1 ; la base est c_5. 2) La dimension vaut 2 ; la base est $c_{27}, c_{39})$. 3) La dimension vaut 1 ; la base est c_{26}. 4) La dimension vaut 1 ; la base est c_{134}. 5) La dimension vaut 2 ; la base est (c_{215}, c_{275}). 6) La dimension vaut 3 ; la base est $(c_{166}, c_{215}, c_{196})$. **22.6.** 1) $(1+3i)$; 2) ${}^t(1+2i,\ 2-i)$; 3) ${}^t(1, 2)$; 4) ${}^t(1+i,\ -3i)$; 5) ${}^t(1,\ -i,\ 2)$; 6) ${}^t(1+i,\ -i,\ 0,\ 2)$. **22.7.** 1) La dimension vaut 0. 2) La dimension vaut 1 ; la base est $1+3i,\ -2)$. 3) La dimension vaut 1 ; la base est ${}^t(1,\ 1,\ 1)$. La dimension vaut 2 ; la base est $({}^t(1-i,\ -1,\ 0),\ {}^t(2+i,\ 0,\ -1))$. 5) La dimension vaut 2 ; la base est $({}^t(-1,\ i,\ 1,\ 0),\ {}^t(1+i,\ 1,\ 0,\ -1))$. **22.8.** 1) $(3-3i)\,x_1-2x_2=0$; 2) $0=0$; 3) $x_1-x_2=0$, $x_1-x_3=0$, $(1-i)\,x_1-x_4=0$; 4) $(13-4i)\,x_1+37x_2-(11+45i)\,x_3=0$; 5) $(1-7i)\,x_1+(-11+7i)\,x_2+10x_3=0$, $(-19+13i)\,x_1+(9-3i)\,x_2+10x_4=0$. **22.9.** 1) $\|4+i\|$; $\xi_1=(4+i)\,\xi_1'$; 2) $\begin{Vmatrix} \frac{-1-6i}{2} & \frac{-29-18i}{2} \\ \frac{2+i}{2} & \frac{10-5i}{2} \end{Vmatrix}$;

$$\xi_1=-\frac{1+6i}{2}\xi_1'-\frac{29+18i}{2}\xi_2',\quad \xi_2=\frac{2+i}{2}\xi_1'+\frac{10-5i}{2}\xi_2' ;$$

$$3)\ \begin{Vmatrix} 2-i & -1-2i & 1-i \\ -2-i & 3+10i & -1+5i \\ 1+2i & 1-8i & 1-4i \end{Vmatrix} ;$$

$\xi_1=(2-i)\,\xi_1'-(1+2i)\,\xi_2'+(1-i)\,\xi_3'$, $\xi_2=-(2+i)\,\xi_1'+(3+10i)\,\xi_2'+(-1+5i)\,\xi_3'$; $\xi_3=(1+2i)\,\xi_1'+(1-8i)\,\xi_2'+(1-4i)\,\xi_3'$. **22.10.** 1) $x=ic_{44}$; 2) o, 3) $\frac{3}{5}(2-9i)\,c_{44}=\frac{3}{5}\,{}^t(9+2i,\ 4-18i)$. **22.11.** 1) La dimension de la somme est 3 (la somme se confond avec tout l'espace) ; la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection est 1 ; la base est ${}^t(0, 4, 3-i)$. 2) La dimension de la somme est 3 (la somme se confond avec tout l'espace) ; la base est (a_1, a_2, b_1). La dimension de l'intersection est 1 ; la base est ${}^t(9+10i,\ 2-16i,\ -10-3i)$. 3) La dimension de la somme est 4 (la somme se confond avec tout l'espace) ; la base est (a_1, a_2, a_4, b_4). La dimension de l'in-

tersection est 2; la base est (b_1, b_2). **22.12.** 2) la base est composée des vecteurs ${}^t(1, 0)$, ${}^t(i, 0)$, ${}^t(0, 1)$, ${}^t(0, i)$. Le vecteur c_{27} possède dans cette base la matrice-colonne de coordonnées ${}^t(-3, 2, 0, -1)$. **22.13.** 1) L'espace complexe est $(n+1)$-dimensionnel; la base est $(1, t, \ldots, t^n)$. L'espace réel est $(2n+2)$-dimensionnel; la base est $(1, i, t, it, \ldots, t^n, it^n)$. 2) Dans l'espace complexe la matrice-colonne de coordonnées est égale à $(1-2i, 3+i, -3)$. Dans l'espace réel elle est égale à ${}^t(1, -2, 3, 1, -3, 0)$.

23.1. 1), 5), 9) la transformation est linéaire; 2), 3), 4), 6), 7), 8), 10) non. **23.2.** Dans toute base: 1) la matrice nulle; 2) la matrice unité E; 3) la matrice scalaire λE (λ est le rapport d'homothétie). 1) Ne l'est pas; 2), 3) est un isomorphisme. **23.4.** Pour $\mathscr{M} = \mathscr{L}$. **23.5.** Non pour $\{o\} \neq \mathscr{M} \neq \mathscr{L}$. **23.6.** 1) Projection orthogonale sur la droite $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$; 2) projection sur le sous-espace $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$ parallèlement au sous-espace $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 3) projection orthogonale sur le sous-espace $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 4) projection sur le sous-espace $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ parallèlement au vecteur $\mathbf{a}$; 5) symétrie orthogonale par rapport au sous-espace $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 6) symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$. **23.7.** Produit d'une projection orthogonale sur le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ par une rotation de $\pi/2$ autour de la droite $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$. 2) Produit d'une projection sur le plan $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, d'une rotation d'angle $\pi/2$ autour de la droite $\mathbf{x} = t\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ et d'une homothétie de rapport $|\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\,|$. **23.8.** 1) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}$; le noyau est la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{n}] = 0$; l'ensemble des valeurs est le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\operatorname{Rg}\varphi = 2$; 2) $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$; le noyau est le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$; l'ensemble des valeurs est la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$; $\operatorname{Rg}\varphi = 1$; 3) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a}$, le noyau est la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$, l'ensemble des valeurs est le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\operatorname{Rg}\varphi = 2$; 4) $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a}$; le noyau est le plan $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; l'ensemble des valeurs est la droite $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$; $\operatorname{Rg}\varphi = 1$; 5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$; 7) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a}$; 8) $\varphi(\mathbf{x}) = 2\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\,\mathbf{a} - \mathbf{x}$; dans 5) à 8) les transformations sont des isomorphismes; $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$; $\operatorname{Im}\varphi$ est tout l'espace; $\operatorname{Rg}\varphi = 3$. **23.9.** 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}$. Conseil: utiliser les résultats des problèmes 23.8, 1) et 2). **23.10.** 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{Vmatrix}$. Conseil: il est le même que dans le problème 23.9. **23.11.** Si la base initiale de $\mathscr{E}_3$ est orthonormée et la base de $\mathscr{L}$ est composée d'un vecteur $\mathbf{a}$ (cas d'une

droite) ou d'un couple de vecteurs a, b (cas d'un plan), on a dans 23.9: 1) $\|0\ \ 1\ \ 0\|$ pour a(0, 1, 0); 2) $\frac{1}{3}\|1\ \ 1\ \ 1\|$ pour a(1, 1, 1); 3) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{Vmatrix}$ pour a(2, −1, −1), b(−1, 2, −1); 4) $-\frac{1}{6}\begin{Vmatrix}8 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 0\end{Vmatrix}$; et on a dans 23.10: 1) $\begin{Vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{Vmatrix}$ pour a(0, 1, 0), b(0, 0, 1); 2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{Vmatrix}$ pour a(1, 1, 0), b(0, 0, 1); 3) $\|2\ \ 3\ \ -1\|$ pour a(−3, 4, 5); 4) $\|1/2\ \ 3/4\ \ -1\|$ pour a(1, 2, 3). **23.12.** 1) $\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{9}\begin{Vmatrix}-1 & 4 & 8\\ 4 & -7 & 4\\ 8 & 4 & -1\end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{Vmatrix}$. Conseil: utiliser les résultats des problèmes 23.8,5) et 6). **23.13.** 1) $\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{Vmatrix}$. Conseil: utiliser les résultats des problèmes 23.8, 7) et 8) **23.14.** 1) $\begin{Vmatrix}\cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0\\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mp 1\\ 0 & \pm 1 & 0\end{Vmatrix}$; 3) A_{259} et A_{260}. **23.15.** Dans 1) et 2) on a Ker $\varphi = \mathcal{L}''$, Im $\varphi = \mathcal{L}'$. Si la base dans $\mathcal{L}'$ est formée par les k premiers vecteurs de base de l'espace $\mathcal{L}$, on a: 1) diag (1, ..., 1, 0, ..., 0) (k unités); 2) $\|E_k\ \ O\|^{\square}$ (E_k est la matrice unité d'ordre k). **23.16.** diag (1, ..., 1, −1, ..., −1); φ est un isomorphisme (le nombre d'unités est égal à sa dimension de $\mathcal{L}'$). **23.17.** 5) Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base $\mathcal{M}$. Si les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ la complètent jusqu'à une base de $\mathcal{L}$, la matrice de l'application $\tilde{\varphi}$ dans le couple de bases $(e_1, \ldots, e_n)$, $(e_1, \ldots, e_r)$ s'obtient à partir de la matrice de la transformation φ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par élimination des lignes de numéros $r+1, \ldots, n$. **23.22.** 1) Rg $\varphi = \dim \mathcal{L} = \dim \tilde{\mathcal{L}}$, Ker $\varphi = \{o\}$; 2) $B = A^{-1}$. **23.25.** Conseil: choisir une base dans $\mathcal{L}$ qui contient la base du sous-espace (si ce dernier n'est pas nul). **23.26.** 1) $-2a_1$, a_2, $4a_3$. Produit des tractions de rapports −2, 1, 4 dans les directions des vecteurs a_1, a_2, a_3 respectivement. 2) $3a_1$, $3a_2$, $2a_3$. Homothétie de rapport 3 dans le plan $x = sa_1 + ta_2$ et traction de rapport 2 dans la direction du vecteur a_3. 3) o, ${}^t(5,\ 0,\ -5)$, ${}^t(11,\ 5,\ -1)$. 4) a_1, ia_2, $-ia_3$. Produit des tractions de l'espace arithmétique complexe dans les directions des vecteurs a_1, a_2, a_3, de rapports 1, i, $-i$ respectivement. 5) $-a_1$, $(1+i)\,a_2$, $(1-i)\,a_3$. Produit des tractions de l'espace arithmétique complexe dans les directions des vecteurs a_1, a_2, a_3, de rapports −1, $1+i$, $1-i$ respectivement. **23.27.** 1) ${}^t(0,\ 6,\ 18)$; 2) o; 3) ${}^t(-8,\ -11,\ 3,\ 0,\ -13)$; 4) $\varphi(a_1) = (2n-1)\,a_1$, $\varphi(a_k) = -a_k$ $(k = 2, \ldots, n)$. *Dans les réponses aux problèmes* 23.28, 23.29 et 23.31 *on fournit les matrices-colonnes de coordonnées des vecteurs de base des vecteurs de base des sous-espaces recherchés.* **23.28.** 1) ${}^t(12,\ -5)$ et ${}^t(5,\ 12)$; 2) ${}^t(1,\ 1,\ -1)$ ${}^t(3,\ 0,\ 2)$ et ${}^t(1,\ 1,\ -1)$; 3) ${}^t(1,\ -1,\ 1)$ et ${}^t(1,\ 1, 0)$, ${}^t(0, 1, -1)$;

4) ${}^t(0, 1, 1, 0)$, ${}^t(0, 0, 1, 1)$ et ${}^t(1, 1, -3, -3)$, ${}^t(1, -1, -1, 1)$; 5), 6) $\operatorname{Ker}\varphi=\{o\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathscr{L}$, φ est un isomorphisme **23.29.** 1) ${}^t(0, 2, 0, 1)$, ${}^t(0, -3, 1, 0)$ et ${}^t(0, 1, 0)$, ${}^t(1, 0, -2)$; 2) φ est injective, $\operatorname{Ker}\varphi=\{o\}$; ${}^t(5, 3, -1, 7)$, ${}^t(5, 2, 3, 7)$, ${}^t(9, 7, 2, 6)$. 3) ${}^t(3, 1, 0)$, ${}^t(2, 0, -1)$ et ${}^t(-2, 1, 7, -3)$; 4) ${}^t(2, 0, 1, -1, 0)$, ${}^t(0, 1, 2, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 1, 0, 1)$; φ est surjective; 5) ${}^t(0, 1, 1)$ et ${}^t(-2, -2, -3, 4,$ 6) ${}^t(2, 2, 2, 1, -5)$; 6) ${}^t(1, 1, 0, -3, -6)$, ${}^t(-2, 0, 1, 5, 10)$; φ est surjective. **23.30.** C, C_1, C_2, C_3 sont ici des nombres réels quelconques. 1) ${}^t(0, 0, 1/10, 1/5)+$ $+C_1({}^t(10, 0, -7, 6))+C_2({}^t(0, 5, -1, -7))$; 2) ${}^t(7/2, 0, -1/2, 0, 0)+$ $+C_1({}^t(19, 2, -5, 0, 0))+C_2({}^t(41, 0, -11, 2, 0))+C_3({}^t(1, 0, -2, 0, 1))$; 3) ${}^t(0, 0, 1)+C({}^t(1, -2, -3))$; 4) ${}^t(0, 1, 0, 0)+C({}^t(2, 2, 1, -1))$. **23.31.** 1) ${}^t(1, 1, 0, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 2, 0, 0)$, ${}^t(2, 0, 1, -1, 0)$, ${}^t(0, 0, 1, 0, 1)$; 2) ${}^t(1, 1, -1, -1)$, ${}^t(0, 2, 1, 0)$, ${}^t(7, 23, 0, -11)$; 3) ${}^t(0, 3, -1, 0, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 0, -1, 0, 0)$, ${}^t(0, 4, 0, 0, 0, -1)$, ${}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

23.34. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. **23.35.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **23.36.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

23.37. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **23.38.** L'isomorphisme est défini par l'égalité:

1) $\varphi(x)=\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{Vmatrix}$, 2) $\varphi(x)=\begin{Vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{Vmatrix}$, 3) $\varphi(x)=$ $=\begin{Vmatrix} ix_3 & x_1+ix_2 \\ -x_1+ix_2 & -ix_3 \end{Vmatrix}$, où $x={}^t(x_1, x_2, x_3)$. **23.40.** 1) Le noyau est constitué par les polynômes de degré zéro et l'ensemble des valeurs par les polynômes de degré $\leqslant m-1$; a), b), A_{594} $(n=m+1)$; c) A_{613} $(n=m+1)$. 2) A_{595} (à m lignes et $m+1$ colonnes). **23.41.** 1) Le noyau est composé des polynômes de degré zéro; l'ensemble des valeurs est $\mathscr{P}$; le rang est n; $A=A_{596}$; 2) le noyau est $\{0\}$; l'ensemble des valeurs est $\mathfrak{A}$; le rang est $n+1$; $A=\operatorname{diag}(1, 3, \ldots, 2n+1)$. **23.42.** A_{612} $(n=m+$ $+1)$. **23.43.** 1) $\operatorname{diag}\left(0, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{Vmatrix}\right)$ (matrice d'ordre $2n+1$); 2) $\operatorname{diag}(1, \ldots, n)$, $\operatorname{diag}(1, 1/2, \ldots, 1/n)$. **23.44.** 1) Le noyau est $\{0\}$; l'ensemble des valeurs est le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant n$ à terme constant nul; le rang est n; $A=A_{597}$. 2) $\mathscr{M}$, la transformation est injective mais non pas surjective. **23.45.** 1, 3) Les applications sont injectives mais non pas sur-

jectives et inversibles. 2) L'application inverse est la dérivation. **23.46.** Polynômes pairs. **23.47.** 1) diag (A, A). La base du noyau est formée de $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; la base de l'image est composée de $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$. 2) A_{589}. La base du noyau est formée de $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$; φ est surjective. **23.48.** 1) Le noyau est composé des matrices dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles; φ est surjective. 2) Matrice $\| F_{m(n-1)}\ O \|$ à $m(n-1)$ lignes et mn colonnes. 3) φ est la multiplication à droite par la matrice $\begin{Vmatrix} E_{n-1} \\ O \end{Vmatrix}$ à n lignes et $n-1$ colonnes. **23.49.** Le noyau est engendré par le vecteur ${}^t(1, -2, 1, -2)$; l'ensemble des valeurs se compose des matrices réelles de la forme $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & a \end{Vmatrix}$; $\mathrm{Rg}\,\varphi = 3$; $A = A_{496}$. **23.50.** A_{590}. **23.51.** 1) Le noyau est formé des polynômes de la forme a_0x^n, l'ensemble des valeurs est composé des polynômes sans y^n ($a_n = 0$); 2) le noyau est formé des polynômes de la forme a_ny^n, l'ensemble des valeurs est composé des polynômes sans x^n ($a_0 = 0$); 3) pour un n impair la transformation est un isomorphisme, pour $n = 2m$ son noyau est composé des polynômes de la forme $a_mx^my^m$, l'ensemble des valeurs est composé des polynômes ne contenant pas x^my^m. Les matrices sont:

$$1)\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix};\quad 2)\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$3)\ \begin{Vmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -n+2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{Vmatrix}.$$

23.53. 1) Pour $k = \dim \mathcal{L}$. 2) a) Soit $(a_1, \dots, a_r)$ la base dans l'enveloppe linéaire des vecteurs $a_1, \dots, a_k$. Dans ce cas, $a_{r+1}, \dots, a_k$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $a_1, \dots, a_k$. Dans ce cas, $a_{r+1}, \dots, a_k$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $a_1, \dots, a_r$ comme le sont $b_{r+1}, \dots, b_k$ des vecteurs $b_1, \dots, b_r$. b) La condition 1) et $r = \dim \mathcal{L}$. **23.54.** 1) BA^{-1}; 2) B; 3) E. **23.55.** 1) BA^{-1}; 2), 3) $A^{-1}B$. **23.56.** 1) A_{16}; 2) A_{31}; 3) A_{32}; 4) A_{61}. **23.57.** 1) a) A_{26}; b) diag $(1, 2, 2)$; 2) a) A_{230}; b) diag $(0, 1, 1)$; 3) a) $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 4) a) A_{273}; b) $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. **23.58.** 1) a) A_{141}; b) A_{392}; c) A_{172}; d) A_{506}; e) A_{406}; f) A_{516}. 2) Dans tous les problèmes c'est la matrice B. C o n s e i l: utiliser le résultat du problème 23.54.

23.59. 1) $\begin{Vmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 & -2+3a & 2a \\ 2 & -3+3b & 2b \\ -3 & 4+3c & 2c \end{Vmatrix}$ (a, b, c sont des nombres quelconques). 2), 4) φ n'existe pas. **23.60.** 1) φ est surjective; $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$; $\varphi(a) = {}^t(4, -1)$; 2) φ est injective $\operatorname{Rg} \varphi = 2$; $\varphi(a) = {}^t(11, 10, -6)$; 3) φ est surjective; $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$; $\varphi(a) = {}^t(-4, -6, 0)$; 4) φ n'est pas unique, le rang peut être égal à deux ou trois, la dimension du noyau est 1 ou 0 respectivement. Dans le second cas φ est injective. $\varphi(a) = {}^t(-10, -10, -13, 10, 28)$.

23.61. 1) $(1+i)E$; 2) A_{82}; 3) A_{98}; 4) A_{262}. **23.62.** 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 7 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$;

7) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$; 9) A_{497}; 10) A_{498}.

23.63. 1) $\begin{Vmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) $\operatorname{diag}(-1, 1+i, 1-i)$;

4) $\operatorname{diag}(1, \omega^2, \omega)$; 5) $\operatorname{diag}(2, 2, -2, 2i)$; 6) $\operatorname{diag}\left(\begin{Vmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}\right)$.

23.64. 1) $\begin{Vmatrix} 36 & -25 & -3 \\ 23 & -16 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -42 & -18 & -20 & 48 \\ 15 & 7 & 7 & -17 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -3 & -15 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 25 & -31 \\ 1 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$. **23.65.** 1) $\begin{Vmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}$. Conseil: écrire d'abord la matrice dans le base des vecteurs directeurs des droites données. **23.66.** 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

2) $\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{Vmatrix}$

et $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ et

$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Conseil: écrire d'abord la matrice de la transformation dans une base composée des bases des sous-espaces donnés. 23.67. 1) A_{383}; 2) A_{428}; 3) A_{613} $(n = m + 1)$; 4) A_{598} $(n = m)$; 5) A_{299} $(n = m)$. 23.68. 1) La matrice est la même que dans la réponse à 23.43, 1); 2) $\begin{Vmatrix} O & A \\ B & O \end{Vmatrix}^{\square}$, où $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \dots -1 \\ 1 & -1 \dots -1 \\ 0 & 2 \dots -1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots \; n \end{Vmatrix}$,

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n \end{Vmatrix};$$

3) A_{551}. 23.69. 1) La i-ième et la j-ième colonnes changent de place; 2) la k-ième et la l-ième lignes changent de place; 3) la i-ième colonne est multipliée par λ, la j-ième ligne est divisée par μ; 4) la j-ième colonne s'ajoute à la i-ième et la k-ième ligne s'ajoute la l-ième. 23.70. 1) Deux lignes et deux colonnes de numéros i et j changent de place; 2) la i-ième ligne est multipliée par λ, la i-ème colonne est divisée par λ; 3) la j-ième colonne s'ajoute la i-ième, et la i-ième ligne est retranchée de la j-ième; 4) des permutations analogues affectent les colonnes et les lignes de la matrice; 5) la matrice initiale laisse place à la matrice qu'on obtient par symétrie centrale. Conseil. En résolvant les problèmes 23.69 à 23.71, on peut se servir des formules (3), (4) de l'introduction au § 23 et des problèmes 15.27 à 15.30. 23.73. Rg φ. Conseil: utiliser le problème 23.72 ou 23.71 et la méthode de Gauss. 23.74. 1) diag (1, 0) dans les bases $({}^t(1, 0), {}^t(-1, 1))$ et $({}^t(1, 1), {}^t(0, 1))$; 2) E dans les bases $({}^t(1, 0), {}^t(0, 1))$ et $({}^t(1, 3), {}^t(3, 10))$; 3) diag (1, 1, 0) dans les bases $({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0))$, et $({}^t(0, -1, -1), {}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 0, 1))$,; 4) diag (1, 0, 0) dans les bases $({}^t(1, 0, 0), {}^t(1, 1, 0), {}^t(1, -1, -1))$ et ${}^t(1, -1, 2), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1))$; 5) A_{570} dans les bases: $({}^t(1, 0, 0, 0, 0), {}^t(0, 1, 0, 0, 0), {}^t(0, 1, 2, 0, 0), {}^t(2, 0, 1, -1, 0), {}^t(0, 0, 1, 0, 1))$ et $({}^t(1, 1), {}^t(2, -2))$; 6) A_{416} dans les bases: $({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 1, 1))$ et $({}^t(-2, -2, -3, 4,6), {}^t(-2, -2, -2, -1, 5), {}^t(0, 1, 0, 0, 0), {}^t(0, 0, 0, 1,0), {}^t(0, 0, 0, 0, 1))$. 23.77. λE, où λ est un nombre arbitraire. 23.78. 1) $\varphi\psi$ existe pour $n = k$, $\psi\varphi$ existe pour $m = l$. 23.79. Soient $\varphi: \mathcal{R}_k \to \mathcal{R}_l$, $\psi: \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$, $\chi: \mathcal{R}_s \to \mathcal{R}_t$. 1) $n = t$, $m = k$; 2) $s = n$, $t = m = k$; 3) $t = k = n$, $l = m$; 4) $k = n$, $l = m$. 23.80. Si $\varphi: \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{L})$, on a $\varphi = \iota\hat{\varphi}$, où $\hat{\varphi}: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ et $\iota: \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{L}}$ est une injection canonique. 23.82. 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 3 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{Vmatrix}$. Conseil: Soient A, B, C les matrices formées par les colonnes de coordonnées des vecteurs a_i, b_i c_i $(i=1, 2, 3)$, X, Y les matrices des transformations φ et ψ dans la base donnée. Dans ce cas, $XA = B$, $YB = C$, $YXA = YB = C$, c'est-à-dire que la matrice Z. De la transformation $\psi\varphi$ vérifie l'équation matricielle $ZA = C$. Dans la base (a_1, a_2, a_3) on a $Z' = A^{-1}ZA = A^{-1}C$, $AZ' = C'$. Dans la base (b_1, b_2, b_3) on obtient $Z'' = B^{-1}ZB$. 23.83. 1), 2) 0; 3) $\begin{Vmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Conseil: $\varphi - \psi = 5\iota$. 23.85. 1) Matrice $\begin{Vmatrix} O & E \\ O & O \end{Vmatrix}$ d'ordre $n + 1$, où E est la matrice unité d'ordre $n - k + 1$ pour

$k \leqslant n$, 0 pour $k > n$; 2) matrice $(-1)^s$ diag $(0, B, 2^k B, \ldots, n^k B)$ d'ordre $2n+1$, où $B = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ pour $k = 2s-1$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ pour $k = 2s$ ($k = 1, 2, \ldots,$; $s = [(k+1)/2)$. **23.86.** 1) a) $(\tau D)(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \ldots + n a_n t^n$; b) $(D\tau)(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_0 + 2a_1 t + \ldots + (n+1) a_n t^n$; c) $[D, \tau] = \iota$. 2) Conseil: démontrer par récurrence en utilisant le résultat de c) **23.91.** Comparer avec 15.59 **23.100.** 2) Supposons que l'application ε_{ij} possède dans un couple de bases la matrice E_{ij} (unité matricielle). La base dans $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ se compose de toutes les applications ε_{ij}; $\dim L(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = mn$. **23.101.** 1), 2), 4), 5) non; 3), 6) oui. **23.103.** 1), 2), 3), 5) non pour $d \neq 1$; 4), 6) oui. **23.104.** Conseil: si les faces du réflecteur sont confondues avec les plans de coordonnées, le vecteur directeur du rayon subit les réflexions successives de matrices diag $(1, 1, -1)$, diag $(1, -1, 1)$, diag $(-1, 1, 1)$.

Dans les réponses aux problèmes sur la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres, on donne pour chaque valeur propre λ soit l'ensemble $\mathcal{M}$ des vecteurs propres associés à λ, soit une base du sous-espace propre; si la transformation est diagonalisable, on indique la forme diagonale de sa matrice et une base propre, ou bien la matrice des colonnes de coordonnées des vecteurs de cette base. **24.1.** Conseil: l'ensemble étudié est contenu dans un sous-espace propre. **24.3.** $n-r$. **24.4.** $\begin{Vmatrix} A & B \\ O & C \end{Vmatrix}$, où $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ étant les valeurs propres. **24.13.** Conseil: le polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle. **24.14.** 2) Soit $\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$; il vient alors $a_k = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$, où $(i_1, \ldots i_k)$ parcourt tous les k-uples d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$: $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. **24.15.** Tous les vecteurs non nuls. **24.16.** La valeur propre est λ (de multiplicité n), les vecteurs propres sont αe_1 $(\alpha \neq 0)$. **24.17.** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. **24.18.** La base recherchée est $e = (e_1, \ldots, e_n)$, où $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathcal{L}'$ et $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ celle de $\mathcal{L}''$. 1) diag $(E_k, 0)$; 2) diag $(E_k, -E_{n-k})$ dans la base e. **24.19.** 1) $\lambda = 1$, $x + 2y = 0$; $\lambda = -1$, $x + 3y = 0$; diag $(-1, 1)$ dans la base $({}^t(-2, 1, {}^t(-3, 1))$; 2) $\lambda = 1$, $x + y = 0$; $\lambda = 0$, $4x + 5y = 0$; diag $(1, 0)$ dans la base $({}^t(1, -1), {}^t(-5, 4))$; 3) $\lambda = 1$, $3x - 2y = 0$; $\lambda = 2$, $x - y = 0$; diag $(1, 2)$ dans la base $({}^t(2, 3), {}^t(1, 1))$. **24.20.** 1) $\lambda = 1$, la droite $x = z = 0$; $\lambda = 0$, le plan $y = 0$; diag $(0, 1, 0)$ dans la base donnée; 2) $\lambda = 1$, la droite $x = y = z$; $\lambda = 0$, le plan $x + x + z = 0$; diag $(1, 0, 0)$ dans la base $({}^t(1, 1, 1), {}^t(1, -1, 0), {}^t(1, 0, -1))$. 3) $\lambda = 1$, le plan $x + y + z = 0$; $\lambda = 0$, la droite $x = y = z$; diag $(1, 1, 0)$ dans la base $({}^t(1, -1, 0), {}^t(1, 0, -1), {}^t(1, 1, 1))$. 4) $\lambda = 1$, le plan $-x + y + 2z = 0$; $\lambda = 0$, la droite $-2x = 2y = z$; diag $(1, 1, 0)$ dans la base $({}^t(1, -1, 1), {}^t(1, -3, 2), {}^t(-1, 1, 2))$. 5) $\lambda = 1$, le plan $x = 0$; $\lambda = 0$, la droite $2x = 2y = -z$; diag $(1, 1, 0)$ dans la base $({}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1), {}^t(1, 1, -2))$. 6) $\lambda = 1$, le plan $x = y$; $\lambda = 0$, la droite $-2x = 3y = 6z$; diag $(1, 1, 0)$ dans la base $({}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 0, 1), {}^t(-3, 2, 1))$. 7) $\lambda = 1$, la droite $-20x = 15y = 12z$; $\lambda = 0$, le plan $2x + 3y - z = 0$; diag $(1, 0, 0)$ dans la base $({}^t(-3, 4, 5), {}^t(1, 0, 2), {}^t(0, 1, 3))$. 8) $\lambda = 1$, la droite $2x = y = 2z$; $\lambda = 0$, le plan $2x + 3y - 4z = 0$; diag $(1, 0, 0)$ dans la base $({}^t(1, 2, 1), {}^t(-3, 2, 0), {}^t(2, 0, 1))$. 9) $\lambda = 1$, le plan $x = 0$; $\lambda = -1$, la droite $y = z = 0$; diag $(-1, 1, 1)$ dans la base $({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1))$. 10) $\lambda = 1$, la droite $x = 2y = z$; $\lambda = -1$, le plan $2x + y + 2z = 0$; diag $(1, -1, -1)$ dans la base $({}^t(2, 1, 2), {}^t(-1, 2, 0), {}^t(1, 0, -1))$. 11) $\lambda = 1$, le plan $x + y + z = 0$; $\lambda = -1$, la droite $x = y = z$; diag $(1, 1, -1)$ dans la base $({}^t(1, -1, 0), {}^t(1, 0, -1), {}^t(1, 1, 1))$. 12. $\lambda = 1$, le plan $x = 0$; $\lambda = -1$, la droite $2x = y = -z$; diag $(1, 1, -1)$ dans

la base ($^t(0, 1, 0)$, $^t(0, 0, 1)$, $^t(1, 2, -2)$). 13) $\lambda=1$, la droite $2x=y=2z$; $\lambda=-1$, le plan $x+y=0$; diag$(1, -1, -1)$ dans la base ($^t(1, 2, 1)$, $^t(-1, 1, 0)$, $^t(0, 0, 1)$). **24.21.** 1) Pour $\alpha=2k\pi$ on a $\lambda=1$, tous les vecteurs non nuls sont propres; pour $\alpha=(2k+1)\pi$, on a $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha e_3 \mid \alpha\neq 0\}$ et $\lambda=-1$, $\mathscr{X}=\{\alpha e_1+\beta e_2 \mid |\alpha|+|\beta|\neq 0\}$; pour $\alpha\pm k\pi$ on a $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha e \mid \alpha\neq 0\}$ (k est entier); 2) $\lambda=1$; $\mathscr{X}=\{\alpha e_1 \mid \alpha\neq 0\}$; 3) $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(1, 1, 1)) \mid \alpha\neq 0\}$; 4) $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(1, 1, -1)) \mid \alpha\neq 0\}$ et $\lambda=0$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(-3, 1, 0))+\beta(^t(0, 0, 1)) \mid |\alpha|+|\beta|\neq 0\}$; 5) $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(2, 2, -1)) \mid \alpha\neq 0\}$ et $\lambda=-1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(1, -1, 0))+\beta(^t(3, 0, -1)) \mid |\alpha|+|\beta|\neq 0\}$; 6) $\lambda=2$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(1, 1, 1)) \mid \alpha\neq 0\}$ et $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(0, 1, 0))+\beta(^t(2, 0, 1)) \mid |\alpha|+|\beta|\neq 0\}$; 7) $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(1, 1, -1)) \mid \alpha\neq 0\}$; 8) $\lambda=1$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(-1, 1, 1)) \mid \alpha\neq 0\}$. **24.22.** 1) $\lambda=0$, le sous-espace propre est $b_1x_1+\ldots+b_nx_n=0$; si $a_1b_1+\ldots+a_nb_n\neq 0$, on a encore $\lambda=a_1b_1+\ldots+a_nb_n$, $\mathscr{X}=\{\alpha(^t(a_1, \ldots, a_n)) \mid \alpha\neq 0\}$. 2) $a_1b_1+\ldots+a_nb_n\neq 0$; 3) a) oui; b) non. **24.23.** Transformation de matrice diag $(\lambda E_{k-1}, J_{m-k+1}(\lambda), \mu E_{n-m})$, où $\mu\neq\lambda$. **24.26.** 1) $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$; 2) $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$; 3) $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$. C o n s e i l : démontrer que pour $\varkappa\neq 0$, on a $\det(A-\lambda E)=(-1)^n \det A\cdot\det(A^{-1}-\lambda^{-1}E)$. 4) $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$. C o n s e i l : se servir du problème 24.25. **24.27.** $\lambda_i\mu_j$ $(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n)$. C o n s e i l : le fait que les matrices A et B sont diagonalisables entraîne que $A\otimes B$ l'est aussi. **24.29.** Transformation de matrice $J_n(0)$. **24.30.** 1) diag$(-4, 4)$ dans la base ($^t(8, -1)$, $^t(0, 1)$); 2) diag$(0, 1)$ dans la base ($^t(0, 1)$, $^t(1, 1)$); 3) diag $(-1, -2)$ dans la base ($^t(2, -1)$, $^t(1, -1)$); 4) diag $(4, 9)$ dans la base ($^t(2, 1)$, $^t(-1, 2)$); 5) diag$(0, 25/12)$ dans la base ($^t(3, 4)$, $^t(4, -3)$); 6) $\lambda=1$, $^t(1, 0)$; 7) diag$(2, 0)$ dans la base ($^t(1, 1)$, $^t(1, -1)$); 8) $\lambda=0$, $^t(1, 1)$; 9) diag$(169, 0)$ dans la base ($^t(5, 12)$, $^t(-12, 5)$); 10) $\lambda=-2$, $^t(1, 2)$; 11) diag$(-2, 1, 4)$ dans la base ($^t(1, 0, -1)$, $^t(0, 1, 0)$, $^t(3, 4, 3)$); 12) diag$(1, 1, -1)$ dans la base ($^t(1, 0, 0)$, $^t(0, 1, 1)$, $^t(0, -1, 1)$); 13) diag$(1, -1, -2)$ dans la base ($^t(2, 1, 1)$, $^t(1, 0, 1)$, $^t(1, -1, 1)$); 14) diag$(1, 2, 3)$ dans la base ($^t(0, 1, 1)$, $^t(1, 1, 1)$, $^t(1, 0, 1)$); 15) diag $(0, -1, 2)$ dans la base ($^t(1, 0, 1)$, $^t(0, 1, -2)$, $^t(3, -2, 1)$); 16) diag $(-2, 9, -4)$ dans la base ($^t(1, 0, -1)$, $^t(2, 1, 2)$, $^t(5, -4, 5)$); 17) diag$(1, 2, 10)$ dans la base ($^t(2, 1, -2)$, $^t(1, 0, 1)$, $^t(-1, 4, 1)$); 18) diag $(14, 0, 0)$ dans la base ($^t(2, 1, -3)$, $^t(-1, 2, 0)$, $^t(6, 3, 5)$); 19) diag $(3, 3, 2)$ dans la base ($^t(1, -1, 0)$, $^t(1, 0, 1)$, $^t(1, 2, 4)$); 20) diag$(1, 2, 2)$ dans la base ($^t(1, 1, 1)$, $^t(1, 0, -3)$, $^t(0, 1, 3)$); 21) diag$(7, 7, -7)$ dans la base ($^t(1, -2, 0)$, $^t(0, 3, 1)$, $^t(2, 1, -3)$); 22) $\lambda=0$, $^t(1, 0, 0)$; $\lambda=-1$, $^t(0, 1, 0)$; 23) diag$(3, -1, -1)$ dans la base ($^t(1, 1, 2)$, $^t(1, -1, 0)$, $^t(1, 0, -1)$); 24) $\lambda=-3$, $^t(2, 0, 1)$; $\lambda=2$, $^t(0, -1, 1)$; 25) $\lambda=0$, $^t(2, -1, 0)$; 26) diag$(0, 1, 1)$ dans la base ($^t(1, 1, -1)$, $^t(2, 1, 0)$, $^t(3, 0, 2)$); 27) $\lambda=0$, ($^t(1, 1, 0)$, $^t(-1, 3, 2)$); 28) $\lambda=-1$, ($^t(2, -1, 0)$, $^t(1, -2, 1)$); 29) diag$(-1, 1, 1)$ dans la base ($^t(3, 5, 6)$, $^t(2, 1, 0)$, $^t(1, 0, -1)$); 30) $\lambda=-1$, $^t(-2, 1, 1)$; 31) diag$(1, 1, -1, -1)$ dans la base ($^t(1, 0, 0, 1)$, $^t(0, 1, 1, 0)$, $^t(0, -1, 1, 0)$, $^t(-1, 0, 0, 1)$); 32) diag$(1, -1, 1, -1)$ dans la base ($^t(1, 1, 0, 0)$, $^t(-1, 1, 0, 0)$, $^t(0, 0, 1, 1)$, $^t(0, 0, -1, 1)$); 33) diag$(4, 9, 9, -1)$ dans la base ($^t(2, 1, 0, 0)$, $^t(1, -2, 0, 0)$, $^t(0, 0, 1, 1)$, $^t(8, 4, -5, 5)$); 34) diag$(0, 0, 0, 4)$ dans la base ($^t(1, 1, 0, 0)$, $^t(0, 1, 1, 0)$, $^t(0, 0, 1, 1)$, $^t(1, -1, 1, -1)$); 35) $\lambda=0$, $^t(1, 0, 0, 1)$, $^t(0, 1, 1, 0)$); $\lambda=2$, $^t(1, -1, 1, -1)$; 36) diag $(1, 3, 5, -4)$ dans la base ($^t(1, 0, -1, 1)$, $^t(1, 1, 0, -1)$, $^t(1, 1, -1, 0)$, $^t(0, 1, 1, -1)$); 37) diag$(-1, 1, 1, -2)$ dans la base ($^t(-2, 1, 1, 1)$, $^t(1, -1, 0, 0)$, $^t(1, 0, -1, 0)$, $^t(1, 0, 0, -1)$); 38) diag $(2, 2, 2, -2)$, A_{468}; 39) $\lambda=0$, $^t(1, 1, 1, 1)$; 40) $\lambda=1$, $^t(1, 0, 1, 0)$, $^t(1, -3, 0, 0)$, $^t(1, 1, -1, -1)$). **24.31.** 1) diag $(i, -i)$ dans la base ($^t(1, -i)$, $^t(-i, 1)$); 2) diag$(\varepsilon, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, dans la base ($^t(1, -\varepsilon$, $^t(-\varepsilon, 1)$); 3) diag$(0, 2i)$ dans la base ($^t(1, -i)$, $^t(-i, 1)$); 4) diag $(-1, 1)$ dans la base ($^t(\varepsilon, -1)$, $^t(\varepsilon, 1)$); 5) diag$(1-i, 1+i)$ dans la base ($^t(1, 1)$, $^t(-1, 1)$); 6), diag$(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ dans la base ($^t(1, -i)$, $^t(-i, 1)$); 7) diag$(\varepsilon+i, \varepsilon-i)$ dans la

base (${}^t(1, i)$, ${}^t(i, 1)$); 8) diag$(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ dans la base (${}^t(\sqrt{3}-1, 1-i)$, ${}^t(1+i, 1-\sqrt{3})$); 9) diag $(0, 3i, -3i)$ dans la base (${}^t(2, 2, -1)$, ${}^t(5, 3i-4, 2+6i)$, ${}^t(5, -4-3i, 2-6i)$); 10) diag $(1, i -i)$ dans la base (${}^t(0, 1, 1)$, ${}^t(2, 2, 3+i)$, ${}^t(2, 2, 3-i)$); 11) diag$(-1, 1+i, 1-i)$ dans la base (${}^t(1, 1, -1)$, ${}^t(1+i, 1, -i)$, ${}^t(1-i, 1, i)$); 12) diag$(2, 3+i, 3-i)$ dans la base (${}^t(2, 1, 1)$, ${}^t(4, 3, 2-i)$, ${}^t(4, 3, 2+i)$); 13) diag$(2, -1+i, -1-i)$ dans la base (${}^t(1, 0, -1)$, ${}^t(2, 2, -5-i)$, ${}^t(2, 2, -5+i)$); 14) diag$(1, \omega, \omega^2)$, $\omega=e^{2\pi i/3}$, dans la base A_{363}; 15) diag$(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3})$ dans la base (${}^t(1+\sqrt{3}, 1, 1)$, ${}^t(1-\sqrt{3}, 1, 1)$, ${}^t(0, 1, -1)$); 16) diag$(1+i, 1+i, 2+i)$ dans la base (${}^t(1, 0, 0)$, ${}^t(0, 2, 1)$, ${}^t(1+i, 1, 1)$); 17) diag$(4, 1, 0)$ dans la base (${}^t(1+i, 3i, 1)$, ${}^t(1, 0, i-1)$, ${}^t(1+i, -i, 1)$); 18) diag$(i, -i, i, -i)$ dans la base A_{486}; 19) diag$(2, -4, -1+i, -1-i)$ dans la base (${}^t(1, 1, 1, 1)$, ${}^t(1, -1, 1, -1)$, ${}^t(1, i, -1, -i)$, ${}^t(1, -i, -1, i)$); 20) diag$(1+i, -1+i, 1+i, -1+i)$ dans la base diag(A_{16}, A_{16}); 21) diag$(2, 2, -2, 2i)$ dans la base A_{473}.

24.32. 1) $\lambda=-3$, ${}^t(-1, 2)$; 2) $\lambda=5$, ${}^t(1, 3)$; 3) $\lambda=3$, ${}^t(2, 0, -1)$; $\lambda=2$, ${}^t(0, -1, 1)$; 4) $\lambda=0$, ${}^t(2, 1, -1)$; $\lambda=-1$, ${}^t(3, 3, -4)$; 5) $\lambda=-1$, ${}^t(2, 0, 1)$; $\lambda=1$, ${}^t(1, 1, 1)$; 6) $\lambda=0$, ${}^t(1, 1, -1)$, ${}^t(3, 0, 2)$; 7) $\lambda=0$, ${}^t(1, 0, 0, 1)$, ${}^t(0, 1, 1, 0)$; 8) $\lambda=1$, ${}^t(2, -1, 2, -1)$; $\lambda=-1$, ${}^t(2, -1, -2, 1)$; 9) $\lambda=1$, ${}^t(1, 1, 0, 0, 0)$, ${}^t(0, 0, 0, 1, 1)$; $\lambda=-1$, ${}^t(0, 1, 1, 0, 0)$.

24.33. 1) $\lambda_1=\varepsilon$, $\lambda_2=\varepsilon^2$; a) non; b) diag$(\varepsilon, \varepsilon^2)$ dans la base (${}^t(1, 1-\varepsilon)$, ${}^t(1, 1-\varepsilon^2)$) $(\varepsilon=e^{2\pi i/3})$. 2) $\lambda_{1,2}=e^{\pm i\alpha}$; a) $(-1)^n E$ pour $\alpha=\pi n$ (n est un entier), dans toute base; pour les autres α la transformation n'est pas diagonalisable; b) diag$(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$, A_{94}. 3) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\omega$, $\lambda_3=\omega^2$; a) non; b) diag$(1, \omega^2, \omega)$, A_{363} $(\omega=e^{2\pi i/3})$. 4) $\lambda_{1,2}=3$; a), b) non. 5) $\lambda_2=0$, $\lambda_{2,3}=\pm i\sqrt{3}$; a) non; b) diag$(0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3})$, A_{384}. 6) $\lambda_{1,2}=1$; a), b) non. 7) $\lambda_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$, $\lambda_{3,4}=1$; a), b) non. 8) $\lambda_{1,2}=i$, $\lambda_{3,4}=-i$; a) non; b) diag $(i, i, -i, -i)$, A_{488}. 9) $\lambda_{1,2}=1+i$, $\lambda_{3,4}=1-i$; a) non; b) diag$(1+i, 1+i, 1-i, 1-i)$, A_{488}. 10) $\lambda_{1,2}=i$, $\lambda_{3,4}=-i$; a) b) non.

24.34. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique, $m=[(n+1)/2]$, $r=[n/2]$. 1) diag$(E_m, -E_r)$ dans la base formée par les vecteurs e_k+e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, m)$ et e_k-e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, r)$. 2) diag $(3E_m, -E_m)$ dans la base de l'exemple 1). 3) diag $(2n-1, -1, \ldots, -1)$ dans la base des vecteurs $e_1+\ldots+e_n$, e_1-e_k $(k=2, \ldots, n)$. 4) diag $(x+(n-1)y, x-y, \ldots, x-y)$ dans la base de l'exemple 3). 5) $\lambda=0$, le vecteur propre de base est le vecteur $\sum\limits_{s=0}^{n-1}(-1)^s C_{n-1}^s e_{s+1}$; la transformation n'est pas diagonalisable. 6) diag $\times$ $\times(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$, les coordonnées du k-ième vecteur propre de base sont les coefficients du polynôme $(1+t)^{n-k}(1-t)^{k-1}$ ordonné suivant les puissances croissantes de t. 7) diag $\left(2\cos\frac{\pi}{n+1}, \ldots, 2\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$ dans la base des vecteurs $a_k=\sum\limits_{s=1}^{n}\sin\frac{\pi ks}{n+1}e_s$, $k=1, \ldots, n$. 8) diag $(0, \ldots, 0, n)$ dans la base $(a_1, \ldots, a_n)$, où $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ est la base du sous-espace $x_1-x_2+\ldots+(-1)^{n-1}x_n=0$, $a_n=e_1-e_2+\ldots+(-1)^{n-1}e_n$. 9) diag $\times$ $\times(2E_m, -2E_m)$ pour $n=2m$; diag $(2E_{m-1}, 1, -2E_{m-1})$ pour $n=2m-1$ dans la base formée par les vecteurs e_k+2e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, m)$, e_k-2e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, r)$. 10) $\lambda=0$ avec vecteurs propres $e_1, \ldots, e_r$; pour $n=2m-1$ on a encore $\lambda=1$ avec vecteur propre e_m; la transformation n'est pas diagonalisable. 11) diag $(iE_m, -iE_m)$ pour $n=2m$; diag $(iE_{m-1}, 1, -iE_{m-1})$ pour $n=2m-1$ dans la base des vecteurs e_k+ie_{n-k+1} $(k=1, \ldots, m)$, e_k-ie_{n-k+1} $(k=1, \ldots, r)$. 12) diag $(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$ dans la base des vecteurs

$a_k = \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)s} e_s$ $(k=0, 1, \ldots, n-1;\ \varepsilon = e^{2\pi i/n})$. 13) diag $\left(2i \cos \frac{\pi}{n+1}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, 2i \cos \frac{\pi n}{n+1}\right)$ dans la base des vecteurs $a_k = \sum_{s=1}^{n} i^{s-1} \sin \frac{\pi k s}{n+1} e_s$, $k = 1, \ldots, n$. **24.35.** 1) $\pm \frac{i}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$; 2) 4, 0, $2 \pm 2\sqrt{2}$; 3) 0, 8, 8, 12; 4) 0, $\pm 4i$, $\pm 8i$; 5) $e^{k\pi i/3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2$; 6) $a + 2b \cos \frac{\pi k}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n$. Conseil: utiliser la transformation $a\iota + b\psi$, où ψ est la transformation de 24.34, 7). $\lambda_k = a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1}$, où $\varepsilon_k = e^{2\pi k i/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Conseil: passer à la base $f_k = {}^t(1, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_k^{n-1})$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. 8) $a_1 + \ldots + a_n$ et $\pm\lambda_k$, où $\lambda_k = |a_1 + a_2\varepsilon_k + \ldots + a_n\varepsilon_k^{n-1}|$, $\varepsilon_k = e^{2\pi k i/n}$, $0 < k < [n/2]$, et si n est pair, on a aussi $a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n$. 9) $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$ de multiplicités respectives $k+1$, k, k, k pour $n = 4k+1$ et de multiplicités respectives $k+1$, $k+1$, $k+1$, k pour $n = 4k+3$. Conseil: les nombres caractéristiques de la matrice A^2 sont n et $-n$ de multiplicités $(n+1)/2$ et $(n-1)/2$ respectivement. **24.36.** 1) $1 + (-1)^n$; 2) 0; 3) $\sqrt{n}$ pour $n = 4k+1$, $i\sqrt{n}$ pour $n = 4k+3$; 4) $i^{(n-1)(3n-2)/2} n^{n/2}$. Conseil: se servir des résultats des problèmes 24.34, 7) et 24.35, 9). **24.37.** 1) A_{287}; 2) A_{230}; 3) $A_{304} \sim D_2$, $A_{305} \sim D_1$. **24.38.** 1) $J_3(-1)$; 2) A_{485}. **24.39.** 5. **24.40.** 9, 4, 3, 2 et 9, 2, 6, 1; 2. **24.41.** $\frac{b+3a}{4}$. Conseil: vérifier que $\left\| \begin{matrix} x_{n+1} \\ x_n \end{matrix} \right\| = A \left\| \begin{matrix} x_n \\ x_{n-1} \end{matrix} \right\|$, où A est une matrice. Exprimer $\left\| \begin{matrix} x_{n+1} \\ x_n \end{matrix} \right\|$ en fonction de $\left\| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\|$ et A. Pour calculer A^n, réduire la matrice A à la forme diagonale. **24.42.** 1), 2) $\lambda = 0$, les vecteurs propres sont des constantes; 3) à la valeur propre λ_k correspond la fonction propre $e^{\lambda_k t}$, $k = 1, \ldots, n$; 4) $\lambda = \lambda_0$, la fonction propre est $e^{\lambda_0 t}$. **24.43.** 1) $\lambda = 0$, les vecteurs propres sont les polynômes $at + b \times \times (|a| + |b| \neq 0)$; 2) $\lambda = 0$, les vecteurs propres sont les constantes; $\lambda = -k^2$, $\mathscr{X} = \{a_k \cos kt + b_k \sin kt \ |a_k| + |b_k| \neq 0\}$, $k = 1, \ldots, n$; 3) $\lambda = \lambda_k^2$, $\mathscr{X} = \{ce^{\lambda_k t} | c \neq 0\}$, $k = 1, \ldots, n$; 4) $\lambda = \lambda_0^2$, $\mathscr{X} = \{ce^{\lambda_0 t} | c \neq 0\}$. **24.44.** 1) $\lambda = 0$, $\mathscr{X} = \{(a_0 + a_1 t) e^t | \ |a_0| + |a_1| \neq 0\}$; 2) $\lambda = -1$, $\mathscr{X} = \{ae^t | a \neq 0\}$; 3) $\lambda = 2$, toutes les fonctions non nulles de $\mathscr{L}$ sont propres. **24.45.** 1) $\lambda = -1$, toutes les fonctions non nulles de $\mathscr{M}$ sont propres. 2) Il n'y a pas de vecteurs propres. **24.46.** 1) $\lambda = 0$, $\mathscr{X} = \{a \cos 2t + b \sin 2t | \ |a| + |b| \neq 0\}$; 2) $\lambda = -16$, toutes les fonctions non nulles sont propres. **24.47.** Les vecteurs de base des sous-espaces propres sont désignés par p, q. 1) $\lambda = 0$, $p = 1$; $\lambda = 1$, $p = t$; $\lambda = 2$, $p = t^2$; 2) $\lambda = 1$, $p = 1$; $\lambda = 2$, $p = t$; $\lambda = 3$, $p = t^2$; 3) $\lambda = 1$, $p = t$; $\lambda = 2$, $p = 1$, $q = t^2$. **24.48.** Les valeurs propres sont tous les $\lambda \in \mathrm{R}$. Les fonctions propres sont $ce^{\lambda t}$, $c \neq 0$. **24.49.** $\lambda = -n^2$. $\mathscr{X} = \{c \sin nt | c \neq 0\}$, n est un entier naturel quelconque. **24.50.** $A = B = C = E$. **24.51.** 2) $\lambda = 1$, les vecteurs propres sont les polynômes de degré $< m$; $\lambda = 0$, les vecteurs propres sont les polynômes divisibles par $p_0(t)$. **24.52.** 1) diag (1, 0, 0, 0) dans la base $(1, t, t^2, t^3)$; 2) diag (1, 1, 0, 0) dans la base $(1, t, t^2+1, t^3+t)$; 3) diag (1, 1, 1, 0) dans la base $(1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3)$. **24.53.** $\lambda = 1$, les vecteurs propres sont les matrices symétriques non nulles; $\lambda = -1$, les vecteurs propres sont les matrices symétriques gauches non nulles. La formule $A =$

$=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ fournit la décomposition recherchée. **24.54.** $\lambda=1$, les vecteurs propres sont les matrices hermitiennes non nulles; $\lambda=-1$, les vecteurs propres sont les matrices antihermitiennes non nulles. **24.55.** 1) $\operatorname{diag}(-4, -4, 4, 4)$ dans la base formée par $\left\|\begin{matrix}8 & 0\\ -1 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 8\\ 0 & -1\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$; 2) $\lambda=5$, les matrices propres sont $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\right\|$; 3) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, dans la base des matrices $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ -\varepsilon & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & -\varepsilon\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}-\varepsilon & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & -\varepsilon\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$. **24.56.** 1) $\operatorname{diag}(-1, -1, -2, -2)$ dans la base des matrices $\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{matrix}\right\|$; 2) $\lambda=-3$, les matrices propres sont $\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{matrix}\right\|$; 3) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, dans la base des matrices $\left\|\begin{matrix}3 & \varepsilon-1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 3 & \varepsilon-1\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}3 & \varepsilon^2-1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 3 & \varepsilon^2-1\end{matrix}\right\|$. **24.57.** 1) Si $A=\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|$, on a $A_\varphi=\left\|\begin{matrix}0 & a_{12} & -a_{21} & 0\\ a_{21} & a_{22}-a_{11} & 0 & -a_{21}\\ -a_{12} & 0 & a_{11}-a_{22} & a_{12}\\ 0 & -a_{12} & a_{21} & 0\end{matrix}\right\|$. 2) a) $\lambda=0$, les matrices propres sont E, A_{106}; b) $\operatorname{diag}(0, 0, 2, -2)$ dans la base $(E, A_{22}, A_5, {}^tA_5)$; c) $\operatorname{diag}(0, 0, -2i, 2i)$ dans la base des matrices $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}-i & 1\\ 1 & i\end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix}i & 1\\ 1 & -i\end{matrix}\right\|$. **24.58.** 1) $\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$ dans la base $(E, A_{22}, -A_5, A_{20})$; 2) $\lambda=1$, les matrices propres sont E, A_{106}. **24.59.** $\lambda=1$; les fonctions propres sont: 1) $1, y, y^2$; 2) $1, 2x+y, (2x+y)^2$. Conseil: on peut se servir du résultat obtenu dans le problème 23.50. **24.60.** 1) $\lambda=0$, le vecteur propre est x^n; 2) $\lambda=0$, le vecteur propre est y^n; 3) $\operatorname{diag}(n, n-2, \ldots, -n)$ dans la base $(x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^{n-1}x, y^n)$. Conseil: on peut se servir du problème 23.51. **24.61.** 1) $\lambda=1$, les vecteurs propres sont les constantes; $\lambda=0$, les vecteurs propres sont x, xy, x^2. 2) $\operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1)$ dans la base $(1, x+y, xy, x^2+y^2, x-y, x^2-y^2)$. 3) $\lambda=1$, les vecteurs propres sont $1, x, x^2, y^2$; $\lambda=-1$, les vecteurs propres sont y, xy. **24.62.** 1) $\operatorname{diag}(2, -2, 0)$ dans la base $(x+x^2, x-x^2, 3-5x^2)$; 2) $\operatorname{diag}(2/3, 4/3, -8/15)$ dans la base $(6x+1, x, 3x^2-1)$. **24.63.** 1) $\operatorname{diag}(\pi/2, -\pi/2)$ dans la base $(\sin x+\cos x, \sin x-\cos x)$; 2) $\operatorname{diag}(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ dans la base $(1, \cos 2x, \sin 2x)$. **24.64.** $\lambda=0$, les vecteurs propres sont les polynômes harmoniques, c'est-à-dire les solutions de l'équation de Laplace $\Delta p=0$. Pour $n=0$, ce sont des polynômes de degré zéro, et pour $n\geqslant 1$ il existe deux polynômes homogènes harmoniques linéairement indépendants de degré n: $u_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\times$ $\times C_n^{2k}x^{n-2k}y^{2k}$, $v_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}$. Conseil: $u_n+iv_n=$

$=(x+iy)^n$. 24.65. Transformations de matrices $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.
24.72. 1) $\begin{Vmatrix} A & B \\ O & C \end{Vmatrix}^{\square}$; 2) $\begin{Vmatrix} A & O \\ B & C \end{Vmatrix}^{\square}$, la matrice A est d'ordre k.
24.75. Tout sous-espace est invariant. 24.76. Plan entier et sous-espace nul. 24.77. Droite $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ et plan $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$. 24.78. Si la matrice de la transformation est diagonale dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, les sous-espaces invariants non nuls sont engendrés par tous les systèmes de vecteurs $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Le nombre des sous-espaces invariants est 2^n. 24.79. Soit $\mathscr{L}$ la somme directe des sous-espaces propres de la transformation φ: $= \mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}_s$. Tout sous-espace invariant $\mathscr{M}$ est alors de la forme $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{M}_s$, où $\mathscr{M}_i$ est un sous-espace de $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. 24.80. Sous-espace $\{o\}$ et enveloppes linéaires des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ pour chaque $k = 1, \ldots, n$. 24.81. $\mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$, où $\mathscr{M}_i$ est un sous-espace quelconque de $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, 2)$. 24.82. 2) Conseil: se servir des problèmes 24.2 et 24.26, 4). 24.83. 2) Conseil: se servir des problèmes 24.26,1) et 23.98. 24.85. Conseil: se servir du problème 24.84. 24.86. Sous-espaces invariants triviaux: $\{o\}$ et espace entier. Autres sous-espaces invariants; 1) sous-espaces unidimensionnels de vecteurs de base ${}^t(2, -1)$ et ${}^t(1, -1)$; 2) sous-espace unidimensionnel de vecteur de base ${}^t(-1, 2)$; 3) sous-espaces unidimensionnels de vecteurs de base $a_1 = {}^t(0, 1, 1)$, $a_2 = {}^t(1, -1, -1)$, $a_3 = {}^t(1, -1, -2)$, sous-espaces bidimensionnels qui sont les enveloppes linéaires des couples de vecteurs a_i, a_k, $1 \leqslant i < k \leqslant 3$; 4) sous-espace unidimensionnel $\mathscr{P}$ de vecteur de base ${}^t(3, 5, 6)$, sous-espace bidimensionnel $\mathscr{Q}$ de base $({}^t(2, 1, 0), {}^t(1, 0, -1))$, tout sous-espace $\mathscr{M}$ de l'espace $\mathscr{Q}$; toute somme $\mathscr{M} + \mathscr{P}$, 5), 6) sous-espaces propres $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ dont les bases sont formées par les vecteurs $e_k + e_{n-k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant [(n+1)/2]$, et $e_k - e_{n-k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$; tous sous-espaces $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ des espaces $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$; toute somme $\mathscr{P} + \mathscr{Q}$, 7) sous-espaces propres $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ de base $e_1 + \ldots + e_n$ et $(e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n)$; tout sous-espace $\mathscr{P}$ de l'espace $\mathscr{N}$; toute somme $\mathscr{P} + \mathscr{M}$. 24.87. Les sous-espaces invariants $(n-1)$-dimensionnels se définissent par les équations: 1) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; 2) $(2\alpha + 3\beta) x_1 - \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ $(|\alpha| + |\beta| \neq 0)$; 3) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$; 4) $x_1 - x_2 = 0$; 5) $x_1 + 2x_2 \pm (x_3 + 2x_4) = 0$; 6) $x_1 + x_3 \pm (x_2 + x_4) = 0$; 7) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$; 8) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Conseil: utiliser les résultats du problème 24.84 ou 24.85, 2). 24.88. 2) La base dans $\mathscr{L}$ est $({}^t(1, -1, -1, 0), {}^t(0, 0, 0, 1))$. 24.89. 1) Conseil: si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathscr{L}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base recherchée. 24.90. La base recherchée est définie par la matrice S. La solution n'est pas unique.

$$1)\ \begin{Vmatrix} 0 & -25 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix},\quad S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix};\quad 2)\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{Vmatrix};\quad 3)\ \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},\quad S = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4) La matrice ne se réduit pas à la forme triangulaire sur le corps des nombres réels. Conseil: se servir du problème 24.89. On peut utiliser les résultats du problème 24.87. 24.91. 2) Si $k_1, \ldots, k_r$ sont les ordres des blocs diagonaux, on a $\dim \mathscr{L}_j = k_1 + \ldots + k_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. 24.93. 1) $\lambda = 0$, les vecteurs propres sont les constantes; 2) $\lambda = 0$, at $(a \neq 0)$; 3) $\lambda_k = -k^2$, $a \cos kt$ $(a \neq 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$; 4) $\lambda_k = -k^2$, $b \sin kt$ $(b \neq 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

24.94. Polynômes de degré $\leqslant n$. **24.96.** Voir la réponse au problème 24.81, où $\mathscr{L}_1$ est le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant m-1$, $\mathscr{L}_2$ le sous-espace des polynômes divisibles par $p_0(t)$. Conseil: La transformation est une projection sur $\mathscr{L}_1$ parallèlement à $\mathscr{L}_2$. **24.98.** Voir la réponse au problème 24.81, où $\mathscr{L}_1$ est le sous-espace des matrices symétriques, $\mathscr{L}_2$ le sous-espace des matrices symétriques gauches. **24.99.** Conseil: $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble des matrices dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception de la k-ième. **24.101.** 2) $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. **24.103.** Si $\alpha = \pi k$ (k est un entier), les transformations 1), 2) sont identiques, $\lambda = 1$, toutes les matrices non nulles d'ordre 2 sont propres. Si $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, on a une valeur propre $\lambda = 1$ de matrice propre E pour 1) et A_{20} pour 2), ainsi qu'une valeur propre $\lambda = -1$ de matrice propre $\begin{Vmatrix} a & b \\ b & -a \end{Vmatrix}$, $|a| + |b| \neq 0$, pour les deux transformations. Si $\alpha \neq \pi k/2$, on a une valeur propre $\lambda = 1$ de matrice propre E pour 1) et A_{20} pour 2), ainsi que des valeurs propres $\lambda = e^{\pm 2i\alpha}$ de matrices propres $\begin{Vmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{Vmatrix}$ respectivement pour les deux transformations. **24.106.** Conseil: se servir de l'assertion 2) du problème 24.104. **24.107.** Si λ_0 est la valeur propre non nulle de module minimal de la transformation φ, on a $0 < \varepsilon_0 < |\lambda_0|$. Si toutes les valeurs propres sont nulles, tout $\varepsilon_0 > 0$ convient. **24.108.** Conseil: si l'une des transformations est régulière, se servir de l'assertion du problème 23.92. Si aucune d'elles n'est régulière se servire de l'assertion du problème 24.107. Dans ce cas, les transformations $\varphi + \varepsilon\iota$ et ψ sont commutables et possèdent les mêmes polynômes caractéristiques pour tout ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. En passant à la limite pour $\varepsilon \to +0$, on aboutit à l'égalité nécessaire. **24.109.** Conseil: se servir de l'assertion du problème 24.106. **24.110.** Conseil: démontrer que φ et ψ possèdent une base propre commune. **24.111.** Conseil: appliquer les assertions des problèmes 24.103, 24.109. **24.112.** Conseil. Soit e_1 le vecteur propre de φ: $\varphi(e_1) = o$. Il est alors un vecteur propre de ψ qui est associé à une valeur propre λ. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ tels que $\varphi(e_{k+1}) = e_k$ ($k = 1, \ldots, n-1$) sont linéairement indépendants et de plus $\psi(e_k) = (\lambda - k + 1)e_k$ ($k = 1, \ldots, n$).

25.4. 4) a), 5), 6), 9) et 10) elle le peut; 1) et 2) elle ne le peut pas, car la propriété de symétrie est violée; 3), 8) et 12) elle ne le peut pas car la propriété de positivité stricte est violée; 4) b), 7) et 11) elle ne le peut pas car la propriété de positivité stricte est violée, mais $F(x, x) \geqslant 0$. Conseil: en vérifiant la propriété de positivité, réduire $F(x, x)$ à la somme de carrés. **25.6.** 6) a), 8), 9) et 12) elle le peut; 1), 2), 3) et 7) elle ne le peut pas car la propriété de symétrie hermitienne est violée; 4), 5) et 10) elle ne le peut pas car la propriété de positivité stricte est violée; 6) b) et 11) elle ne le peut pas car la propriété de positivité stricte n'est pas vérifiée, mais $F(x, x) \geqslant 0$. Conseil: en vérifiant la propriété de positivité stricte, réduire $E(x, x)$ à la somme des carrés des modules des coordonnées des vecteurs. **25.7.** $a_{21} = \overline{a_{12}}$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2 > 0$. **25.10.** Oui et de plusieurs façons. **25.11.** 2) et 5) oui, elle les possède toutes; 1) non, car la propriété de positivité stricte est violée; 3) non, $F(X, X) \geqslant 0$, mais l'égalité $F(X, X) = 0$ n'implique pas que X est une matrice nulle; 4) non, car la propriété de linéarité est violée. **25.13.** $F_2(X, Y)$. **25.16.** Pour $m \leqslant n$, elle ne l'est pas; la propriété de positivité stricte est violée, mais $(f, f) \geqslant 0$. **25.18.** La matrice de Gram de la base $(f_1, \ldots, f_n)$ est: 1) a) $\begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 2) a) $\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) a)

$\begin{Vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) a) $\begin{Vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$; 5) a) $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$; 6) a) $\begin{Vmatrix} 3 & 1-2i & 2+i \\ 1+2i & 1 & 2+i \\ 2-i & 2-i & 6 \end{Vmatrix}$; b) E. **25.19.** $\Gamma = \| g_{ij} \|$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, où 1) $g_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} étant le symbole de Kronecker), $\Gamma = E$; 2) $g_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{\min(i-1,\, j-1)} \frac{(i-1)!\,(j-1)!}{(i-k-1)!\,(j-k-1)!} a^{i+j-2k-2}$; si $a=0$, on a $g_{ij} = ((i-1)!)^2 \delta_{ij}$; 3) $g_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} t_k^{i+j-2}$. **25.20.** Si $\Gamma = \| g_{jk} \|$, $j, k = 1, \ldots, n+1$, $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, $q(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_n t^n$, on a: 1) $g_{jk} = (j+k-1)^{-1}$, $(p, q) = \sum\limits_{j,\, k=1}^{n+1} \alpha_{j-1} \beta_{k-1} (j+k-1)^{-1}$; 2) $g_{jk} = 0$ si $j+k$ est impair, $g_{jk} = 2(j+k-1)^{-1}$ si $j+k$ est pair; $(p, q) = 2 \sum\limits_{j,\, k=1}^{n+1} \alpha_{j-1} \beta_{k-1} (j+k-1)^{-1}$ (somme sur les $j+k$ pairs). **25.21.** 3) $\det \Gamma' = \det \Gamma (\det S)^2$. **25.23.** Conseil: utiliser le résultat du problème 25.20. **25.24.** 1) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = -1$; 2) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 2$; 3) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 7$; 4) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 1+3i$; 5) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 3$; 6) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = -3$; 7) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 7i$. **25.25.** 1) $5\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{30}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{10}$. **25.27.** 5) Le somme des carrés des longueurs des diagonales du parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés. **25.29.** $\left(\int\limits_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx \right)^2 \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int\limits_a^b |g(x)|^2 dx$; $\left(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$. **25.33.** 1) $x_1 = x_2 = 0$; 2) $3x_1 - x_2 = 0$; 3) $2x_1 + x_2 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$; 4) $\operatorname{tr} X = 0$. **25.34.** 1) a) 0; b) $\pi/6$; c) $3\pi/4$; 2) a) π; b) $2\pi/3$;

c) Arc cos $\sqrt{7/10}$; 3) Arc cos $(1/\sqrt{3})$; b) $\pi/2$; 4) a) $\pi/4$; b) $\pi/2$. **25.35.** Conseil : $\cos(\widehat{f_n, f_{n+1}}) = \sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}$.

26.4. 2) $|f_1+f_2|^2 = |f_1|^2+|f_2|^2$ est équivalent à $\operatorname{Re}(f_1, f_2)=0$. Si $x \neq o$, $f_1 = ix$, $f_2 = x$, on a $(f_1, f_2) = i(x, x) \neq 0$, mais $\operatorname{Re}(f_1, f_2)=0$. **26.5.** 1) Le parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle. 2) $|x+y| = |x-y|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(x, y)=0$, ensuite, voir la réponse au problème 26.4, 2). **26.6.** 2) Non. Si le système possède un vecteur nul, il est lié. **26.8.** $(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n$. **26.11.** 1) $\frac{1}{3}\,{}^t(1, -2, 2)$; 2) $\frac{1}{2}\,{}^t(1, -1, 1, -1)$; 3) par exemple, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 1, 0)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(2, -1)$; 5) $\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(1, -1, 1)$; 6) $\frac{1}{2}\,{}^t(1+i, -1+i)$; 7) $\frac{1}{2}\,{}^t(1-i, 1, -i)$. **26.13.** 1) $\frac{1}{\sqrt{11}}\,{}^t(1, -3, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(2, 1, 1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 0, -1, 2)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 2, 1, 0)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(2, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, -1, 2)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}\,{}^t(1, 5, 2)$; 4) $\frac{1}{3}\,{}^t(1, 2, 2)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(2, 1, -2)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(2, -2, 1)$; 5) $\frac{1}{3}\,{}^t(2, 1, -2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1)$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 4, 1)$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(0, 1, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 0, 1, 1)$. **26.15.** 1) $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 2, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, 1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{14}}\,{}^t(-1, 3, 2)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}\,{}^t(-5, 1, -4)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{14}}\,{}^t(3, -1, -2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(1, 2, -1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(-2, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{14}}\,{}^t(0, 2, 1, -3)$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 0, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\,{}^t(1, 2, 1, 2)$; 6) $\frac{1}{\sqrt{15}}\,{}^t(1, -3, 2, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1, 0)$; 7) $\frac{1}{2}\,{}^t(1, -1, 1, -1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 1, 0, -1)$; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(i, 1, -i)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, i, 0)$; 9) $\frac{1}{2}\,{}^t(1, -1, 1+i)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1-i, 0, -1)$, $\frac{\sqrt{3}}{6}\,{}^t(1, 3, 1+i)$. **26.16.** 1) a) $e_1 = {}^t\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $e_2 = {}^t\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 2, 2)$; b) $e_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $e_2 = {}^t(-2, 1, 0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(-4, 2, 1)$; 2) $e_1 = \frac{1}{4}\,{}^t(1, 0, -2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1, 1, 0)$, $e_3 = \frac{1}{4}\,{}^t(-1, 4, 2)$; 3) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(0, 1, -1)$, $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,{}^t(-2, -2, 1)$, $e_3 =$

$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\,{}^t(0,\ 4,\ 1)$. **26.17.** Le couple donné peut être complété jusqu'à la base orthogonale par les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées suivantes 1) ${}^t(-1,\ 0,\ 1,\ 0)$, ${}^t(1,\ -6,\ 1,\ 2)$; 2) ${}^t(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, ${}^t(1,\ -1,\ -1,\ 1)$; 3) ${}^t(1:\ -1,\ -1,\ 1)$, ${}^t(2,\ -1,\ 2,\ -1)$. **26.18.** Par exemple: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,0,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(0,\ 1,\ 1,\ 1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 0,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ 1,\ 0,\ -1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(0,\ 1,\ -1,\ -1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}\,{}^t(6,\ -1,\ -2,\ 1)$. **26.19.** La base de $\mathscr{L}$ est formée, par exemple, par les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1,\ -1,\ -2)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ 0,\ 1,\ -1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ -1,\ -1)$; 3) $\frac{1}{\sqrt{14}}\,{}^t(3,\ 2,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(0,\ 1,\ -2,\ 1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(1,\ 2,\ -1,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{22}}\,{}^t(-2,\ 3,\ 2,\ -2,\ 1)$; 5) $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{11}}\,{}^t(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1)$; 6) $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(2,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,{}^t(1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 0)$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,{}^t(1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -4)$. **26.20.** La base recherchée est formée par exemple par les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées: 1) $\frac{1}{\sqrt{10}}\,{}^t(2,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(-1,\ 1,\ -1,\ 1)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 0,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ -1,\ 0,\ 1)$; 3) $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$. C o n s e i l: trouver dans le sous-espace une base dont les vecteurs ont des matrices-colonnes de coordonnées plus simples et procéder à son orthonormalisation. **26.21.** 1) $(1,\ t,\ \ldots,\ t^n)$; 2) $(k!)^{-1}(t-a)^k$, $k=0,\ \ldots,\ n$; 3) $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1}(t-t_j)(t_k-t_j)^{-1}$, $k=1,\ \ldots,\ n+1$. **26.22.** Le système normé est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\ \ldots \ldots,\ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}$. **26.23.** $\left(1,\ t,\ t^2-\frac{1}{3},\ t^3-\frac{3}{5}\,t\right)$. **26.24.** $\left\{e^{-t},\ e^{-2t}-\frac{2}{3}\,e^{-t},\ e^{-3t}-\frac{6}{5}\,e^{-2t}+\frac{3}{10}\,e^{-t}\right\}$. **26.25.** 2) $|p_k|^2=2\,(2k+1)^{-1}$, $k\geqslant 0$ **26.26.** $q_k(t)=2^k\,(k!)^2\,((2k)!)^{-1}\,p_k(t)$, $k\geqslant 0$. **26.28.** Le système normé est $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,T_0(t),\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_k(t)\right\}$ pour $k\geqslant 1$. C o n s e i l: dans l'intégrale $\int_{-1}^{1} T_k(t)\,T_m(t)\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ procéder au changement de variable $\theta=\operatorname{Arc}\cos t$.

26.29. Conseil: à l'orthogonalisation correspond la matrice triangulaire de passage. 26.30. $2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$. 26.31. 4) Dans 3) la formule est remplacée par $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$. 26.32. 3) Si les systèmes $\{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\{f_1, \ldots, f_m\}$ sont biorthogonaux les systèmes $\{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\{h_1, \ldots, h_m\}$ sont biorthogonaux si et seulement si les vecteurs $f_k - h_k$, $k = 1, \ldots, m$, sont orthogonaux à l'enveloppe linéaire du système $\{e_1, \ldots, e_m\}$. 26.34. 1) ${}^t(1, -100)$, ${}^t(0, 1)$; 2) ${}^t(1, 0)$, ${}^t(0, 1/3)$; 3) $\frac{1}{2}\,{}^t(5, -1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(-3, 1)$; 4) ${}^t(1, -3, -13)$; ${}^t(0, 1, 5)$, ${}^t(0, 0, 1)$; 5) ${}^t(3, -3, 1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(-5, 8, -3)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(1, -2, 1)$; 6) $\alpha({}^t(1, -10^{-1}, 10^{-2}))$, $\alpha({}^t(10^{-2}, 1, 10^{-1}))$, $\alpha({}^t(-10^{-1}, 10^{-2}, 1))$, où $\alpha = (1+10^{-3})^{-1}$; 7) $\frac{1}{5}\,{}^t(3-i, -1, -3i, -1+2i)$, $\frac{1}{5}\,{}^t(2+i, 1+3i, 1-2i)$, $\frac{1}{5}\,{}^t(1-2i, 2+i, 2+i)$; 8) ${}^t(1, 1, 0, 0)$, ${}^t(0, 1, 1, 0)$, ${}^t(0, 0, 1, 1)$, ${}^t(0, 0, 0, 1)$; 9) $\frac{1}{3}\,{}^t(0, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(1, 0, 1, 1)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(1, 1, 0, 1)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(1, 1, 1, 0)$. 26.35. 1) $\frac{1}{6}\,{}^t(-1, -1, 2)$ $\frac{1}{6}\,{}^t(5, -1, -4)$; 2) ${}^t(0, 0, 0, 1)$, $\frac{1}{3}\,{}^t(1, 1, 1, -3)$; 3) $\frac{1}{7}\,{}^t(2, 3, 2, 2)$, $\frac{1}{7}\,{}^t(4, -1, -8, -3)$, $\frac{1}{7}\,{}^t(-3, -1, -3, 4)$. 26.36. 1) $\left\{\frac{3}{8} \times (3-5t^2), \frac{3}{2} t, -\frac{15}{8}(1-3t^2)\right\}$; 2) $\left(\frac{3}{8}(3-5t^2), \frac{15}{8}(5t-7t^3), -\frac{15}{8} \times (1-3t^2), -\frac{35}{8}(3t-5t^3)\right)$. 26.42. La base recherchée est par exemple formée par les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées 1) ${}^t(1, -10, 0)$, ${}^t(0, 7, 1)$; 2) ${}^t(3, 2, -5)$; 3) ${}^t(5, 1, 0, 0)$, ${}^t(2, 0, -1, 0)$, ${}^t(9, 0, 0, 1)$; 4) ${}^t(2, 1, 0, -3)$, ${}^t(1, 0, 1, 4)$; 5) ${}^t(1, 0, -5, 1)$, ${}^t(0, 0, 1, -3)$; 6) ${}^t(5, -3, 1, 0, 0)$, ${}^t(4, 2, 0, -1, 0)$, ${}^t(1, -1, 0, 0, 1)$. 26.43. Par exemple: 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, 1)\right)$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 0, 1, 1), \frac{1}{2}\,{}^t(1, -1, -1, 1)\right)$; 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}}\,{}^t(-2, 1, 2, 1)\right)$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(-1, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{15}}\,{}^t(3, 1, 2, 1)\right)$; 5) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 0, -1, 1, 0), \frac{1}{2\sqrt{6}}\,{}^t(1, -3, 2, 1, -3)\right)$. 26.44. La base recherchée est formée, par exemple, par les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées: 1) ${}^t(1, 1, -1, 1)$, ${}^t(10, 1, 0, -2)$; 2) ${}^t(0, 1, 1, -1)$, ${}^t(1, 0, -2, 3)$; 3) ${}^t(1, 1, -1, -1, 1)$, ${}^t(0, 1, 2, 3, 4)$. 26.45. Par exemple: 1) $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$; 2) $2x_1 - x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $5x_1 - x_4 = 0$; 3) $x_1 + x_2 = 0$, $2x_2 + x_3 - x_4 = 0$; 4) $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$; 5) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$; 6) $x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 0$. 26.51. $l = m$, $\det \| (f_j, g_k) \| \neq 0$.

27.2. Si η et ξ sont les matrices-colonnes de coordonnées du projeté orthogonal et de la composante orthogonale du vecteur x respectivement, on a : 1) $\eta=\frac{1}{3}\,{}^t(-1, 2, -1)$, $\zeta=\frac{1}{3}\,{}^t(1, 1, 1)$; 2) $\eta={}^t(2, -2, 3)$, $\zeta={}^t(5, -1, -4)$; 3) $\eta=\frac{1}{15}\,{}^t(4, 3, 2, 1)$, $\zeta=\frac{1}{15}\,{}^t(11, -18, 13, -16)$; 4) $\eta={}^t(0, -1, 2, -1)$, $\zeta={}^t(1, 1, 0, -1)$; 5) $\eta=\frac{1}{2}\,{}^t(3, 2, 1, 2)$, $\zeta=\frac{1}{2}\,{}^t(1, 0, 1, -2)$; 6) $\eta={}^t(2, 3, -1, 0)$, $\zeta={}^t(-1, 1, 1, 2)$; 7) $\eta=\frac{1}{2}\,{}^t(1, 3, -1, -3)$, $\zeta=\frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, 1, 1)$; 8) $\eta={}^t(3, 0, -1, 2)$, $\zeta={}^t(2, 4, -2, -4)$; 9) a) $\eta=\frac{1}{7}a_1+\frac{1}{3}a_2$; b) $\eta=\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{12}a_2$; c) $\eta=a_1+a_2$; d) $\eta=a_2$; $\zeta=\xi-\eta$. **27.3.** 1) $y=\frac{1}{2}\,{}^t(3, -3, 7, -7)$, $z=-\frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, 1, 1)$; 2) $y={}^t(5, 2, -1, 1)$, $z={}^t(3, -4, 9, 2)$; 3) $y={}^t(1, 1, -1, 1)$ $z={}^t(1, 2, 0, -3)$; 4) $y=-\frac{2}{3}\,{}^t(1, -3, 2, -1)$, $z=\frac{1}{3}\,{}^t(-2, 3, -2, 7)$. **27.4.** 1) $\sum_{k=0}^{m}\frac{p^{(k)}(0)}{k!}t^k$; 2) $\sum_{k=0}^{m}\frac{p^k(a)}{k!}(t-a)^k$. **27.5.** 1) $p(t_1)\,\omega_1(t)+\ldots+p(t_k)\,\omega_k(t)$, où $\omega_j(t)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1}(t-t_i)(t_j-t_i)^{-1}$, $j=1, \ldots, k$. **27.6.** 1) $f_1(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$, $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\,d\tau$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\cos k\tau\,d\tau$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)\sin k\tau\,d\tau$ $(k\geqslant 1)$, $2\pi a_0^2+\sum_{k=1}^{n}\pi(a_k^2+b_k^2)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}(f(\tau))^2\,d\tau$; 2) $f_1(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kp_k(t)$, $a_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\tau)\,p_k(\tau)\,d\tau$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2\leqslant\int_{-1}^{1}(f\times(\tau))^2\,d\tau$; 3) $f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kT_k(t)$, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)\,T_0(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$, $a_k=\frac{2}{\pi}\times\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)\,T_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$ pour $k\geqslant 1$, $\pi a_0^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}a_k^2\leqslant\int_{-1}^{1}(f(\tau))^2\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$. **27.10.** 1) C o n s e i l : considérer le déterminant de la matrice ${}^t\bar{A}A$. **27.13.** C o n s e i l : se servir des résultats obtenus dans les problèmes 26.29 et 27.12. **27.15.** 1) $1/\sqrt{6}$; 2) $1/3$; 3) $\sqrt{10}/2$; 4) $1/2$; 5) $\sqrt{10/3}$; 6) $1/\sqrt{3}$. **27.16.** $a_0=\pi/2$; $a_k=2\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}$; $b_k=0$; $\frac{\pi^3}{6}-\frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(2k+1)^{-4}$. **27.17.** $\frac{2^{n+3}\,(n+1)\,!)^4}{((2n+2)\,!)^3(2n+3)}$.

C o n s e i l : voir problèmes 27.14, 27.6, ainsi que la solution du problème 26.25. **27.18.** Non. **27.20.** 1) $\pi/6$; 2) $\pi/2$; 3) $\operatorname{Arc}\cos\sqrt{3/7}$; 4) 0 ; 5) $\operatorname{Arc}\cos(1/\sqrt{3}$; 6) $\pi/2$; 7) $\pi/4$; 8) $\pi/6$; 9) $\operatorname{Arc}\cos\sqrt{3/5}$. **27.21.** 1) $\operatorname{Arc}\cos(2/3)$; 2) $\pi/2$; 3) $\pi/6$; 4) 0 ; 5) $\pi/3$; 6) $\operatorname{Arc}\cos(1/\sqrt{6})$; 7) $\pi/3$. **27.26.** 1) $\operatorname{Arc}\cos(2/7)$; 2) $\operatorname{Arc}\cos(1/\sqrt{3})$. C o n s e i l : se servir du résultat obtenu dans le problème 27.24. 3) $\pi/2$; 4) 0.

28.2. 1) $\sum_{j=1}^{k}(x, e_j)e_j$; 2) $x-\sum_{j=1}^{k}(x, e_j)e_j$; 3) $2\sum_{j=1}^{k}(x, e_j)e_j-x$; 4) $x-2\sum_{j=1}^{k}(x, e_j)e_j$. **28.3.** 1) $x-\sum_{j=1}^{k}(x, n_j)n_j$; [2) $x-2\sum_{j=1}^{k}(x, n_j)n_j$. **28.4.** 1) $\frac{1}{15}\begin{Vmatrix}4 & 6 & -2 & 2\\ 6 & 9 & -3 & 3\\ -2 & -3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{10}\begin{Vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ 1 & 2 & -2\\ -2 & -4 & 4\end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 3\end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}2 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 2\end{Vmatrix}$; 6) $\frac{1}{42}\begin{Vmatrix}6 & 6 & 12 & -6\\ 6 & 41 & -2 & 1\\ 12 & -2 & 38 & 2\\ -6 & 1 & 2 & 41\end{Vmatrix}$.

28.5. 1) $\frac{1}{15}\begin{Vmatrix}-7 & 12 & -4 & 4\\ 12 & 3 & -6 & 6\\ -4 & -6 & -13 & -2\\ 4 & 6 & -2 & -13\end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix}-4 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & -4\\ 1 & 2 & -4 & -2\\ -2 & -4 & -2 & -1\end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{2}\times$

$\times\begin{Vmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & -2\\ -2 & 0 & -2 & 1\end{Vmatrix}$;

6) $\frac{1}{21}\begin{Vmatrix}-15 & 6 & 12 & -6\\ 6 & 20 & -2 & 1\\ 12 & -2 & 17 & 2\\ -6 & 1 & 2 & 20\end{Vmatrix}$. **28.6.** 1) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{12}\begin{Vmatrix}1 & -1 & -3 & -1\\ -1 & 7 & 3 & -5\\ -3 & 3 & 9 & 3\\ -1 & -5 & 3 & 7\end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix}5 & -3 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 5\end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{10}\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -2 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\\ 2 & 4 & -2 & 4\end{Vmatrix}$. **28.7.** 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{5}\times$ $\times\begin{Vmatrix} -4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$. **28.8.** 1) $\sum_{k=1}^{m} \frac{(x, h_k)}{(f_k, h_k)} f_k$; 2) $2\sum_{k=1}^{m} \frac{(x, h_k)}{(f_k, h_k)} f_k - x$.

28.10, 28.11. 1) $\varphi^* = \varphi$; 2) si $\varphi(x) = \lambda x$, on a $\varphi^*(x) = \bar{\lambda} x$. **28.12.** 1) et 2) $\varphi^* = \varphi$; 3) $\varphi^* = \varphi^{-1}$. **28.13.** 1) $\varphi^* = \varphi^{-1}$; 2) φ^* est une projection sur la direction de e_3 parallèlement au supplémentaire orthogonal de l'enveloppe linéaire du vecteur a; 3) $\varphi^* = -\varphi$. **28.14.** 1) $\varphi^* = \varphi$; 2) la transformation φ^* représente une traction suivant les mêmes directions orthogonales deux à deux de rapport $\bar{\lambda}_j$ suivant la direction $j = 1, \ldots, n$. **28.15.** $\varphi^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, g_j) f_j$.

28.17. 1) $\varphi^*(x) = {}^tAx$; 2) $\varphi^*(x) = {}^t\bar{A}x$. **28.18.** 1) $\varphi^*(X) = {}^tAX$ ($\varphi^*(X) = {}^t\bar{A}X$); 2) $\varphi^*(X) = X({}^tB)$ ($\varphi^*(X) = X^t(\bar{B})$). **28.19.** 1) $\varphi^*(p)(t) = \int_a^b K(s, t)\, p(s)\, ds$.

28.21. 2) $A^* = \bar{\Gamma}^{-1}({}^tA)\bar{\Gamma}$. **28.22.** 1) $\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$. **28.23.** 1) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; 7) $\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -11 \\ 12 & 51 & 49 \end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix} 2-i & 1 & 4-i \\ 2i & -1 & 1+2i \\ -1 & i & 0 \end{Vmatrix}$.

28.24. 1) $\begin{Vmatrix} -2 & 15 \\ -1 & 7 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -2+4i & 2+9i \\ 2-i & 2-4i \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 11 & 2-3i & 10i \\ -i & -5-4i & 20i \\ 4+4i & 2 & -4+5i \end{Vmatrix}$.

28.25. 1) $\begin{Vmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$. **28.26.** 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$. **28.27.** 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. **28.28.** $\varphi^* = -\varphi$;

$a^*_{2k,\,2k+1}=k$, $a^*_{2k+1,\,k}=-k$ $(k=1, \ldots, n)$, les autres $a^*_{jk}=0$, où a^*_{jk} $(j, k=1, \ldots, 2n+1)$ sont les éléments de la matrice associée à la transformation φ^*. **28.29.** 3) $(\alpha\varphi)^*=\overline{\alpha}\varphi^*$; 5) $(p(\varphi))^*=\overline{p}(\varphi^*)$; les énoncés des propriétés 1), 2), 4) ne changent pas. **28.31.** 1) $\det\varphi^*=\det\varphi$; 2) $\det\varphi^*=\overline{\det\varphi}$. **28.39.** 1) Les valeurs propres des transformations φ et φ^* se confondent ; 2) les valeurs propres de φ^* sont les complexes conjuguées de celles de φ. **28.41.** Conseil: se servir du problème 28.33. **28.44.** Pas toujours. **28.45.** 2) Non. **28.46.** 1) $x_1+x_2+x_3=0$; 2) $x_1-x_2+2x_3=0$; 3) $3x_1+x_2-2x_3=0$; 4) $4x_1+x_2-3x_3=0$; 5) $3x_1+5x_2+6x_3=0$. **28.48.** 2) Transformation définie dans une base orthonormée par la matrice A_{13}. **28.54.** 3) Cette base n'existe pas. *Dans les autres problèmes de ce numéro, la base et la matrice sont définies de façon non univoque. Ce sont par exemple les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées (rapportées à la base initiale) et les matrices:* 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, -1, 2)$, A_{353} ; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{42}}\,{}^t(1, 5, 4)$, $\frac{1}{\sqrt{14}}\,{}^t(3, 1, -2)$, A_{354} ; 4) ${}^t(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 1, -1)$, A_{355} ; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, -2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 1, -1)$, A_{356}. **28.55.** Outre les réponses fournies dans le problème 28.54, 5) ce sont: $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 2, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, -1)$, A_{357}, et $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(2, -1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, -1)$, A_{358}, ainsi que les bases obtenues à partir des bases indiquées plus haut par multiplication de certains vecteurs par -1, et les matrices modifiées de façon adéquate.

29.1. 1) La transformation est auto-adjointe; 2) seulement si λ est réel ; 3) et 4) elle l'est ; 5) elle ne l'est pas pour $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, est auto-adjointe pour $\alpha=0, \pi$; 6) elle ne l'est pas ; 7) seulement si a est orthogonal à e_1 et e_2 ; 8) seulement si $a=o$; 9) elle l'est ; 10) seulement si tous les λ_j sont réels ; 11) seulement si ${}^tA=A$; 12) seulement si ${}^t\overline{A}=A$; 13) seulement si ${}^tA=A$ $({}^t\overline{A}=A)$; 13) seulement si ${}^tB=B$ $({}^t\overline{B}=B)$; 15) à 17) ne l'est pas. **29.2.** Les enveloppes linéaires des systèmes de vecteurs $f_1, \ldots, f_m$ et $g_1, \ldots, g_m$ se confondent, et la matrice $\|\alpha_{jk}\|$ définie à partir des décompositions $f_j=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}g_k$ est symétrique. **29.3.** 1) ${}^tA\Gamma=\Gamma A$; si la base est orthonormée, on a ${}^tA=A$; 2) $\overline{{}^tA\Gamma}=\overline{\Gamma}A$; si la base est orthonormée, on a ${}^t\overline{A}=A$. **29.4.** 1), 3) et 7) Elle ne l'est pas ; 2), 4), 5), 6) et 8) elle l'est. **29.5.** 1), 2), 4) et 6) Elle ne l'est pas ; 3), 5) et 7) elle l'est. **29.6.** Elle le peut. Par exemple, la transformation définie par la matrice $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ dans la base $f_1={}^t(1, 1)$, $f_2={}^t(1, 0)$ de l'espace arithmétique bidimensionnel muni du produit scalaire standard est auto-adjointe. **29.7.** 2), 3), 4), 5) et 8) Elle l'est ; 1), 6) et 7) elle ne l'est pas. **29.20.** Elle le peut. Par exemple, la transformation identique. **29.21.** Elle l'est. **29.24.** 1) $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=5$, $f_1=$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 1)$; 2) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(1, 2)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(2, -1)$; 3) $\lambda_1 = 2-\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,{}^t(1+\sqrt{2}, -1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,{}^t(1, 1+\sqrt{2})$; 4) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(\sqrt{2}, 1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(-1, \sqrt{2})$; 5) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, i)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -i)$; 6) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(-1, 1+i)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1-i, 1)$; 7) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(2+i, -1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 2-i)$; 8) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, -1, -2)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, 1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 1, 0)$; 9) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $f_1 = \frac{1}{3}\,{}^t(2, 1, -2)$, $f_2 = \frac{1}{3}\,{}^t(1, 2, 2)$, $f_3 = \frac{1}{3}\,{}^t(2, -2, 1)$; 10) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, -1, -1)$ $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 2, -1)$; 11) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -1, 0)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1, 1, -2)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1, 1, 1)$; 12) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 18$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, 1)$, $f_2 = \frac{1}{3}\,{}^t(2, 1, -2)$, $f_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,{}^t(1, -4, -1)$; 13) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$, $f_1 = \frac{1}{3}\,{}^t(1, 2, -2)$, $f_2 = \frac{1}{3}\,{}^t(2, 1, 2)$, $f_3 = \frac{1}{3}\,{}^t(-2, 2, 1)$; 14) $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, $f_1 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, -\sqrt{2}, 1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1)$, $f_3 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, \sqrt{2}, 1)$; 15) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $f_1 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, \sqrt{2})$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -1, 0)$, $f_3 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, \sqrt{2})$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, i)$, $f_2 = {}^t(0, 1, 0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -i)$; 17) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$, $f_1 = \frac{1}{6}\,{}^t(3+i, -3+i, 4i)$, $f_2 = \frac{1}{3}\,{}^t(2, 2, -1)$, $f_3 = \frac{1}{6}\,{}^t(3-i, -3-i, -4i)$; 18) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 5$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -1, 0, 0)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 0, 1, -1)$, $f_3 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, -1, -1)$, $f_4 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, 1, 1)$; 19) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 2$, $f_1 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, -1, 1, -1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, 0, -1, 0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0, 1, 0, -1)$, $f_4 = \frac{1}{2}\,{}^t(1, 1, 1, 1)$; 20) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 6$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1, -1, 0, 0)$,

$f_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1,\ 1,\ -2,\ 0)$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,-1)$, $f_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 3)$; 21) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, $\lambda_4=4$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ 0,\ 1,\ -1)$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ -1,\ -1)$, $f_4=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$. **29.25.** 1) Toutes les valeurs propres sont égales à k, la base orthonormée de vecteurs propres est toute base orthonormée de l'espace; 2) à la valeur propre $\lambda=1$ correspond toute base orthonormée de $\mathscr{L}$, à la valeur propre $\lambda=0$ toute base orthonormée de $\mathscr{L}^\perp$; 3) à la valeur propre $\lambda=1$ correspond toute base orthonormée de $\mathscr{L}$, à la valeur propre $\lambda=-1$, toute base orthonormée de $\mathscr{L}^\perp$. **29.28.** $\varphi_1=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)$, $\varphi_2=\frac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$. **29.32.** Conseil: se servir des résultats des problèmes 24.101 et 24.107. **29.35.** 1) Conseil; se servir du résultat du problème 29.13, 2). 2) Non. Conseil: étudier la transformation dont la matrice est symétrique gauche dans la base orthonormée. **29.36.** et **29.37.** Conseil: se servir du résultat obtenu dans le problème 29.33. **29.38.** Conseil: utiliser l'inégalité $2\xi\eta\leqslant\xi^2+\eta^2$ et le résultat du problème 29.33. Voir également la solution du problème 19.31. **29.41.** Conseil: se servir des résultats des problèmes 29.33. et 29.40, 1). **29.52.** Conseil: se servir des résultats des problèmes 27.24 et 29.33.

39.2. 1) Si la transformation est définie par la formule $\varphi(x)=\lambda x$, elle l'est pour $\lambda=\pm 1$; 2) seulement pour $|\lambda|=1$, où λ est le rapport d'homothétie; 3) non; 4) et 5) et 6) elle l'est; 7) et 8) non; 9) et 10) seulement pour $|\lambda_j|=1$, $j=1,\ \ldots,\ n$; 11) seulement pour ${}^tAA=E$; 12) seulement pour ${}^t\bar{A}A=E$; 13) seulment pour ${}^tAA=E$ (${}^t\bar{A}A=E$); 14) seulement pour $B({}^tB)=E$ ($B({}^t\bar{B})=E$); 15) non. **30.3.** 1) Non; 2) elle l'est. **39.6.** 1), 2), 5), 6), 8) Non; 3), 4) 7), 9), 10) elle l'est. **39.7.** 1), 2), 5), 7) Non; 3), 4), 6) elle l'est. **30.8.** 2) Non; 1), 3) elle l'est. **30.9.** 1), 4), 6) Non; 2), 3), 5) elle l'est. **30.11.** 1) ${}^tA\Gamma A=\Gamma$; 2) ${}^t\bar{A}\bar{\Gamma}A=\bar{\Gamma}$. Si la base est orthonormée, on a; 1) ${}^tAA=E$; 2) ${}^t\bar{A}A=E$. **30.13.** 1), 5), 6), 9) Non; 2), 3), 4), 7), 8), elle l'est. **30.14.** 1) et 4) Non; 2), 3), 5), et 6) elle l'est. **30.15.** Elle le put. Conseil: voir les conditions imposées dans le problème suivant. **30.16.** 1), 3), 5) Elle l'est; 2), 4), 6) non. **30.20.** 1) Oui; 2) non. **30.21.** Oui. **30.22.** 2) Par exemple, si les transformations φ et ψ de l'espace euclidien bidimensionnel sont définies dans une base orthonormée par les matrices $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ et $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$, $\varphi+\psi$ est une transformation orthogonale. **30.25.** 1) Conseil. Etablir l'identité $(\varphi(\alpha x+\beta y)-\alpha\varphi(x)-\beta\varphi(y),\ \varphi(z))=0$ (α, β étant des nombres arbitraires, et x, y, z des vecteurs arbitraires). Y poser z égal à $\alpha x+\beta y$, $-\alpha x$ et $-\beta y$, ensuite additionner les trois égalités obtenues. 2) Par exemple, la transformation $\varphi: x\mapsto |x|\,e$, où e est un vecteur de longueur 1. **30.28.** 1) Elle le peut; exemple: la transformation du problème 30.29. 5) pour $\alpha\neq\pi k$; 2) elle le peut; exemple: la transformation identique; 3) elle peut; exemple: la transformation du problème 30.29, 7). **30.29.** 1) et 3) Il n'y a pas de vecteurs propres; 2) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=k[{}^t(-1,\ 1+\sqrt{2})]$, $f_2=k[{}^t(1+\sqrt{2},\ 1)]$, où $k=(4+2\sqrt{2})^{-1/2}$; 4) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(1,\ -2)$, $f_2=$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(2,\ 1)$; 5) si $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, il n'y a pas de vecteurs propres; si $\alpha=0$, on a $\lambda_1=\lambda_2=1$; si $\alpha=\pi$, on a $\lambda_1=\lambda_2=-1$ et toute base orthonormée est une base de vecteurs propres; 6) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ $f_1={}^t\left(\sin\frac{\alpha}{2},\ -\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, $f_2={}^t\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$; 7) $\lambda_1=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ 1,\ 1)$; 8) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ -1,\ -1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 1,\ 0)$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1,\ -1,\ 2)$; 9) et 10) $\lambda_1=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 1,\ 0)$; 11) $\lambda_1=-1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(\sqrt{2}-1,\ 1,\ -\sqrt{2}-1)$; 12) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $f_2=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$; 13) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$, $f_1=\frac{1}{2}\,{}^t(-1,\ 1,\ 1,\ -1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ -1,\ -1)$, $f_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ 1,\ 0,\ 1)$. **30.32.** 1) $\lambda_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -i)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ i)$; 2) $\lambda_1=\frac{4+3i}{5}$, $\lambda_2=\frac{4-3i}{5}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ i)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -i)$; 3) $\lambda_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\lambda_2=\cos\alpha-i\sin\alpha$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -i)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ i)$; 4) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ 1,\ 1)$, $f_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\,{}^t(1+i\sqrt{3},\ 1-i\sqrt{3},\ -2)$, $f_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}\,{}^t(1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3},\ -2)$; 5) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1+i2\sqrt{2}}{3}$, $\lambda_3=\frac{1-i2\sqrt{2}}{3}$ $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,1,0)$, $f_2=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ i\sqrt{2})$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,-1,-i\sqrt{2})$; 6) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,1,0)$, $f_2=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ i\sqrt{2})$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ -i\sqrt{2})$; 7) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\frac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $\lambda_3=\frac{3-i\sqrt{7}}{4}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(\sqrt{2}-1,\ 1,\ -\sqrt{2}-1)$; $f_2=\frac{1}{2\sqrt{7}(2+\sqrt{3})}\,{}^t(1+\sqrt{2}-i(\sqrt{7}+\sqrt{14}),\ 3+2\sqrt{2}+i\sqrt{7},\ 2\sqrt{2})$, $f_3=\bar{f}_2$; 8) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=-i$, $f_1=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $f_2=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -i,\ -1,\ i)$, $f_4=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ i,\ -1,\ -i)$; 9) $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $f_1=k[{}^t(i(1+\sqrt{2}),\ 1)]$, $f_2=k[{}^t(1,\ i(1+\sqrt{2}))]$, où $k=(4+2\sqrt{2})^{-1/2}$; 10) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(i-1,\ 1)$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ 1+i)$; 11) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $f_1=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ i,\ 0)$, $f_2=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -i,\ -\sqrt{2})$, $f_3=\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -i,\ \sqrt{2})$. **30.34.** Soit la transformation identique, soit la symétrie centrale (transformation identique multipliée par -1), soit la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace propre associé à la valeur propre 1. **30.35.** La sous-espace $\mathcal{L}$ est engendré par les vecteurs: 1) ${}^t(1+\sqrt{2},\ 1)$; 2) ${}^t(2,\ 1)$; 3) $\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) ${}^t(1,\ 1,\ 0)$, ${}^t(1,\ -1,\ 2)$; 5) ${}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$. **30.36.** La transformation de déterminant est une rotation. Si le déterminant de la transformation vaut -1, la matrice de celle-ci dans une base orthonormée est de la forme A_{78}, et la transformation représente une symétrie orthogonale par rapport à une sous-espace unidimensionnel engendré par le vecteur de coordonnées $\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Conseil: voir le problème 30.35, 3). **30.37.** Conseil: la transformation est diagonalisable; voir le problème 30.34. **30.40.** 1) et 3) Toute base orthonormée. *Dans les autres problèmes de ce numéro la base recherchée et la matrice sont également définies de façon non univoque. Ce sont par exemple, les vecteurs de matrices-colonnes de coordonnées indiquées (par rapport à la base initiale) et les matrices:* 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(1,\ -2)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(2,\ 1)$, $A=A_{15}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,\ 1,\ 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(1,\ 1,\ -2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1,\ 1,\ 0)$, $A=\frac{1}{2}A_{359}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -1,\ 0)$, ${}^t(0,\ 0,\ -1)$, $A=\frac{1}{3}A_{360}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ -1,\ 0)$, ${}^t(0,\ 0,\ -1)$, $A=\frac{1}{2}A_{361}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{7}}\,{}^t(\sqrt{2}-1,\ 1,\ -\sqrt{2}-1)$, $\frac{1}{\sqrt{14(2+\sqrt{2})}}\,{}^t(1+\sqrt{2},3+2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\,{}^t(1+\sqrt{2},\ -1,\ 0)$, $A=\frac{1}{4}A_{362}$; 8) $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $\frac{1}{2}\,{}^t(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(1,\ 0,\ -1,\ 0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(0,\ 1,\ 0,\ -1)$, $A=A_{494}$. **30.41.** Conseils: 1) le nombre 1 est la valeur propre; 2) le nombre -1 est la valeur propre. **30.45.** 3) Conseil: se servir du résultat obtenu dans le problème 30.39, 3). **30.46.** Conseil: se servir des résultats des problèmes 30.45, 1) et 24.105.

31.1. La fonction linéaire sur $\mathcal{L}_n$ est application linéaire de $\mathcal{L}_n$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$ si $\mathcal{L}_n$ est complexe). **31.2.** Si $e'=eS$ et $\varkappa$, $\varkappa'$ sont les matrice-lignes des coefficients de la fonction linéaire dans les bases e et e', on a $\varkappa'=\varkappa S$. **31.3.** A l'aide de la matrice ${}^t(S^{-1})$. **31.4.** $(0,\ \ldots,\ 0)$. **31.5.** 1) Non; 2) seulement pour la fonction nulle; 3) seulement pour $\alpha=0$. **31.6.** Toujours pour une fonction non nulle; à condition que $\alpha=0$ si la fonction est nulle. **31.7.** $\mathbb{R}$ pour une fonction non nulle, $\{0\}$ pour la fonction nulle. **31.8.** 1), 4) Oui; 2), 3) non. **31.9.** 1) $(1,\ 1,\ 0)$; 4) $(1,\ 2,\ -3)$. **31.10.** 1) $(4,\ 4,\ 4)$; 2) $(2,\ 4,\ 6)$; 3) $(9,\ 6,\ 3)$; 4) $(-2,\ 0,\ 2)$. **31.11.** 1) $\frac{1}{|\mathbf{a}|}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, où $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ sont les coordonnées de **a**. 2) Elle ne l'est pas. **31.12.** 1) $(-\alpha_2,\ \alpha_1)$, où $\alpha_1,\ \alpha_2$ sont les coordonnées de **a**; 2) elle ne l'est pas. **31.13.** 1) $(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\ \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)$, où $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ et $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ sont les coordonnées des vecteurs **a**, **b**; 2) non. **31.14.** 1), 2) Elle ne l'est pas; 3) $(0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ (l'unité est à la i-ème place); 4) $(1,\ \ldots,\ 1)$. **31.15.** E_n. **31.16.** ${}^tC$. **31.19.** 1) (8/3,

0, 16/15, 0); 2) (1, 1/3, 1/5, 1/7). **31.20.** (1, 0, ..., 0). **31.21.** 1) $(1, t_0, \ldots, t_0^n)$; 2) (1, 0, ... 0). **31.23.** $\delta = 3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3$. **31.25.** $k!$ (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) (l'unité occupe la $(k+1)$-ième place) pour $k \leqslant n$; (0, ..., 0) pour $k > n$. **31.26.** 1) $(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_n)$, où $\varkappa_i = 0$ pour $i \leqslant k$ et $\varkappa_i = i(i-1)\ldots(i-k)\, t_0^{i-k-1}$ pour $i > k$; 2) $k!$ (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) (l'unité est à la $(k+1)$-ième place). **31.29.** $f(x) = 3\xi_1' + 5\xi_2' + 4\xi_3'$. **31.31.** 1) (0, 0, 2); 2) (5, -5, -2); 3) (3, 3, 3); 4) (0, 1, 2). **31.32.** $\delta_0 = \varphi_2, \delta_1 = \frac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_1)$, $\delta_2 = \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3$, ou $\delta = \frac{1}{2}\varphi A_{197}$. **31.33.** $\delta_k(p) = \frac{1}{k!}\frac{d^k(p)}{dk^k}\Big|_{t=0}$ $(k = 0, \ldots, n)$ ou $\delta_k(p) = a_k$ si $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.
31.34. $f_k(p) = \frac{1}{k!}\frac{d^k(p)}{dt^k}\Big|_{t=t_0}$ $(k = 0, \ldots, n)$. **31.35.** $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2 - f_1$, $f_3' = f_3 - f_2 + f_1$. **31.36.** $\frac{1}{2}(t-2)(t-3)$, $(t-1)(3-t)$, $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)$.
31.37. $p_i(t) = \prod\limits_{k \neq i} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Les coordonnées du polynôme $p(t)$ sont $p(t_1), \ldots, p(t_n)$. **31.38.** $(1, t-2, t-2)^2/2)$. **31.39.** $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t-t_0) + \ldots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$. **31.41.** La base est formée par les fonctions $f_{ij}(X) = x_{ij}$, où $X = \| x_{ij} \| \in \mathscr{R}_{(n,\, n)}$. A la fonction f_{ij} correspond la matrice $C_{ij} = E_{ji}$. **31.42.** La base est formée par les fonctions $f_i(X) = \operatorname{tr} C_i X$, $i = 0, 1, 2, 3$, où $C_0 = \frac{1}{2}\sigma_0$, $C_1 = \frac{1}{2}\sigma_1$, $C_2 = \frac{1}{2}\sigma_2$, $C_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$.
31.43. Conseil: se servir du problème 31.30. **31.44.** $\dim \mathscr{N} = n-1$ pour $f \neq 0$ et $\mathscr{N} = \mathscr{L}_n$ pour $f = 0$. **31.45.** Conseil: choisir une base adéquate. **31.46.** $A_{151}[{}^t(c_1, c_2)]$ où c_1, c_2 sont des nombres quelconques. **31.47.** $\dim \mathscr{K} = n - \dim \mathscr{N}$. **31.48.** $(c_1, c_2, c_3)({}^tA_{410})$, où c_1, c_2, c_3 sont des nombres quelconques. **31.49.** Enveloppe linéaire des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \delta_1$ définies dans les problèmes 31.23 et 31.32.

32.1 1) $\| 1 \|$, x_1^2; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, x_1^2; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{Vmatrix}$, $2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$ 4) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{Vmatrix}$, $2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3 + x_3^2$; 5) matrice unité $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$; 6) A_{604}, $\sum\limits_{i=1}^n x_i x_{n-i+1}$; 7) A_{638} pour $a = b = 1$, $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i;\, x_{i+1}$. **32.2.** 1) $\| -3 \|$ $-3x_1y_1$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 9 \end{Vmatrix}$, $9(-x_1y_2 - x_1y_1 + x_2y_2)$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$, $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 + 7x_3y_3$; 4) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 3x_2y_2$; 5) $\frac{1}{2}A_{634}$; $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_iy_{i+1} + x_{i+1}y_i)$. **32.3.** 1) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$; 2) $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$; 3) $4x_1^2 + 4_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$; 4) $4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3$; 5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 -$

$-x_3x_4)$; 6) $2(x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3-x_2x_4+x_3^2+x_4^2)$; 7) $2(x_1^2-x_1x_3+x_2^2-x_2x_4+x_3^2-x_3x_4+x_4^2-x_4x_5+x_5^2-x_5x_6+x_6^2)$; $2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$, **32.4.** $\mathrm{b}(x, y)=(\mathrm{k}(x+y)=\mathrm{k}(x)-\mathrm{k}(y))/2$. **32.5.** 1) La i-ème et la j-ième ligne changent de place ainsi que les colonnes i et j; 2) la i-ième ligne et la i-ème colonne sont multipliées par λ (dans ce cas, l'élément diagonal se trouvant à leur intersection est multiplié par λ^2); 3) à la ligne i s'ajoute la ligne j multipliée par λ, et à la colonne i s'ajoute la colonne j multipliée par λ (ceci étant, l'élément diagonal se trouvant à leur intersection se transforme suivant la formule $b'_{ii} = b_{ii} + 2\lambda b_{ij} + \lambda^2 b_{jj}$); 4) les éléments de la matrice se transforment par une symétrie par rapport à la diagonale non principale. **32.6.** Matrice orthogonale. **32.7.** 1) $13x_1'^2 - 46x_1'x_2' + 41x_1'^2$; 2) $x_1'^2 + 2x_2'^2$; 3) $x_1'^2$; 4) $8x_1'^2 - 18x_1'x_3' - 8x_3'x_3' + 3x_2'^2 - 6x_2'x_3' - 4x_3'^2$; 5) $7x_1'^2 - 11x_2'^2 - 2x_3'^2 + 3x_1'x_2' - 6x_1'x_3' + 11x_2'x_3'$; 6) $20x_1'^2 + 8x_2'^2 + 35x_3'^2$; 7) $(n-1)x_1'^2 + (n-2)x_2'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2 + (2n-3)x_1'x_2' + (2n-5)x_1'x_3' + (2n-5)x_2'x_3' + \ldots + x_1'x_n' + \ldots + x_{n-1}'x_n'$. **32.8.** 1) $x_1'^2 + x_2'^2$; 2, 2, 0, 2; 2) $x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 1, 1, 0; 3) $x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 1, 1, 0; 4) $x_1'^2$; 1, 1, 0, 1; 5) $-x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 0, 2, -2; 6) $-x_1'^2$; 1. 0, 1, -1; 7) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 2, 1, 1; 8) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 1, 1, -1; 9) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; 3, 3, 0, 3, ; 10) $x_1'^2$; 1, 1, 1, 0, 1; 11) $x_1'^2 + x_2'^2$; 2, 2, 0, 2; 12) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 1, 2, -1; 13) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$; 4, 4, 0, 4; 14) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 - x_5'^2 - x_6'^2$; 6, 4, 2, 2; 15) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$; 4, 2, 2, 0; 16) $-x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 0, 3, -3. **32.9.** Soit n la dimension de l'espace vectoriel. Les formes définies positives sont: 1) pour $n = 2$, 9) pour $n = 3$, 13) pour $n = 4$. Les formes définies négatives sont: 5) pour $n = 2$, 16) pour $n = 3$. Les formes semi-définies positives sont: 1) pour $n > 2$, 4, 4) pour $n \geqslant 2$, 10), 11) pour $n \geqslant 3$, 9) pour $n > 3$, 9) pour $n > 3$, 13) pour $n > 4$. Les formes semi-définies négatives sont: 5) pour $n > 2$, 6) pour $n > 2$, 16) pour $n > 3$. **32.10.** 1) $x_1'y_1' + x_2'y_2'$; 2) $x_1'y_1'$; 3) $x_1'y_1' + x_2'y_2'$; 4) $x_1'y_1' - x_2'y_2'$; 5) $x_1'y_1' - x_2'y_2' - x_3'y_3'$; 6) $x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3'$; 7) ne se réduit pas (la forme est asymétrique). **32.12.** 1) $x_1'^2 + x_2'^2$ pour $\lambda > 1/3$, $x_1'^2$ pour $\lambda = 1/3$, $x_1'^2 - x_2'^2$ pour $\lambda < 1/3$; 2) $x_1'^2 + x_2'^2$ pour $|\lambda| < 8$, $x_1'^2$ pour $|\lambda| = 8$, $x_1'^2 - x_2'^2$ pour $|\lambda| > 8$; 3) $x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$ pour $\lambda > -6$, $x_1'^2 - x_2'^2$ pour $\lambda = -6$, $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$ pour $\lambda < -6$; 4) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2$ pour $\lambda > 7/4$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$ pour $\lambda = 7/4$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_4'^2$ pour $\lambda < 7/4$; 5) $x_1'^2 + x_2' - x_3'^2$ pour $\lambda = 3$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$ pour $\lambda \neq 3$. **32.13.** 1) $\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 2) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i'^2$; 3) $\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 4) $x_1'^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i'^2$; 5) $-\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 6) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i'^2$. **32.18.** 1) Le forme quadratique est définie positive pour $\lambda > 1$, semi-définie positive pour $\lambda = 1$, définie négative pour $\lambda < -4$, semi-définie négative pour $\lambda = -4$; 2) est définie négative pour $|\lambda| < 1$, semi-définie négative pour $\lambda = \pm 1$; 3) est définie positive pour $\lambda > 8$, semi-définie positive pour $\lambda = 8$; 4) ces valeurs de λ n'existent pas; 5) est définie positive pour $\lambda < -6$, semi-définie positive pour $\lambda = -6$, définie négative pour $\lambda > 6$, semi-définie négative pour $\lambda = 6$. **32.21.** n^2 et n. **32.22.** $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$ dans la base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \sqrt{\frac{5}{2}}\, \frac{3t^2-1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}} \times \frac{5t^3-3t}{2}\right)$. **32.25.** Le rang est un nombre pair, la signature est égale à zéro. **32.26.** 2) Ce sont toutes les transformations linéaires dont les matrices sont orthogonal dans la base dans laquelle est écrite la forme donnée. **32.27.** On donne les matrices ou les formules de passage de la base

donnée $(e_1, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, \ldots e'_n)$, ainsi que la forme diagonale dans la nouvelle base. 1) A_{61}, $x_1'^2-9x_2'^2$; 2) A_{62}, $\frac{25}{12}x_1'^2$; 3) A_{53}, $x_1'^2+9x_2'^2$; 4) A_{54}, $-10x'_1y'_1$; 5) A_{61}, $-\frac{1}{2}x'_1y'_1-\frac{3}{2}x'_2y'_2$; 6) diag $(A_{61}, 1)$, $-\frac{1}{2}x_1'^2-\frac{3}{2}x_2'^2$; 7) A_{313}, $x_1'^2+2x_2'^2+10x_3'^2$; 8) A_{319}, $x'_1y'_1+3x'_2y'_2$; 9) A_{314}, $x'_1y'_1+6x'_2y'_2-6x'_3y'_3$; 10) A_{322}, $3(x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2)$; 11) A_{313}, $4x_1'^2+4x_2'^2+x_3'^2$; 12) A_{313}, $9x_1'^2-x_2'^2-9x_3'^2$; 13) A_{316}, $\frac{3}{2}(x_1'^2+x_2'^2)$; 14) A_{328}, $14x_1'^2$; 15) A_{315}, $-6x'_1y'_1$; 16) A_{330}, $\sqrt{3}(x'_1y'_1-x'_2y'_2)$; 17) $\frac{1}{2}A_{468}$, $2(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2-x_4'^2)$; 18) $3x_1'^2+3x_2'^2+6x_3'^2-6x_4'^2$ dans la base des vecteurs $e'_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3)$, $e'_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_2-e_3+e_4)$, $e'_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_2+e_4)$, $e'_4=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_3-e_4)$; 19) $x_1'^2+2x_2'^2+5x_3'^2+10x_4'^2$ dans la base des vecteurs $e'_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}(4e_1+e_2-e_3)$, $e'_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(e_2+e_3-e_4)$, $e'_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_2+e_3+2e_4)$, $e'_4=\frac{1}{3}(e_1-2e_2+2e_3)$; 20) $-x_1'^2-x_2'^2+2x_3'^2-2x_4'^2$ dans la base des vecteurs $e'_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_3)$, $e'_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(e_2+e_3-2e_4)$, $e'_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(3e_1+e_2+e_3+e_4)$, $e'_4=\frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3+e_4)$; 21) $\frac{1}{2}\times(x'_1y'_1+x'_2y'_2-x'_3y'_3-x'_4y'_4)$ dans la base des vecteurs $e'_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$, $e'_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3+e_4)$, $e'_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_2)$, $e'_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_3-e_4)$; 22) $5(x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2)$ dans la base des vecteurs $e'_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1-e_2)$, $e'_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(e_1+2e_2)$, $e'_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(e_3-2e_4)$, $e'_4=\frac{1}{\sqrt{5}}(2e_3+e_4)$. 23) $\frac{n+1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}(x_2'^2+\ldots+x_n'^2)$; $e'_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}e_i$; $(e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée quelconque du sous-espace $x_1+\ldots+x_n=0$, par exemple, la base des vecteurs $e'_k=\frac{1}{\sqrt{k^2-k}}\times\left(\sum_{i=1}^{k-1}e_i-(k-1)e_k\right)$ $(k=2, \ldots, n)$; 24) $nx'_1y'_1$; $e'_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}e_i$; $(e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée du sous-espace $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i=0$; 25) $x_1'^2+\ldots+x_n'^2-x_{n+1}'^2-\ldots-x_{2n-1}'^2$ dans la base des vecteurs $e'_k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k+e_{2n-k})$,

$e'_n = e_n$, $e'_{n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2n-k})$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; 26) $2\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; $e'_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2n-k+1})$, $e'_{n+k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2n-k+1})$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$; 27) $\sum_{k=1}^{n} x_k'^2 \cos\frac{\pi k}{n+1}$ dans la base des vecteurs $e'_k = f_k/\|f_k\|$, où $f_k = \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{k\pi i}{n+1} e_i$ $(k = 1, \ldots, n)$.

32.28. 1) $x_1''^2 - x_2''^2$; 2, 0; 2) $x_1''^2$; 1, 1; 3) $x_1''^2 + x_2''^2$; 2, 2; 4) $-x_1''y_1''$; 1, -1; 5) $-x_1''y_1'' - x_2''y_2''$, 2, 2; 6) $-x_1''^2 - x_2''^2$; 2, -2; 7) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 3, 3; 8) $x_1''y_1'' + x_2''y_2''$; 2, 2; 9) $x_1''y_1'' + x_2''y_2'' - x_3''y_3''$; 3, 1; 10) $x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2$; 3, 1; 11) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 3, 3; 12) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$; 3, -1; 13) $x_1''^2 + x_2''^2$; 2, 2; 14) $x_1''^2$; 1, 1; 15) $-x_1''^2$; 1, -1; 16) $x_1''y_1'' - x_2''y_2''$; 2, 0; 17), 18) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 - x_4''^2$; 4, 2; 19) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2$; 4, 4; 20) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2 - x_4''^2$; 4, -2; 21) $x_1''y_1'' + x_2''y_2'' - x_3''y_3'' - x_4''y_4''$; 4, 0; 22) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$; 3, -1; 23) $\sum_{i=1}^{n} x_i''^2$; n, n; 24) $x_1''y_1''$; 1, 1; 25) $\sum_{i=1}^{n} x_i''^2 - \sum_{i=n+1}^{2n-1} x_i''^2$; $2n-1$, 1; 26) $\sum_{i=1}^{n} x_i''^2$; n, n; 27) $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi i}{n+1}\right) x_i''^2$, le rang vaut $2[n/2]$. **32.32.** $\Gamma^{-1}B$. **32.33.** 1) $\begin{Vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 29 & 0 \\ -18 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 5/2 & -1 \\ 9/2 & -2 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 26 & 44 & -49 \\ -12 & -21 & 24 \\ -5 & -8 & 10 \end{Vmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. **32.35.** $x_1'^2 + \ldots + x_r'^2$, si les r premiers vecteurs de la base orthonormée appartiennent à $\mathcal{M}$ et les $n-r$ vecteurs restants à $\mathcal{M}^\perp$. **32.36.** 1) $x_1 = \frac{x_1''}{\sqrt{2}} - x_2''$, $x_2 = \frac{x_1''}{3\sqrt{2}} + \frac{2x_2''}{3}$; $f = x_1''^2 + x_2''^2$, $g = 5x_1''^2 - 4x_2''^2$; 2) $x_1 = \sqrt{5}\,x_1''$, $x_2 = \frac{-3x_1'' + x_2''}{\sqrt{5}}$; $f = \frac{29}{2}x_1''^2 - \frac{1}{2}x_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2$; 3) $x_1 = \frac{x_1''}{\sqrt{6}} + \frac{x_2''}{\sqrt{21}}$, $x_2 = \frac{x_1''}{\sqrt{6}} + \frac{4x_2''}{\sqrt{21}}$; $f = x_1''^2 + \frac{1}{7}x_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2$ ou $x_1 = \frac{x_1''}{\sqrt{6}} + \frac{x_2''}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{x_1''}{\sqrt{6}} + \frac{4x_2''}{\sqrt{3}}$; $f = x_1''^2 + x_2''^2$, $g = x_1''^2 + 7x_2''^2$ (les deux formes sont définies positives); 4) $x_1 = \frac{2x_1''}{\sqrt{3}} + \frac{x_2''}{\sqrt{6}}$, $x_2 = \sqrt{3}\,x_1'' + \sqrt{\frac{3}{2}}\,x_2''$; $f = x_1''^2 + x_2''^2$, $g = x_1''^2 - \frac{1}{2}x_2''^2$; 5) $x_1 = \frac{-5x_1'' + x_2''}{\sqrt{26}}$, $x_2 = \frac{21x_1'' + x_2''}{\sqrt{26}}$; $f = 26x_1''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2$; 6) $x_1 = \frac{8x_1'' + x_2''}{2\sqrt{13}}$, $x_2 = \frac{-2x_1'' + 3x_2''}{2\sqrt{13}}$; $f = x_1''^2 + x_2''^2$, $g = -5x_1''^2 - \frac{1}{8}x_2''^2$ ou $x_1 = \frac{\sqrt{10}\,x_1'' - 4x_2''}{\sqrt{65}}$,

$x_2 = \dfrac{3\sqrt{10}\,x_1'' + x_2''}{\sqrt{65}}$; $f = 8x_1''^2 + 0{,}2x_2''^2$, $g = -x_1''^2 - x_2''^2$; 7) $x_1 = (\sqrt{3}\,x_1'' - \sqrt{2}\,x_2'')/\sqrt{5}$, $x_2 = ((\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\,x_1'' + (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\,x_2'')/\sqrt{5}$; $f = 3x_1''^2 - 2x_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2$; 8) $x_1 = \sqrt{(a+1}\,x_1'' - \sqrt{a}\,x_2'')/\sqrt{2a+1}$, $x_2 = ((\sqrt{a} - m\sqrt{a+1})\,x_1'' + (\sqrt{a+1} + m\sqrt{a})\,x_2'')/\sqrt{2a+1}$; $f = (a+1)\,x_1''^2 - ax_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2$; 9) $x_1 = \dfrac{x_2''}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{x_1''}{\sqrt{3}} + \dfrac{x_2''}{\sqrt{2}} - \dfrac{2x_3''}{\sqrt{6}}$, $x_3 = \dfrac{x_1''}{\sqrt{3}} - \dfrac{x_2''}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_3''}{\sqrt{6}}$; $f = 3x_1''^2 + 2x_2''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 10) $x_1 = \dfrac{x_1''}{\sqrt{5}} + \dfrac{5x_2''}{4\sqrt{3}} + \dfrac{7x_2''}{4\sqrt{5}}$, $x_2 = -\dfrac{x_1''}{\sqrt{5}} + \dfrac{x_2''}{2\sqrt{3}} - \dfrac{x_3''}{2\sqrt{5}}$, $x_3 = -\dfrac{x_2''}{4\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}\,x_3''}{4}$; $f = 5x_1''^2 - x_2''^2 - 5x_3''^2$, $g = x_1''^2 - x_2''^2 + x_3''^2$; 11) $x_1 = \dfrac{x_1''}{\sqrt{2}} + \dfrac{x_2''}{\sqrt{6}} - \dfrac{x_3''}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \sqrt{3}\,x_3''$, $x_3 = -\dfrac{2x_2''}{\sqrt{6}} + \dfrac{2x_3''}{\sqrt{3}}$; $f = 3x_1''^2 + 3x_2''^2 - 3x_3''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$, $g = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 12) $x_1 = \dfrac{2x_1''}{\sqrt{14}} + \dfrac{2x_2''}{\sqrt{5}} + \dfrac{8x_3''}{\sqrt{70}}$, $x_2 = \dfrac{4x_1''}{\sqrt{14}} + \dfrac{3x_2''}{\sqrt{5}} + \dfrac{2x_3''}{\sqrt{70}}$, $x_3 = \dfrac{3x_1''}{\sqrt{14}} + \dfrac{5x_3''}{\sqrt{70}}$; $f = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$, $g = 14_1''^2$; 13) $x_1 = \dfrac{9x_1'' - x_2''}{\sqrt{6}} + \dfrac{6x_3'' + 7x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \dfrac{8x_1'' - 2x_2''}{\sqrt{6}} + \dfrac{5x_3'' - 8x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \dfrac{3x_1'' - x_2''}{\sqrt{6}} + \dfrac{3x_3'' + 4x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_4 = \dfrac{x_1'' - x_2''}{\sqrt{6}} + \dfrac{x_3'' + x_4''}{\sqrt{3}}$; $f = 3x_1''^2 + 3x_2''^2 + 6x_3''^2 - 6x_4''^2$, $g = -x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2 - x_4''^2$; 14) $x_1 = x_1'' + x_2'' + x_3'' - x_4''$, $x_2 = (x_1'' + x_2'' + x_3'' + 3x_4'')/2$, $x_3 = x_3'' + x_4''$, $x_4 = (-x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'')/2$; $f = 2\,(x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 - x_4''^2)$, $g = x_2''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2$. **32.37.** Les formes x_1^2 et x_2^2 sont diagonales, mais parmi leurs combinaisons linéaires il n'y a pas de formes définies positives. **32.39.** 1) $5x_1''^2$; 2) $x_1''^2 + 4x_2''^2$; 3) $\dfrac{49}{2}x_1''^2 - \dfrac{1}{2}x_2''$; 4) $9x_1''^2 - x_2''^2$. **32.41.** 1) $x_1''^2$; 2), 3), 4) $x_1'^2 + x_2'^2$; 5) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; 6) $x_1'^2 + x_2'^2$; 7) $x_1'^2$. **32.42.** 1) $\|-i\|$; 2) $\begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 3 & 4i \\ -5 & i \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -3i & 2 \\ 2 & 1-i \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & -5 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4+i & 0 & 2+i \end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2-5i \\ 3 & -6 & 4i \\ 2+5i & -4i & 1+3\sqrt{2} \end{Vmatrix}$; 9) matrice unité. **32.43.** 6) $(1+i)\,x_1\bar{x}_2 + (1-i)\,x_2\bar{x}_1 - 5\,|x_2|^2$; 8) $2\,|x_1|^2 + 3x_1\bar{x}_2 + 3x_2\bar{x}_1 + (2-5i)\,x_1\bar{x}_3 + (2+5i)\,x_3\bar{x}_1 - 6\,|x_2|^2 + 4ix_2\bar{x}_3 - 4ix_3\bar{x}_2 + (1 + 3\sqrt{2})\,|x_3|^2$; 9) $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$. **32.44.** 1) $5\,|x_1|^2 - 2x_1\bar{x}_2 - 2x_2\bar{x}_1 + 8\,|x_2|^2$; 2) $\varepsilon x_1\bar{x}_2 + \bar{\varepsilon}x_2\bar{x}_1$; 3) $8\,|x_2|^2 + 2x_1\bar{x}_2 + 2x_2\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_1 + 2x_2\bar{x}_3 + 2x_3\bar{x}_2$; 4) $7\,(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2) + 3x_1\bar{x}_2 + 3x_2\bar{x}_1 + (1+2i)\,x_1\bar{x}_3 + (1-2i)\,x_3\bar{x}_1 + (-1+2i)\,x_1\bar{x}_4 - (1+2i)\,x_4\bar{x}_1 + (1+2i)\,x_2\bar{x}_3 + (1+2i)\,x_3\bar{x}_2 - (1+2i)\,x_2\bar{x}_4 + (-1+2i)\,x_4\bar{x}_2 - 3x_3\bar{x}_4 - 3x_4\bar{x}_3$. **32.45.** On fournit dans les réponses les formules de change-

ment des coordonnées lors du passage à la base orthonormée recherchée. 1) $x_1=(x'_2-ix'_2)/\sqrt{2}$, $x_2=(ix'_1+x'_2)/\sqrt{2}$, $|x'_1|^2+3|x'_2|^2$; 2) $x_1=\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}(x'_1+x'_2)$, $x_2=(x'_1-x'_2)/\sqrt{2}$, $6|x'_1|^2-4|x'_2|^2$; 3) $x_1=(x'_1+x'_2)/\sqrt{2}$, $x_2=\varepsilon(x'_1-x'_2)/\sqrt{2}$, $2|x'_1|^2$; 4) $x_1=(x'_1+ix'_2)/\sqrt{2}$, $x_2=(ix'_1+x'_2)/\sqrt{2}$, $x_3=x'_3$, $2|x'_1|^2+4|x'_2|^2-5|x'_3|^2$; 5) $x_1=\frac{x'_1}{\sqrt{3}}+\frac{x'_2}{\sqrt{2}}+\frac{x'_3}{\sqrt{6}}$, $x_2=\frac{x'_1}{\sqrt{3}}-\frac{2x'_3}{\sqrt{6}}$, $x_3=\frac{ix'_1}{\sqrt{3}}-\frac{ix'_2}{\sqrt{2}}+\frac{ix'_3}{\sqrt{6}}$, $3|x'_1|^2$; 6) $x_1=(-x'_1+x'_3+(1-i)x'_4)/2$, $x_2=(x'_2+(1+i)\times x'_3-x'_4)/2$, $x_3=(x'_1+(-1+i)x'_2+x'_3)/2$, $x_4=((1+i)x'_1+x'_2+x'_4)/2$, $4|x'_1|^2+8|x'_2|^2+12|x'_3|^2+16|x'_4|^2$. **32.46.** $\mathrm{h}(x, y)=\frac{\mathrm{k}(x+y)-\mathrm{k}(x)-\mathrm{k}(y)}{2}+i\,\frac{\mathrm{k}(x+iy)-\mathrm{k}(x)-\mathrm{k}(y)}{2}$.

33.13. A la condition de la dépendence linéaire des vecteurs a_1, b_1, a_0-b_0. **33.14.** 1) $x_1=-1+3t$, $x_2=t$, $x_3=3+t$, $x_4=-2+7t$; 2) $x_1=-2+3t_1+2t_2$, $x_2=1+2t_1$, $x_3=1-6t_1$, $x_4=1+t_1+3t_2$; 3) $2x_1-32x_2-10x_3-9x_4+21=0$. **33.15.** $C\left(\frac{px''_1+qx'_1}{p+q}, \ldots, \frac{px''_n+qx'_n}{p+q}\right)$. **33.18.** 1) $x_1=2+3t$, $x_2=t$; 2) $x_1=-1$, $x_2=1$; 3) $x_1=1+t$, $x_2=1+t$, $x_3=1-t$; 4) $x_1=t_1$, $x_2=-3+3t_1+2t_2$, $x_3=t_2$; 5) $x_1=x_2=x_3=1$; 6) $x_1=1+7t_2$, $x_2=2t_1+23t_2$, $x_3=1+t_1$, $x_4=1-11t_2$; 7) $x_1=11t$, $x_2=-1-7t$, $x_3=1+t$; 8) $x_1=t_1+4t_2+2t_3-3t_4$, $x_2=t_1$, $x_3=1+t_2$, $x_4=t_3$, $x_5=t_4$. **33.19.** 1) $x_1-2x_2+13=0$; 2) $2x_1-3x_2+x_3+1=0$; 3) $4x_1-x_2-22=0$, $x_2-4x_3-2=0$; 4) $x_1-x_2+1=0$, $x_1-x_3=0$, $2x_1-x_4=0$; 5) $14x_1-5x_2-9x_3-4=0$, $x_1+2x_2-3x_4+13=0$. **33.20.** $2x_1+3x_2-4x_3+x_4+3=0$. **33.21.** $x_1=-1+3t$, $x_2=3+t$, $x_3=4+7t$, $x_4=-t$. **33.22.** 1) $x_1+2x_2+3x_3-x_4+6=0$, $x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5+5=0$; 2) $x_1-x_3+x_4=0$, $5x_1+x_2+4x_3-4x_5-8=0$; 3) $2x_1+3x_2-x_4-4=0$, $x_2+2x_3+2x_4+x_5-6=0$. **33.24.** Si deux plans bidimensionnels de l'espace tridimensionnel possèdent un point commun, ils contiennent également une droite commune. Si, dans un espace quadridimensionnel, les plans tridimensionnel et bidimensionnel ont un point commun, ils contiennent également une droite commune. Si, dans un espace quadridimensionnel, deux plans tridimensionnels ont un point commun, ils contiennent un plan bidimensionnel commun. **33.26.** Soient (π_1), (π_2) et (π_3) les plans de sous-espaces directeurs $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ passant par les points A, B et C respectivement. Il existe alors un plan et un seul de dimension minimale contenant (π_1), (π_2) et (π_3); le sous-espace directeur du plan recherché est la somme $\mathscr{L}+\mathscr{M}+\mathscr{N}+\mathscr{P}$, où $\mathscr{P}$ est l'enveloppe linéaire du système des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. **33.27.** 1) $5x_1-x_2+7x_3-9=0$, $3x_2-x_4-3=0$; 2) $x_1-2x_2-12x_3+1=0$, $x_2-x_3+x_4+5=0$; 3) $2x_2-x_3+x_4+1=0$. **33.28.** 1) plan tridimensionnel $5x_1+2x_2+x_4+11x_5-42=0$, $11x_1+5x_2-x_3+20x_5-81=0$; 2) plan quadridimensionnel $73x_1-6x_2-111x_3-62x_4-52x_5-195=0$; 3) plan quadridimensionnel $x_2+x_3-2=0$. **33.30.** 1) La droite et le plan sont parallèles 2) ont un point commun unique (1, 2, 1, 0); 3) sont disjoints (absolument); 4) la droite appartient au plan bidimensionnel. **33.31.** 1) Les plans sont absolument disjoints; 2) ont un point commun unique (1, 1, 1, 1/2, 3/2; 3) sont disjoints parallèlement à la droite $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4=\frac{1}{2}x_5$; 4) se coupent sui-

vant la droite $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = x_5 = 2$; 5) sont parallèles; 6) se confondent. **33.32.** (2, —2, 3, 3); $14x_1 - 4x_3 - 3x_4 - 7 = 0$, $3x_1 + x_2 - 2x_4 + 2 = 0$. **33.33.** $2t^3$. **33.34.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = -1 - t$, $t_4 = 5 + t$; (1, 1, 2, 2) et (1, 2, 1, 3). **33.37.** 1) (12, —28, —24, —3); 2) (—5, 4, 8, —1). **33.38.** 1) Oui, 2) oui; 3) oui; 4) il l'est pour $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ et ne l'est pas dans tous les autres cas; 5) oui; 6) il l'est pour $n \geqslant 1$ et ne l'est pas pour $n \geqslant 2$. **33.41.** Tétraèdre de sommets aux points (3/4, —1/4, —1/4, —1/4), (—1/4, 3/4, —1/4, 1/4), (—1/4, —1/4, 3/4, —1/4), (—1/4, —1/4, —1/4, 3/4). **33.43.** 1) $C_k^p 2^{k-p}$; 2) 2^{k-1}. **33.44.** Octaèdre de sommets aux points (1, 1, —1, —1), (1, —1, 1, —1), (1, —1, —1, 1), (—1, 1, 1, —1), —1, 1, —1, 1), (—1, —1, 1, 1).

•

34.2. 1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{14}$, $B = 90°$, $A = C = 45°$; 2) $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$, $A = 60°$, $B = \text{Arc}\cos\frac{1}{2\sqrt{7}}$, $C = \text{Arc}\cos\frac{2}{\sqrt{7}}$; 3) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 6$, $A = B = C = 60°$. **34.3.** 2) et 4) Non; 1) oui; $\alpha = 90°$, $\beta = \text{arc}\cos(\sqrt{7}/3)$, $\gamma = \text{arc}\cos(\sqrt{2}/3)$; 3) oui; $\alpha = \text{arc}\cos(3/\sqrt{10})$, $\beta = \text{arc}\cos(2/\sqrt{5})$; $\gamma = 135°$. α, β et γ sont ici les angles intérieurs du triangle, qui sont reprectivement opposés aux côtés a, b et c. **34.4.** $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 30°$, $\varphi_3 = 90°$, où φ_1, φ_2 et φ_3 sont les angles intérieurs du triangle, opposés respectivement aux côtés $p_1(t)$, $p_2(t)$ et $p_3(t)$. **34.5.** Conseils. 1) On peut utiliser le fait que le plan auquel appartient le triangle est isomorphe au plan euclidien et appliquer le théorème correspondant de la géométrie élémentaire. 2) On peut établir l'égalité $\cos\alpha + \cos(\beta + \gamma) = 0$, où α, β et γ sont les angles intérieurs du triangle, et en déduire l'assertion nécessaire. **34.8.** $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2}$. **34.9.** Arc cos $(1/\sqrt{n})$. **34.11.** 1) (—2, —2, —1, 1), $R = 6$; 2) (0, —1, 1, —1), $R = 5$. **34.12.** (1, —2, —3, 1), $R = 7$. **34.13.** 1) 5; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 2; 4) $6\sqrt{10}$; 5) 3; 6) 10. **34.15.** 1) 6; 2) 1; 3) $7\sqrt{21}$. **34.16.** $\frac{\sqrt{n+1}}{n!}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^n$. **34.20.** 1) 5; 2) 3. **34.21.** 1) $5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = C_{1,2}$; $C_1 = 17$, $C_2 = -11$; 2) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = C_{1,2}$, $C_1 = 29$, $C_2 = -21$; 3) $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = C_{1,2}$; $C_1 = 7$, $C_2 = -17$. **34.22.** 1) (1, 1, 2, —1); 2) (7, 2, 2, 1); 3) (—2, — 3, 1, 3, 2). **34.23.** 1) (2, —1, 1, 3); (2, 1, 3, 3, 0). **34.24.** $1/n$. **34.25.** 1) (—3, —7, —1, —5); 2) (5, —1, 5, —5); 3) (7, 2, 3, 0, 9) **34.26.** 1) (1, —3, 0, —2); 2) (1, 1, 1, —1); 3) (0, 2, 1, 3, —1). **34.28.** 1) $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 4 + t$; 2) $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 3 - t$; 3) $x_1 = 4 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1 - t$. **34.29.** 1) (0, —3, —1, 3); 2) (—4, —1, 3, —2). **34.30.** 1) 45°; 2) arc cos (1/3); 3) 30°. **34.31.** 1) 30°; 2) Arc cos $(1/\sqrt{5})$. **34.32.** 1) 3; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 4; 4) $\sqrt{6}$. **34.34.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) 2; 4) $2\sqrt{2}$; 5) 4. **34.35.** 1) $x_1 = 3 + t$, $x_2 = 7 + 2t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 1 + t$; 2) $x_1 = -3 + t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 4 - t$, $x_4 = 7 - 2t$, $x_5 = -3 + t$. **34.36.** 1) (0, 2, —1, 1); 2) (—1, 0, 1 0, 1); 3) (2, 1, 3, —1, 0). **34.37.** 1) (1, 1, 1, 3); 2) (1, 1, —2, —2, 0). **34.39.** 1) $2\sqrt{7}$; 2) $6\sqrt{2}$. **34.40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{14}$; 3) 4. **34.41.** 1) 3; 2) 1. **34.42.** 1) arc cos $(\sqrt{7}/3)$; 2) 45°; 3) arc cos $\sqrt{2/3}$. **34.44.** 1) $1/\sqrt{5}$; 2) 5; 3) 2; 4) $3/\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{5}/3$. **34.46.** 1) $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = -1 - t_1$, $x_3 = -1 + t_1$, $x_4 = 1 - t_2$ et $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = -1$; 2) $x_1 = 2 + t_1$. $x = 2 + t_2$,

$x_3 = -1 + t_3$, $x_4 = 2 - 2t_1 - 2t_2 + t_3$, $x_5 = 1 - t_1 - 2t_2 + 2t_3$ et $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 2 - t$, $x_5 = 1 + t$; 3) $x_1 = 3t_1 + 2t_2$, $x_2 = -1 - 2t_1 - t_2$, $x_3 = 1 + t_1 + t_2$, $x_4 = -2 + t_1$, $x_5 = 1 + t_2$ et $x_1 = t$, $x_2 = -1, -t$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2 + t$, $x_5 = 1 - t$. 34.47. 45°. 34.48. 1) arc cos (2/3); 2) 45°; 3) arc cos $(1/\sqrt{5})$.

35.1. 1) $(\xi')^1 + (\xi')^2 = (\tau_1^1 + \tau_1^2)\xi_1 + (\tau_2^1 + \tau_2^2)\xi^2$; 2) $(\xi')^1 + (\eta')^1 = \tau_1^1(\xi^1 + \eta^1) + \tau_2^1(\xi^2 + \eta^2)$; 3) $\begin{vmatrix} (\xi')^1 & (\eta')^1 \\ (\xi')^2 & (\eta')^2 \end{vmatrix} = \det T \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$. Aucune des grandeurs n'est ni un tenseur ni un invariant. 35.2. 1) La correspondance donnée est un invariant, 2) un ensemble de n invariants, n'est pas un tenseur. 35.3. 1), 2), 3), 4), 6). La transformation linéaire est un invariant; 5) n'est pas un tenseur. 35.4. 1), 4) les invariants relatifs; 5) 6) les invariants; 2) et 3) ni tenseurs, ni invariants. 35.5. 1) La correspondance donnée n'est pas un invariant; 2) est un tenseur de type (0, 1). 35.6. 1) Tenseur de type (0, 2); 2) tenseur de type (0, 2). 35.7. 1) Tenseur de type (0, 2), $a_{ik} = a_i a_k$; 2) tenseur de type (0, 2), $a_{ik} = a_i b_k$. 35.8. Tenseur de type (0, 2), $a_{ik} = a_i b_k$; 2) tenseur de type (0, 2) $a_{ik} = a_i a_k$. 35.9. 1) Tenseur de type (0, 2), $a_{13} = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $i \neq 1$ ou $j \neq 3$; 2) tenseur de type (0, 2), $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. 35.10. 1) tenseur de type (0, 1), $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = \ldots = a_n = 0$; 2) tenseur de type (0, 2), $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $i + j \geqslant 4$; 3) tenseur de type (0, 2), $a_{ij} = 1$ pour tous i, j; 4) tenseur de type (0, 2), $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pour $i = j$. 35.14. Le tenseur donné (« symbole de Kronecker » ou « tenseur isotrope ») correspond à la transformation linéaire identiques, ses composantes sont identiques dans toutes les bases. 35.15. $\delta'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$. La fonction bilinéaire associée à ce tenseur se définit dans la base e par la formule $K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i$, où ξ^i, η^i sont les coordonnées des vecteurs x et y. Elle est symétrique et définie positive. 35.16. $(\theta')^i = \tau_{i_0}^i$, où $T = S^{-1} = \| \tau_j^i \|$. Le tenseur donné est le i_0-ème vecteur de la base e. 35.17. $(\theta')_i = \sigma_i^{i_0}$, où $S = \| \sigma_j^i \|$. Le covecteur θ_i correspond à une fonction $\varphi: \mathscr{L}_n \to \mathbf{R}$ qui est définie dans la base e par la formule $\varphi(x) = \xi^{i_0}$ (ξ^{i_0} étant la coordonnée du numéro i_0 du vecteur x dans la base e). 35.18. δ_{kl}^{ij} est le tenseur isotrope de type (2, 2). C o n s e i l : vérifier la loi de transformation des composantes. Si $n = 3$, parmi les composantes il y en a 69 qui sont nulles. 35.19. Si $i_0 = j_0$, toutes les composantes sont nulles; si $i_0 \neq j_0$, on a $\theta_{i_0 j_0} = 1$, $\theta_{j_0 i_0} = -1$, les autres composantes sont nulles; $\theta'_{kl} = \sigma_k^{i_0}\sigma_l^{j_0} - \sigma_l^{i_0}\sigma_k^{j_0}$. 35.20. Tenseur isotrope de type (k, k). C o n s e i l : vérifier la loi de transformation des coordonnées. 35.21. 1) $\varepsilon'_{i_1 \ldots i_n} = (\det S)\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$; 2) Cette transformation représente un ensemble de n^n invariants et n'est pas un tenseur. 35.22. Un tenseur de valence 3 dans l'espace quadridimensionnel possède 64 composantes. Lors du changement des coordonnées, l'expression de chaque composante contient 64 termes dont chacun comprend quatre facteurs. 35.23. Quelles que soient les valeurs des indices i, j, on a $(a')_j^i = a_1^1\sigma_j^1\tau_1^i + a_1^2\sigma_j^2\tau_1^i + a_2^1\sigma_j^1\tau_2^i + a_2^2\sigma_j^2\tau_2^i$; 2) quelles que soient les valeurs des indices i, j, on a $(a')^{ij} = a^{11}\tau_1^i\tau_1^j + a^{12}\tau_1^i\tau_2^j + a^{21}\tau_2^i\tau_1^j + a^{22}\tau_2^i\tau_1^j$; 3) quelles que soient les valeurs des indices i, j, k; on a $(a')_{jk}^i =$

$= a^1_{11}\sigma^1_j\sigma^1_k\tau^i_1 + a^2_{11}\sigma^1_j\sigma^1_k\tau^i_2 + a^1_{21}\sigma^2_j\sigma^1_k\tau^i_1 + a^2_{21}\sigma^2_j\sigma^1_k\tau^i_2 + a^2_{12}\sigma^2_j\sigma^2_k\tau^i_2 + a^1_{12}\sigma^1_j\sigma^2_k\tau^i_1 +$ $+ a^1_{22}\sigma^2_j\sigma^2_k\tau^i_1 + a^2_{22}\sigma^2_j\sigma^2_k\tau^i_2$. 35.24. 1) $V = T \otimes {}^tS$:

$$\begin{Vmatrix} a'^1_1 \\ a'^1_2 \\ a'^2_1 \\ a'^2_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma^1_1\tau^1_1 & \sigma^2_1\tau^1_1 & \sigma^1_1\tau^1_2 & \sigma^2_1\tau^1_2 \\ \sigma^1_2\tau^1_1 & \sigma^2_2\tau^1_1 & \sigma^1_2\tau^1_2 & \sigma^2_2\tau^1_2 \\ \sigma^1_1\tau^2_1 & \sigma^2_1\tau^2_1 & \sigma^1_1\tau^2_2 & \sigma^2_1\tau^2_2 \\ \sigma^1_2\tau^2_1 & \sigma^2_2\tau^2_1 & \sigma^1_2\tau^2_2 & \sigma^2_2\tau^2_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^1_1 \\ a^1_2 \\ a^2_1 \\ a^2_2 \end{Vmatrix};$$

2) $V = T \otimes T$:
$$\begin{Vmatrix} a'^{11} \\ a'^{12} \\ a'^{21} \\ a'^{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (\tau^1_1)^2 & \tau^1_1\tau^1_2 & \tau^1_2\tau^1_1 & (\tau^1_2)^2 \\ \tau^1_1\tau^2_1 & \tau^1_1\tau^2_2 & \tau^1_2\tau^2_1 & \tau^1_2\tau^2_2 \\ \tau^2_1\tau^1_1 & \tau^2_1\tau^1_2 & \tau^2_2\tau^1_1 & \tau^2_2\tau^1_2 \\ (\tau^1_2)^2 & \tau^2_1\tau^2_2 & \tau^1_2\tau^2_1 & (\tau^2_2)^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^{11} \\ a^{12} \\ a^{21} \\ a^{22} \end{Vmatrix};$$

3) si les composantes du tenseur a^i_{jk} sont ordonnées de la sorte: a^1_{11}, a^1_{12}, a^1_{21}, a^1_{22}, a^2_{11}, a^2_{12}, a^2_{21}, a^2_{22}, on a $V = T \otimes {}^tS \otimes {}^tS$. Conseil: utiliser dans les calculs le résultat du point correspondant du problème 35.23. 35.25. 1) $A' = {}^tS\,AS$, où $A = \| a_{ij} \|$; 2) $A' = S^{-1}AS$, où $A = \| a^i_j \|$; 3) $A' = S^{-1}A \times ({}^tS^{-1})$, où $A = \| a^{ij} \|$. 35.26. 1) Tenseur de type (2, 0); 2) tenseur de type (1, 1); 3) tenseur de type (0, 2); si le tenseur donné correspond à la transformation linéaire φ, le tenseur de matrice inverse correspond à la transformation inverse φ^{-1}. 35.27. Les matrices k-dimensionnelles de composantes possèdent des tenseurs de valence k. 35.28. $a_{111} = a_{121} = a_{211} = a_{221} = 1$, $a_{112} = a_{212} = a_{122} = a_{222} = 0$. 35.29. A_{309} pour tous les i. 35.30. 1) 9 sections bidimensionnelles d'ordre 3; 2) 24; 3) 54. 35.31. 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, 2) La matrice $\| \theta_{kl} \|$ est la section de la matrice $\| \delta^{ij}_{kl} \|$ qui correspond aux indices supérieurs fixes $i = i_0$, $j = j_0$. 35.33. 1) $f(x, y, z) = a_{ijk}\xi^i\eta^j\zeta^k$; 3) $a_{ijk} = f(e_i, e_j, e_k)$. 35.34. Tenseurs de type (0, 3). 1) $a_{ijk} = a_ib_jc_k$; 2) $a_{ijk} = a_ia_ja_k$; 3) $a_{ijk} = a_ia_ja_k + b_ib_jb_k + c_ic_jc_k$. 35.35. Tenseurs de type (0, 3). 1) $a_{123} = a_{321} = 1$, les autres composantes sont nulles; 2) $a_{111} = a_{222} = a_{333} = 1$, les autres composantes sont nulles. 35.37. 1) Dans chacune des sections on permute les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes; en outre, les deux dernières sections changent de place: A_{727}. 2) Tous les éléments de la matrice changent de signe. 3) $-12A_{731}$. 35.38. Si $e'_i = a_{m_i}$, $a'^{ij}_k = a^{m_i m_j}_{m_k}$. Conseil: si S est la matrice de permutation, on a $S^{-1} = {}^tS$. 35.39. 1) $\left\| \begin{array}{rr|rr} -16 & 8 & 12 & 11 \\ -11 & 5 & 8 & 9 \end{array} \right\|$; 2) $\left\| \begin{array}{rr|rr} 7 & 9 & 12 & 16 \\ 11 & 15 & 18 & 25 \end{array} \right\|$; 3) $\left\| \begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\|$; 4) $\left\| \begin{array}{rr|rr} -8 & -6 & 21 & 14 \\ -4 & 3 & 12 & 8 \end{array} \right\|$.

36.4. 1) a) A_{660}; b) A_{662}; c) A_{663}; 2) a) A_{664}; b) A_{665}; c) A_{666}; 3) a) A_{661}; b) A_{667}; c) A_{671}; 4) a) A_{713}; b) A_{714}; c) A_{715}. 36.5. 1), 3) Les tenseurs sont linéairement dépendants; 2) linéairement indépendants. 36.6. 1) 2^{p+q}; 2) la base est formée de tous les vecteurs dont l'une des composantes est 1 et les autres sont des zéros. 36.7. Ordonnons les composantes des tenseurs de la façon suivante; 2) $(a^1_1, a^1_2, a^2_1, a^2_2)$; 3) $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$; 4) $(a^1_{11}, a^1_{12}, a^1_{21}, a^1_{22}, a^2_{11}, a^2_{12}, a^2_{21}, a^2_{22})$ et posons $T = S^{-1}$. Alors la matrice de passage dans l'espace des tenseurs est: 1) ${}^tT$; 2) $S \otimes {}^tT$; 3) ${}^tT \otimes {}^tT$; 4) $S \otimes {}^tT \otimes {}^tT$. 36.9. 1) (2, 0), A_5; 2) (1, 1),

A_5; 3) (1, 1), ${}^tA_5$; 4) (0, 2), A_8; 5) (0, 3), A_{656}; 6) (0, 3), A_{657}; 7) (3, 0) A_{658}; 8) (2, 1), A_{668}; 9) (3, 0), A_{659}; 10) (2, 1), A_{669}; 11) (0, 4), A_{684}; 12) (0, 4), A_{685}; 13) (1, 3), A_{648}; 14) (1, 3), A_{710}; 15) (0, 4), A_{695}; 16) (0, 4), A_{696}; 17) (2, 2), A_{716}; 18) (3, 1), A_{697}. **36.10.** 1) $a \otimes {}^tb = {}^tb \otimes a$; 2) $b \otimes {}^ta = {}^ta \otimes b$; 3) $a \otimes b$; 4) $b \otimes a$. **36.11.** 1) $a_{ij}b^{kl}$; 2) $a^{ij}b^{kl}$; $a^{ij}b^k_l$; $a_{ij}b_{kl}$; $a^i_jb_{kl}$; $a^{ij}b_{kl}$. **36.12.** 1) ${}^t\varkappa\mu$; 2) ${}^t\mu\varkappa$. Ce sont des fonctions bilinéaires définies par les formules; 1) $\mathfrak{b}(x, y) = \mathfrak{f}(x)\,\mathfrak{g}(y)$; 2) $\mathfrak{b}(x, y) = \mathfrak{g}(x)\,\mathfrak{f}(y)$. **36.13.** La transformation linéaire φ de l'espace $\mathscr{L}_n$, définie par la formule $\varphi(x) = \mathfrak{f}(x)\,y$ a pour matrice $\eta\varkappa$ dans la base e. **36.14.** Voir la réponse du problème 36.12. **36.15.** 1) Tenseur de type (2, 0); 3), 5) tenseurs de type (1, 1); 6) tenseur de type (2, 1); 7) tenseur de type (2, 0); 8) tenseur de type (0, 2); les expressions 2), 4) n'ont pas de sens. **36.16.** 1) $\left\|\begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{matrix}\right\|$; 5) $\left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 7 & -11 \end{matrix}\right\|$; 6) A_{672}; 7) $\left\|\begin{matrix} 4 & 8 \\ 6 & 18 \end{matrix}\right\|$; 8) $\left\|\begin{matrix} 52 & -18 \\ -76 & 42 \end{matrix}\right\|$. **36.17.** 1) A_{199}, A_{310}; 2) A_{199}, A_{311}; 3) A_{199}, A_{312}. **36.18.** 1) $a \otimes b$; 2) $a \otimes b \otimes c$, où a, b sont des vecteurs, c un covecteur de composantes égales à (1, 1), (1, −1), (1, 2) respectivement. **36.20.** 2) $(x_1 + x_2)(3y + 2y_2)$. 3) Les matrices-lignes des coefficients des fonctions $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{g}_2$ sont égales à (2, 1, −3, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1) respectivement. La décomposition n'est pas unique. C o n s e i l: se servir du problème 16.31. **36.22.** 1) Valeurs de la fonction linéaire sur un vecteur; 2) image d'un vecteur par la transformation linéaire; 3) valeur de la fonction bilinéaire sur un couple de vecteurs identiques. **36.23.** 1) Oui; 2) non; 3) non. **36.24.** $c^i_j = a^i_kb^k_j$ (produit contracté). **36.25.** 1) ${}^t(6, 8, 2)$; 2) (0, −1, −2). 3) −12. **36.26.** 6. **36.27.** 1) a) ${}^t(4, 7)$; b) ${}^t(8, 8)$; 2) a) ${}^t(3, 0)$; b) ${}^t(5, 3)$. **36.28.** a) $\left\|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix}\right\|$; b) $\left\|\begin{matrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{matrix}\right\|$; c) $\left\|\begin{matrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{matrix}\right\|$, d) $\left\|\begin{matrix} -10 & -5 \\ 10 & 5 \end{matrix}\right\|$; e) 3; f) −5;

2) a) $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|$; b) $\left\|\begin{matrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{matrix}\right\|$; c) $\left\|\begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{matrix}\right\|$; d) $\left\|\begin{matrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{matrix}\right\|$; e) 0; f) 1;

3) a) $\left\|\begin{matrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{matrix}\right\|$; b) $\left\|\begin{matrix} 5 & -5 \\ -5 & 13 \end{matrix}\right\|$; c) $\left\|\begin{matrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{matrix}\right\|$; d) $\left\|\begin{matrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{matrix}\right\|$; e) 18; f) 4.

36.30. 1) Non; 2) oui. **36.31.** $\mathfrak{f}(x, y) = \mathfrak{g}(y, x)$. **36.32.** 1) ${}^tA_{16}$; 2) ${}^tA_{16}$; 3) A_{648}; 4) A_{649}. **36.33.** 1) $k!$; 2) A_{648}, A_{649}, $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\|$; $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{array}\right\|$, $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{array}\right\|$; pour le tenseur de type (3, 0) la réponse est la même;

3) $\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 11 & 21 & 4 & 14 & 24 & 7 & 17 & 27 \\ 2 & 12 & 22 & 5 & 15 & 25 & 8 & 18 & 28 \\ 3 & 13 & 23 & 6 & 16 & 26 & 9 & 19 & 29 \end{array}\right\|$, $\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \end{array}\right\|$;

4) $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 13 & 14 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array}\right\|$, $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 9 & 13 & 11 & 15 \\ \hline 2 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 14 & 12 & 16 \end{array}\right\|$. **36.34.** $c^{ij}_{kl} = d^{ji}_{lk}$. **36.35.** 1)

$\begin{Vmatrix} x^1y^1 & x^1y^2 \\ x^2y^1 & x^2y^2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} x^1y^1 & \frac{1}{2}(x^1y^2+x^2y^1) \\ \frac{1}{2}(x^2y^1+x^1y^2) & x^2y^2 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(x^1y^2-x^2y^1) \\ \frac{1}{2}(x^2y^1-x^1y^2) & 0 \end{Vmatrix}$; 4) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} x^1a_{11} & x^1a_{21} & x^1a_{12} & x^1a_{22} \\ x^2a_{11} & x^2a_{21} & x^2a_{12} & x^2a_{22} \end{array}\right\Vert$;

5) $(x^1a_{11}+x^2a_{21},\ x^1a_{12}+x^2a_{22})$; 6) $((a_1^1+a_2^2)\,x^1,\ (a_1^1+a_2^2)\,x^2)$; 7) $\Big(x^1a_1^1+\frac{1}{2}\times$ $\times(x^1a_2^2+x^2a_2^1),\ x^2a_2^2+\frac{1}{2}(x^2a_1^1+x^1a_1^2)\Big)$; 8) $\frac{1}{2}(x^1a_2^2-x^2a_2^1,\ \ x^2a_1^1-x^1a_1^2)$; 9) $(a_1^1+a_2^2)^2$; 10) $a_1^1a_2^2-a_2^1a_1^2$; 11) $(a_1^1)^2+(a_2^2)^2+a_1^1a_2^2+a_2^1a_1^2$; 12) $\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}$;

13) $\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}$; 14) $a_1^1+a_2^2$; 15) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} a_1^1 & 0 & 0 & a_1^1 \\ a_1^2 & 0 & 0 & a_1^2 \\ \hline a_2^1 & 0 & 0 & a_2^1 \\ a_2^2 & 0 & 0 & a_2^2 \end{array}\right\Vert$; 16) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} a_1^1 & a_1^2 & a_2^1 & a_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_2^1 & a_2^2 \end{array}\right\Vert$.

36.36. 1) a) $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) a) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

3) a) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) a) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & -3/2 & 0 \end{Vmatrix}$.

36.37. 1) a) A_{676}; b) A_{650}; c) A_{677}; d) A_{678}; 2) a) A_{679}; b) A_{680}; c) A_{681}; d) A_{682}; 3) a) A_{683}; b) A_{720}; c) A_{729}; d) A_{730}. **36.38.** 1) a) A_{698}; b) A_{699}; c) A_{700}; 2) a) A_{701}; b) A_{702}; c) A_{703}. **36.39.** 1) a) A_{675}; b) O; c) A_{675}; 2) a) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right\Vert$; b) A_{674}; c) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$; 3) a) A_{722}; b) O; c) A_{725}. **36.40.** 1) a) A_{704}; b) A_{705}; c) A_{706}; 2) a) A_{707}; b) A_{708}; c) A_{709}. **36.41.** a) A_{731}; b) A_{733}; 2) A_{723}; b) A_{734}. **36.42.** 1) Le tenseur est antisymétrique par rapport à trois indices; 2), 3) antisymétrique par rapport au premier et au troisième indice; 4) symétrique par rapport au premier et au troisième indice; 5) antisymétrique par rapport au premier et au deuxième indice. **36.43.** 1) a) 6; b) 1; c) 0; 2) a) 11; b) 27; c) 1. **36.45.** 0. **36.49.** 1) n; 2) δ^i_m; 3) $(n^3-3n^2+2n)/6$; 4) $(n^3+3n^2+$ $+2n)/6$; 5) na^k_k. **36.53.** 1) $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$;

2) $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$. **36.55.** 1) $A_{59}+A_{20}$; 2) $E+A_{20}$ 3) $A_{253}+$ $+A_{242}$. **36.56.** 1) $2\delta^i_{[k}\delta^j_{l]}$; 2) $k!\,\delta^{i_1}_{[j_1}\ldots\delta^{i_k}_{j_k]}$. **36.57.** 3) $\varphi(\xi^1,\xi^2)=(\xi^1+\xi^2)^2+$ $+(\sqrt{2}\,\xi^2)^2$. La représentation n'est pas unique.

37.1. 2) a) $\begin{Vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{Vmatrix}$; b) $\frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{Vmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{Vmatrix}$

c) $\begin{Vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 \end{Vmatrix}$. 37.2. Conseil: si S est la matrice de passage d'une base orthonormée à la base donnée e, la matrice de Gram de la base e vaut ${}^tSS$; on peut également utiliser le problème 35.21. 37.4. δ^i_j, g^{ij}. 37.5. g_{ij}, g^{ij}. 37.7. 1) $g^{lj}g_{ik}a^i_j$; 2) $a^i_{[j}g_{k]i}=0$. 37.8. 1) a) $\begin{Vmatrix} 60 & -34 \\ -37 & 21 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 60 & -37 \\ -34 & 21 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 402 & -248 \\ -248 & 153 \end{Vmatrix}$; 2) a) $\begin{Vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 19 & 7 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} -56 & 22 \\ 23 & -9 \end{Vmatrix}$.

3) a) $\begin{Vmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 6 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 14 & 17 & 51 \\ 8 & 9 & 71 \\ 53 & 67 & 37 \end{Vmatrix}$. 37.9. 1) Non;

2) oui. 37.10. 1) a) $\begin{Vmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{Vmatrix}$. 2) a) $\begin{Vmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{Vmatrix}$;

b) $\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 32 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{Vmatrix}$. 37.11. 1) a) A_{683}; b) A_{647}; c) A_{647}; d) A_{686}; 2) a) A_{687}; b) A_{688}; c) A_{684}; d) A_{685}; 3) a) A_{735}; b) A_{736}; c) A_{732}; d) A_{737}. 37.12. 1) a) A_{718}; b) A_{719}; 2) a) A_{711}; b) A_{712}. 37.13. 1) $2a_{(is)}$; 2) a^i_i; 3) a^s_i. 37.14. $a_{lmk} = g_{li}g_{mj}a^{ij}_{\cdot\cdot k}$. 37.16. Le vecteur y s'obtient de x par une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens opposé à celui de la plus petite rotation amenant e_1 en e_2, si (e_1, e_2) est une base directe. Conseil: calculer les coordonnées du vecteur x dans base orthonormée directe. 37.17. Conseil: calculer les coordonnées de z dans une base orthonormée directe.

38.1. $\pm\begin{Vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix}$ (le signe + correspond à la base directe).

38.3. 1) A_{429}; 2) A_{431}; 3) A_{439}. 38.4. 1) (21, −21, 42); 2) (−1, 0, 2); 3) (−2, −2, −2, 0, 0, 0),; 4) (0, 0, 3, 0, 3, 0). 38.5. 1) 0; 2) 2/3; 3) 26; 4) (−23, −32, 8, 107/3); 5) (0, 0, 1/6, 1/6); 6) (−2, −2, −3, 0, 3, 3, 0, 4, 4, 0). 38.6. 1) 3; 2) 0; 3) −3; 4) (−2, 11, 15, −5); 5) (−1, −1, 1, 1). 38.9. $(p!)^{-1}\det\|f^i(x_j)\|$. 38.10. 1) −8; 2) 3. 38.14. C'est une matrice formée par les mineurs d'ordre 2 de la matrice S. 38.18. 1) 2) Non; 3) Oui. 38.19. 1), 3) Oui; 2), 4) non.

38.21. Les vecteurs $l^{i_1\ldots i_{p-1}} = u^{i_1\ldots i_{p-1}k}e_k$ appartiennent à un sous-espace engendré par le p-vecteur décomposable u. 38.22. Non. 38.23. 1) Enveloppe linéaire des vecteurs ${}^t(1, 0, -1, -2)$, ${}^t(0, 1, 2, 3)$. 3) Enveloppe linéaire des vecetu rs ${}^t(-1, 1, -4, 0)$, ${}^t(-1, 0, -2, 1)$. 2), 4) $\{o\}$. 38.25. 1), 2) $\frac{1}{2}$ (2, 1, 3, 2, 4, −1); 3) $\frac{1}{2}$ (9, 5, 1, 4, −1, −1). 38.26. 1) ${}^t(0, -10, -1, -3)+\alpha\xi$. 2) ${}^t(0, 4, 2)$; 6)$+\alpha\xi$ (α est un nombre arbitraire). 38.27. 1) $\frac{4}{3}$ (1, 1, −1, −1); $\xi^1 - \xi^2 -$

$-\xi^3+\xi^4=0$. 2) $\frac{1}{3}$ (13, 8, 3, 5); $5\xi^1-3\xi^2+8\xi^3-13\,\xi^4=0$. **38.29.** 1), 4) Cette forme n'existe pas; 2) $g^2=\frac{1}{2}f^1+\alpha f^2$, 3) $g^2=-2f^1+\alpha f^2$ (α étant un nombre quelconque). **38.31.** 1) $f^1\wedge f^2$, où $f^1=2g^1+6g^3$, $f^2=g^2-2g^3$; 2) $f^1\wedge f^2+f^3\wedge f^4$, où $f^1=2g^1+2g^2$, $f^2=g^2+g^3+g^4$, $f^3=2g^3$, $f^4=g^4$; 3) $f^1\wedge f^2+f^3\wedge f^4$, où $f^1=2g^1-2g^3$, $f^2=g^2$, $f^3=2g^3$, $f^4=g^4$; 4) $f^1\wedge f^2$, où $f^1=2g^1+2g^3-6g^4$, $f^2=g^2+g^3+2g^4$ (g^1, g^2, g^3, g^4 étant la base biorthogonale à la base initiale dans $\mathscr{L}_4$).

LISTE DES MATRICES

Matrices-colonnes c_k

1. $\begin{Vmatrix} -3 \end{Vmatrix}$. 2. $\begin{Vmatrix} 6 \end{Vmatrix}$. 3. $\begin{Vmatrix} 9 \end{Vmatrix}$. 4. $\begin{Vmatrix} 1-2i \end{Vmatrix}$. 5. $\begin{Vmatrix} 7+i \end{Vmatrix}$. 6. $\begin{Vmatrix} 6-7i \end{Vmatrix}$.

7. $\begin{Vmatrix} 4 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 8. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 9. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 10. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 11. $\begin{Vmatrix} 40 \\ 85 \end{Vmatrix}$. 12. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

13. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 14. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 15. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 16. $\begin{Vmatrix} 17 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 17. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 18. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

19. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -4 \end{Vmatrix}$. 20. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 21. $\begin{Vmatrix} 10 \\ -6 \end{Vmatrix}$. 22. $\begin{Vmatrix} 14 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 23. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 24. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

25. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 26. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2i \end{Vmatrix}$. 27. $\begin{Vmatrix} -3+2i \\ -i \end{Vmatrix}$. 28. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 29. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix}$.

30. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 31. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 32. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 33. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 34. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 35. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

36. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 37. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 38. $\begin{Vmatrix} 5+8i \\ -5+2i \end{Vmatrix}$. 39. $\begin{Vmatrix} 3+i \\ 7-6i \end{Vmatrix}$. 40. $\begin{Vmatrix} 1+i \\ 3 \end{Vmatrix}$.

41. $\begin{Vmatrix} 1+2i \\ 6+2i \end{Vmatrix}$. 42. $\begin{Vmatrix} 3-i \\ 3-6i \end{Vmatrix}$. 43. $\begin{Vmatrix} 1-i \\ -2-2i \end{Vmatrix}$. 44. $\begin{Vmatrix} i \\ 2 \end{Vmatrix}$. 45. $\begin{Vmatrix} 2+3i \\ -3i \end{Vmatrix}$.

46. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -4 \end{Vmatrix}$. 47. $\begin{Vmatrix} 1+i \\ 1+3i \end{Vmatrix}$. 48. $\begin{Vmatrix} -4+2i \\ -3+7i \end{Vmatrix}$. 49. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{Vmatrix}$. 50. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Vmatrix}$.

51. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 52. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 53. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 54. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 55. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{Vmatrix}$. 56. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

57. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 58. $\begin{Vmatrix} 20 \\ -5 \\ 65 \end{Vmatrix}$. 59. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{Vmatrix}$. 60. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 61. $\begin{Vmatrix} 8 \\ -3 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 62. $\begin{Vmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

63. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 64. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 65. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{Vmatrix}$. 66. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 67. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 68. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

69. $\begin{Vmatrix} -26 \\ -11 \\ -67 \end{Vmatrix}$. 70. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 71. $\begin{Vmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 72. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 73. $\begin{Vmatrix} -9 \\ 7 \\ 17 \end{Vmatrix}$. 74. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 71 \\ 41 \end{Vmatrix}$.

75. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 76. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 77. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 78. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{Vmatrix}$. 79. $\begin{Vmatrix} 20 \\ -2 \\ 42 \end{Vmatrix}$. 80. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 6 \\ 11 \end{Vmatrix}$.

81. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 82. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 83. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$ 84. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 85. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{Vmatrix}$. 86. $\begin{Vmatrix} \lambda \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

87. $\begin{Vmatrix} 2 \\ \lambda \\ 5 \end{Vmatrix}$. 88. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 6 \\ \lambda \end{Vmatrix}$. 89. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 90. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 91. $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{Vmatrix}$. 92. $\begin{Vmatrix} 15 \\ 15 \\ -3 \end{Vmatrix}$.

93. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 94. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 95. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{Vmatrix}$. 96. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 97. $\begin{Vmatrix} 23 \\ -18 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 98. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

99. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 100. $\begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 101. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 102. $\begin{Vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 103. $\begin{Vmatrix} \sqrt{4}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2}-\sqrt{4} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{Vmatrix}$.

104. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 105. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 106. $\begin{Vmatrix} 14 \\ -9 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 107. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 108. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

109. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 110. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 111. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 112. $\begin{Vmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 113. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

114. $\begin{Vmatrix} 20 \\ 1 \\ -12 \end{Vmatrix}$. 115. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix}$. 116. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 117. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 118. $\begin{Vmatrix} -0 \\ -4 \\ 15 \end{Vmatrix}$. 119. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

120. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{Vmatrix}$. 121. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 122. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 123. $\begin{Vmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \end{Vmatrix}$. 124. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{Vmatrix}$.

125. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{Vmatrix}$. 126. $\begin{Vmatrix} 1-i \\ 2+i \\ 3 \end{Vmatrix}$. 127. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1+2i \\ 3-i \end{Vmatrix}$. 128. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1+i \\ 1 \end{Vmatrix}$. 129. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2+i \\ 1 \end{Vmatrix}$.

130. $\begin{Vmatrix} -2+i \\ 1+i \\ 1 \end{Vmatrix}$. 131. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -i \\ 1+i \end{Vmatrix}$. 132. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3i \end{Vmatrix}$. 133. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2i \\ -2+i \end{Vmatrix}$. 134. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ i \end{Vmatrix}$.

135. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1+i \\ -i \end{Vmatrix}$. 136. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 5+i \\ -3i \end{Vmatrix}$. 137. $\begin{Vmatrix} 7i \\ -7-2i \\ -1+7i \end{Vmatrix}$. 138. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 0 \\ 12 \end{Vmatrix}$. 139. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{Vmatrix}$.

140. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 141. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 142. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 143. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 144. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 145. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

146. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 147. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 148. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3+i \end{Vmatrix}$. 149. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3+2i \end{Vmatrix}$. 150. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 3-4i \end{Vmatrix}$.

151. $\begin{Vmatrix} 2-i \\ -4+2i \\ 1+2i \end{Vmatrix}$. 152. $\begin{Vmatrix} 3i \\ -6i \\ -3 \end{Vmatrix}$. 153. $\begin{Vmatrix} -i \\ -i \\ -3i \end{Vmatrix}$. 154. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 155. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

156. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 157. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{Vmatrix}$. 158. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 19 \\ 18 \\ 13 \end{Vmatrix}$. 159. $\begin{Vmatrix} 8 \\ 3 \\ -11 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 160. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 161. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

162. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{Vmatrix}.$ 163. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 164. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 165. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 166. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 167. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$

168. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 169. $\begin{Vmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 28 \end{Vmatrix}.$ 170. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \\ 14 \end{Vmatrix}.$ 171. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 172. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 173. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$

174. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 175. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 176. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}.$ 177. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 178. $\begin{Vmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \\ -5 \end{Vmatrix}.$ 179. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

180. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix}.$ 181. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 17 \\ 19 \\ 23 \end{Vmatrix}.$ 182. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 183. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 184. $\begin{Vmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 185. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$

186. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ 187. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 188. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 189. $\begin{Vmatrix} -25 \\ 6 \\ 35 \\ 9 \end{Vmatrix}.$ 190. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$

191. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 192. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 193. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 194. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$ 195. $\begin{Vmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \\ 6 \end{Vmatrix}.$ 196. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$

197. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 198. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 199. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 200. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{Vmatrix}.$ 201. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{Vmatrix}.$ 202. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$

203. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 204. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 205. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$ 206. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 207. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$ 208. $\begin{Vmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ 8 \end{Vmatrix}.$

209. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ \\ 9 \end{Vmatrix}.$ 210. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{Vmatrix}.$ 211. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{Vmatrix}.$ 212. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{Vmatrix}.$ 213. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \\ 18 \end{Vmatrix}.$ 214. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4+i \\ 5-i \\ -2-i \end{Vmatrix}.$

215. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1-i \end{Vmatrix}.$ 216. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4-i \end{Vmatrix}.$ 217. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{Vmatrix}.$ 218. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{Vmatrix}.$ 219. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{Vmatrix}.$

220. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3-i \end{Vmatrix}.$ 221. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3-i \end{Vmatrix}.$ 222. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5-2i \end{Vmatrix}.$ 223. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2+i \\ 0 \\ 6+i \end{Vmatrix}.$ 224. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}.$

225. $\begin{Vmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 226. $\begin{Vmatrix} -1\\ 1\\ 1\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 227. $\begin{Vmatrix} 1\\ -1\\ 1\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 228. $\begin{Vmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 229. $\begin{Vmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 230. $\begin{Vmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Vmatrix}.$

231. $\begin{Vmatrix} 5\\ 5\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 232. $\begin{Vmatrix} 2\\ 2\\ 0\\ -2\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 233. $\begin{Vmatrix} 4\\ -1\\ -5\\ 3\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 234. $\begin{Vmatrix} 10\\ 84\\ 6\\ 27\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 235. $\begin{Vmatrix} -2\\ 8\\ 3\\ -1\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 236. $\begin{Vmatrix} -2\\ -1\\ 0\\ 1\\ 2 \end{Vmatrix}.$

237. $\begin{Vmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ -1\\ -2 \end{Vmatrix}.$ 238. $\begin{Vmatrix} 4\\ -1\\ 6\\ -12\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 239. $\begin{Vmatrix} -1\\ 2\\ -3\\ 4\\ -5 \end{Vmatrix}.$ 240. $\begin{Vmatrix} 2\\ -5\\ 9\\ 7\\ -4 \end{Vmatrix}.$ 241. $\begin{Vmatrix} 2\\ 5\\ 5\\ 3\\ 1 \end{Vmatrix}.$

242. $\begin{Vmatrix} 4\\ -1\\ 1\\ 2\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 243. $\begin{Vmatrix} 2\\ -1\\ 2\\ 3\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 244. $\begin{Vmatrix} -2\\ 10\\ -10\\ -14\\ 30 \end{Vmatrix}.$ 245. $\begin{Vmatrix} -7\\ -5\\ 7\\ -59\\ 9 \end{Vmatrix}.$ 246. $\begin{Vmatrix} 0\\ 1\\ 1\\ 0\\ 2 \end{Vmatrix}.$

247. $\begin{Vmatrix} 30000\\ 3000\\ 100\\ 40\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 248. $\begin{Vmatrix} -1\\ -1\\ 0\\ 1\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 249. $\begin{Vmatrix} 1\\ -3\\ -2\\ 3\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 250. $\begin{Vmatrix} 0\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 251. $\begin{Vmatrix} 2\\ 0\\ 2\\ -2\\ 1 \end{Vmatrix}.$

252. $\begin{Vmatrix} 7\\ 0\\ 2\\ 0\\ -17 \end{Vmatrix}.$ 253. $\begin{Vmatrix} 0\\ 12\\ 5\\ 0\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 254. $\begin{Vmatrix} 0\\ 2\\ 0\\ 0\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 255. $\begin{Vmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 256. $\begin{Vmatrix} 6\\ 8\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 257. $\begin{Vmatrix} 0\\ -3\\ 3\\ 3\\ 0 \end{Vmatrix}.$

258. $\begin{Vmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 259. $\begin{Vmatrix} -11\\ 0\\ 3\\ 0\\ 2 \end{Vmatrix}.$ 260. $\begin{Vmatrix} 2\\ 3\\ 4\\ -1\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 261. $\begin{Vmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 2\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 262. $\begin{Vmatrix} 40000\\ -11000\\ 1100\\ -50\\ 1 \end{Vmatrix}.$

263. $\begin{Vmatrix} -1\\ 2\\ 1\\ 0\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 264. $\begin{Vmatrix} 2\\ 1\\ 4\\ 2\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 265. $\begin{Vmatrix} 0\\ 2\\ -1\\ 5\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 266. $\begin{Vmatrix} 7\\ 0\\ 0\\ -1\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 267. $\begin{Vmatrix} 4\\ 4\\ -1\\ -2\\ 6 \end{Vmatrix}.$ 268. $\begin{Vmatrix} 0\\ 4\\ 6\\ 4\\ 0 \end{Vmatrix}.$

269. $\begin{Vmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 3 \end{Vmatrix}.$ 270. $\begin{Vmatrix} -1\\ 2\\ 1\\ 2\\ -1 \end{Vmatrix}.$ 271. $\begin{Vmatrix} 1\\ -1\\ 2\\ -1\\ 1 \end{Vmatrix}.$ 272. $\begin{Vmatrix} 10000\\ 7000\\ -800\\ 30\\ 0 \end{Vmatrix}.$ 273. $\begin{Vmatrix} -3-i\\ 6+4i\\ 4-3i \end{Vmatrix}.$

274. $\begin{Vmatrix} i \\ 1+i \\ -3+2i \\ 0 \end{Vmatrix}$. 275. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 3+i \\ 4-i \\ -3 \end{Vmatrix}$. 276. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 7+2i \\ 9-2i \\ -5-i \end{Vmatrix}$. 277. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 278. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

279. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 280. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 281. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 282. $\begin{Vmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{n-1} \end{Vmatrix}$.

Matrices A_k

1. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix}$ 2. $\begin{Vmatrix} -12 & 13 \end{Vmatrix}$ 3. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ 4. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 5. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$

6. $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix}$ 7. $\begin{Vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{Vmatrix}$ 8. $\begin{Vmatrix} 13\,547 & 13\,647 \\ 28\,423 & 28\,523 \end{Vmatrix}$. 9. $\begin{Vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$.

10. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 11. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 12. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 13. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 14. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

15. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 16. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 17. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$. 18. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. 19. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

20. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 21. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 22. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 23. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$. 24. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

25. $\begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$. 26. $\begin{Vmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{Vmatrix}$. 27. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}$. 28. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

29. $\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 3 \end{Vmatrix}$. 30. $\begin{Vmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{Vmatrix}$. 31. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. 32. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{Vmatrix}$.

33. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 34. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 35. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}$. 36. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$.

37. $\begin{Vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix}$. 38. $\begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$. 39. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$. 40. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$.

41. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 12 & -3 \end{Vmatrix}$. 42. $\begin{Vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$. 43. $\begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 44. $\begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$. 45. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

46. $\begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$. 47. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{Vmatrix}$. 48. $\begin{Vmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{Vmatrix}$. 49. $\begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$.

50. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. 51. $\begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$. 52. $\begin{Vmatrix} 11 & -2 \\ 18 & -1 \end{Vmatrix}$. 53. $\begin{Vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$.

54. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{Vmatrix}$. 55. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$. 56. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 57. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{Vmatrix}$.

58. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix}$. 59. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$. 60. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$.

61. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 62. $\begin{Vmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{Vmatrix}$. 63. $\begin{Vmatrix} -3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{Vmatrix}$.

64. $\begin{Vmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{Vmatrix}$. 65. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 66. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 67. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

68. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 69. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. 70. $\begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{Vmatrix}$. 71. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

72. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$. 73. $\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 74. $\begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{Vmatrix}$. 75. $\begin{Vmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{Vmatrix}$.

76. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{Vmatrix}$. 77. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$. 78. $\begin{Vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{Vmatrix}$.

79. $\begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{Vmatrix}$. 80. $\begin{Vmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{Vmatrix}$. 81. $\begin{Vmatrix} 1+i\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1-i\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 82. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{Vmatrix}$.

83. $\begin{Vmatrix} 1 & 2-i \\ i & 1+2i \end{Vmatrix}$. 84. $\begin{Vmatrix} 1-i\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 1+i\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 85. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{Vmatrix}$. 86. $\begin{Vmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$.

87. $\begin{Vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{Vmatrix}$. 88. $\begin{Vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}$. 89. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 2+i & 1-2i \end{Vmatrix}$. 90. $\begin{Vmatrix} 1+i & 1+3i \\ 1-2i & 1+2i \end{Vmatrix}$.

91. $\begin{Vmatrix} 1-i & 2+i \\ 6-4i & 9+7i \end{Vmatrix}$. 92. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{Vmatrix}$. 93. $\begin{Vmatrix} i-1 & i+1 \\ i+1 & i-1 \end{Vmatrix}$. 94. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$.

95. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2i \end{Vmatrix}$. 96. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{Vmatrix}$. 97. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{Vmatrix}$. 98. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{Vmatrix}$ 99. $\begin{Vmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{Vmatrix}$.

100. $\begin{Vmatrix} 1 & 2i \\ i & -1 \end{Vmatrix}$. 101. $\begin{Vmatrix} 2 & 5i \\ 4i & -5 \end{Vmatrix}$. 102. $\begin{Vmatrix} 1+i & -i \\ -i & 1-i \end{Vmatrix}$. 103. $\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}$.

104. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$. 105. $\begin{Vmatrix} 5 & -12 \\ 12 & -5 \end{Vmatrix}$. 106. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 107. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

110. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 111. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 112. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 113. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 114. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix}$.

115. $\begin{Vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 116. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 117. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. 118. $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

119. $\begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$. 120. $\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 121. $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 122. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

123. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 124. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{Vmatrix}$. 125. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$. 126. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$.

127. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}$. 128. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{Vmatrix}$. 129. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 130. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

131. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 132. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 133. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}$. 134. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}$. 135. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

136. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 137. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}.$ 138. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 139. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$ 140. $\begin{Vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}.$

141. $\begin{Vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 142. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$ 143. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 144. $\begin{Vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

145. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$ 146. $\begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 147. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{Vmatrix}.$ 148. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$

149. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}.$ 150. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 151. $\begin{Vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 152. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

153. $\begin{Vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & 0 \\ 0 & -15 \\ 0 & 18 \end{Vmatrix}.$ 154. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 155. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}.$ 156. $\begin{Vmatrix} 24 & -1 \\ 16 & 0 \\ 0 & -22 \\ 0 & 16 \end{Vmatrix}.$

157. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 158. $\begin{Vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 159. $\begin{Vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 160. $\begin{Vmatrix} 12 & 20 \\ -6 & -10 \\ 20 & 36 \\ -10 & -18 \end{Vmatrix}.$

161. $\begin{Vmatrix} 12 & 20 \\ 20 & 66 \\ -6 & -10 \\ -10 & -18 \end{Vmatrix}.$ 162. $\begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}.$ 163. $\begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$ 164. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

165. $\begin{Vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 166. $\begin{Vmatrix} 7 & 11 \\ 7 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 17 & 28 \end{Vmatrix}.$ 167. $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 168. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$

169. $\begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -7 \\ -1 & 12 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}.$ 170. $\begin{Vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}.$ 171. $\begin{Vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -3 \\ 24 & 17 \\ 16 & 11 \\ -10 & -13 \end{Vmatrix}.$ 172. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{Vmatrix}.$

173. $\begin{Vmatrix} 0 & 10 \\ -5 & 0 \\ 1 & -7 \\ 7 & 6 \end{Vmatrix}.$ 197. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$ 198. $\begin{Vmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{Vmatrix}.$

199. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 200. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ 201. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 202. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$

203. $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. **204.** $\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **205.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

206. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{Vmatrix}$. **207.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$. **208.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$.

209. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$. **210.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$. **211.** $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -1 \end{Vmatrix}$.

212. $\begin{Vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$. **213.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$. **214.** $\begin{Vmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{Vmatrix}$.

215. $\begin{Vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{Vmatrix}$. **216.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \end{Vmatrix}$. **217.** $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$. **218.** $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$.

219. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **220.** $\begin{Vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & -7 & -3 \end{Vmatrix}$. **221.** $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$.

222. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{Vmatrix}$. **223.** $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{Vmatrix}$. **224.** $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$.

225. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$. **226.** $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 7 \end{Vmatrix}$. **227.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$. **228.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{Vmatrix}$.

229. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. **230.** $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{Vmatrix}$. **231.** $\begin{Vmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$.

232. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **233.** $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$. **234.** $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$. **235.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$.

236. $\begin{Vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{Vmatrix}$. **237.** $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$. **238.** $\begin{Vmatrix} -3 & 10 & -10 \\ -7 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$.

239. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. **240.** $\begin{Vmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{Vmatrix}$. **241.** $\begin{Vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{Vmatrix}$.

242. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$. **243.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. **244.** $\begin{Vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \end{Vmatrix}$.

245. $\begin{Vmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **246.** $\begin{Vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & 6 & 5 \end{Vmatrix}$. **247.** $\begin{Vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 16 & 12 \\ 4 & -20 & -15 \end{Vmatrix}$.

248. $\begin{Vmatrix} 16 & 0 & 32 \\ -4 & 0 & -8 \\ -8 & 0 & -16 \end{Vmatrix}$. **249.** $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{Vmatrix}$ **250.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$.

251. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{Vmatrix}.$ 252. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$ 253. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

254. $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$ 255. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$ 256. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{Vmatrix}.$

257. $\begin{Vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{Vmatrix}.$ 258. $\begin{Vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{Vmatrix}.$ 259. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$ 260. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

261. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 262. $\begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{Vmatrix}.$ 263. $\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$

264. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ 265. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{Vmatrix}.$ 266. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{Vmatrix}.$

267. $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$ 268. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$ 269. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$ 270. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$

271. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix}.$ 272. $\begin{Vmatrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$ 273. $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 0 & 13 & 15 \end{Vmatrix}.$

274. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{Vmatrix}.$ 275. $\begin{Vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 5 & -3 & 19 \\ -1 & -4 & 3 \end{Vmatrix}.$ 276. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

277. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \end{Vmatrix}.$ 278. $\begin{Vmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -6 & 2 & -12 \\ 8 & -3 & 16 \end{Vmatrix}.$ 279. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -5 & -6 \end{Vmatrix}.$

280. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$ 281. $\begin{Vmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{Vmatrix}.$ 282. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

283. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{Vmatrix}.$ 284. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$ 285. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

286. $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{Vmatrix}.$ 287. $\begin{Vmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{Vmatrix}.$ 288. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}.$

289. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$ 290. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$ 191. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$

292. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$ 293. $\begin{Vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{Vmatrix}.$ 294. $\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}.$

295. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix}.$ 296. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{Vmatrix}.$ 297. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$

298. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 299. $\begin{Vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{Vmatrix}$. 300. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$. 301. $\begin{Vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 11 & 4 \end{Vmatrix}$.

302. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 303. $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{Vmatrix}$. 304. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 305. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$.

306. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$. 307. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. 308. $\begin{Vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. 309. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

310. $\begin{Vmatrix} -210 & 105 & 42 \\ 100 & -50 & -20 \\ 40 & -20 & -8 \end{Vmatrix}$. 311. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 312. $\begin{Vmatrix} 42 & 105 & -42 \\ -20 & -50 & 20 \\ -8 & -20 & -8 \end{Vmatrix}$.

313. $\begin{Vmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) \\ 1/3 & 0 & 4/(3\sqrt{2}) \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$. 314. $\begin{Vmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$.

315. $\begin{Vmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$. 316. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$.

317. $\begin{Vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/\sqrt{50} & 4/\sqrt{50} \\ 4/5 & 3/\sqrt{50} & -3/\sqrt{50} \end{Vmatrix}$. 318. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$.

319. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$. 320. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$.

321. $\begin{Vmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$. 322. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$.

323. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \end{Vmatrix}$. 324. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{20} & 3/3 & -1/\sqrt{5} \\ -\sqrt{3/20} & 1/2 & \sqrt{3/5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$.

325. $\begin{Vmatrix} 9/(7\sqrt{10}) & 1/\sqrt{10} & 6/7 \\ 3/(7\sqrt{10}) & -3/\sqrt{10} & 2/7 \\ 2\sqrt{10}/7 & 0 & -3/7 \end{Vmatrix}$. 326. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 4/\sqrt{18} & 0 & -1/3 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{2} & 2/3 \end{Vmatrix}$.

327. $\begin{Vmatrix} 2\sqrt{/14} & -7/\sqrt{75} & -8/(5\sqrt{42}) \\ 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{75} & 31/(5\sqrt{42}) \\ -3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{42}) \end{Vmatrix}$. 328. $\begin{Vmatrix} 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \\ -3/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{70} \end{Vmatrix}$.

329. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$. 330. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/(3-\sqrt{3}) & 1/(3+\sqrt{3}) & -1/\sqrt{3} \\ 1/(3+\sqrt{3}) & 1/(3-\sqrt{3}) & 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$.

331. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 332. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 333. $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{Vmatrix}$. 344. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$.

335. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 336. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 337. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 338. $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$.

339. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 340. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$. 341. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 342. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

343. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 344. $\begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$. 345. $\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \end{Vmatrix}$. 346. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$.

347. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 248. $\begin{Vmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. 249. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1 & -3/\sqrt{8} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$.

350. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. 351. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{Vmatrix}$. 352. $\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}$.

353. $\begin{Vmatrix} 2 & -\sqrt{3/2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 354. $\begin{Vmatrix} 0 & 27/\sqrt{14} & -65/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & 14/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 355. $\begin{Vmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

356. $\begin{Vmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 357. $\begin{Vmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$. 358. $\begin{Vmatrix} -2 & 4/\sqrt{3} & 7/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

359. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{Vmatrix}$. 360. $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$. 361. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{Vmatrix}$.

362. $\begin{Vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{7} \\ 0 & \sqrt{7} & 3 \end{Vmatrix}$. 363. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{Vmatrix}$. 364. $\begin{Vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{Vmatrix}$.

365. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{Vmatrix}$. 366. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{Vmatrix}$. 367. $\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{Vmatrix}$. 368. $\begin{Vmatrix} 1+i\sqrt{2} & i-\sqrt{2} & 1 \\ 1+i\sqrt{3} & i-\sqrt{3} & 1 \\ 1+i\sqrt{4} & i-\sqrt{4} & 1 \end{Vmatrix}$.

369. $\begin{Vmatrix} 1-i & -3+2i & 2-i \\ -4+6i & 4-3i & -3i \\ -8+i & 5-i & 4 \end{Vmatrix}$. 370. $\begin{Vmatrix} 2+i & -3 & 2+i \\ -1+5i & -2-3i & 1-2i \\ 2+i & -3+i & 0 \end{Vmatrix}$.

371. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i & 2+i \\ 1-3i & -2-4i & 5-5i \\ 2i & 2+2i & -2+4i \end{Vmatrix}$. 372. $\begin{Vmatrix} 1 & 2i & 1-i \\ -i & 2 & -1-i \\ 3 & 6i & 3-3i \end{Vmatrix}$. 373. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3+i & 3-i \end{Vmatrix}$.

374. $\begin{Vmatrix} 0 & 2i & -2i \\ 1 & 2i & -2i \\ 1 & 3i-1 & -3i-1 \end{Vmatrix}$. 375. $\begin{Vmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{Vmatrix}$. 376. $\begin{Vmatrix} 1+i & -1-i & 2+2i \\ 0 & i & 2 \\ 0 & -1 & 3+i \end{Vmatrix}$.

377. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & 0 \\ 0 & -i & 0 \end{Vmatrix}$. 378. $\begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}$. 379. $\begin{Vmatrix} 8 & 1 & i \\ 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{Vmatrix}$. 380. $\begin{Vmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

381. $\begin{Vmatrix} i/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{Vmatrix}$. 382. $\begin{Vmatrix} i & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 383. $\begin{Vmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{Vmatrix}$.

384. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1+i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 389. $\begin{Vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$. 390. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 391. $\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$.

392. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. 393. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 394. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 395. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

396. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$. 397. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$. 398. $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 399. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

400. $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 401. $\begin{Vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 402. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 403. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 13 \end{Vmatrix}$.

404. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$. 405. $\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{Vmatrix}$. 406. $\begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix}$. 407. $\begin{Vmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 14 & 7 & 21 \\ -6 & -3 & -9 \end{Vmatrix}$.

408. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{Vmatrix}$. 409. $\begin{Vmatrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}$. 410. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

411. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 412. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 413. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 414. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

415. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 416. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 417. $\begin{Vmatrix} 10 & 1 & -26 \\ -11 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$. 418. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

419. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ **420.** $\begin{Vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & -5 \end{Vmatrix}.$ **421.** $\begin{Vmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 9 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{Vmatrix}.$

422. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & -11 & -15 \\ 9 & 2 & 8 \\ -20 & 13 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{Vmatrix}.$ **428.** $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$ **429.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

430. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ **431.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ **432.** $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

433. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$ **434.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ **435.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$ **636.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

437. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$ **438.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$ **439.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$

440. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$ **441.** $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{Vmatrix}.$ **442.** $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$

443. $\begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{Vmatrix}.$ **444.** $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$ **445.** $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/2 & 1/2 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/2 & -1/2 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & -1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{10} \end{Vmatrix}.$

446. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$ **447.** $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$

448. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$ **449.** $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{Vmatrix}.$ **450.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

451. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$ **452.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$ **453.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}.$

454. $$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

455. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}.$$

456. $$\begin{Vmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{Vmatrix}.$$

457. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

458. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

459. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{Vmatrix}.$$

460. $$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

461. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

462. $$\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{Vmatrix}.$$

463. $$\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{Vmatrix}$$

464. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

465. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

466. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

467. $$\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & 6 & -1 \end{Vmatrix}.$$

468. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

469. $$\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{Vmatrix}.$$

470. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

471. $$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

472. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{Vmatrix}.$$

473. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

474. $$\begin{Vmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

475. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -i & -1 & i \\ -i & 3i-3 & i & -3-3i \end{Vmatrix}.$$

476. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

477. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

478. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

479. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

480. $$\begin{Vmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{Vmatrix}.$$

481. $$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

482. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

483. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

484. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

485. $$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

486. $$\begin{Vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{Vmatrix}.$$

487. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

488. $\begin{Vmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

489. $\begin{Vmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

490. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$

491. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2i & -2i \\ 0 & 2i & 1 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

492. $\begin{Vmatrix} 7 & 3 & 1+2i & -1+2i \\ 3 & 7 & 1-2i & -1-2i \\ 1-2i & 1+2i & 7 & -3 \\ -1-2i & -1+2i & -3 & 7 \end{Vmatrix}.$

493. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

494. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

495. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

496. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

497. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

498. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}.$

499. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \end{Vmatrix}.$

500. $\begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}.$

501. $\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix}.$

502. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

503. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$

504. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3+i & 4 \\ -i & 3i & 1+i & 0 \end{Vmatrix}.$

505. $\begin{Vmatrix} 0 & 35 & 19 & 2 \\ 8 & 33 & 19 & 0 \end{Vmatrix}.$

506. $\begin{Vmatrix} 3 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{Vmatrix}.$

507. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

508. $\begin{Vmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{Vmatrix}.$

509. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}.$

510. $\begin{Vmatrix} 1 & -5 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & -15 \end{Vmatrix}.$

511. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -7 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 \\ 5 & 24 & -7 & -1 \end{Vmatrix}.$

512. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$

513. $\begin{Vmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{Vmatrix}.$

514. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{Vmatrix}.$

515. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$

516. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{Vmatrix}.$

517. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$

518. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 2 & -8 \\ 16 & 8 & 24 & -16 \\ 0 & 4 & -4 & 16 \end{Vmatrix}.$

519. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$

520. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{Vmatrix}.$

521. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 26 \end{Vmatrix}.$

522. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{Vmatrix}.$

523. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & -4 \end{Vmatrix}.$

524. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -5 & -8 & -7 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$

525. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1+2i & -1+i \\ -1 & 3 & -1-3i & 2-i \\ i & 1+i & 1 & 2i \\ 2i & 0 & 2i & -2+2i \\ 0 & 2-i & -1-2i & 2-i \end{Vmatrix}.$

530. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$

531. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$

532. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{Vmatrix}.$

533. $\begin{Vmatrix} 1 & 10 & 100 & 10^3 & 10^4 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 800 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 \end{Vmatrix}.$

534. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

535. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{Vmatrix}.$

536. $\begin{Vmatrix} 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

537. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$

538. $\begin{Vmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 & 8 \\ 7 & -7 & 7 & 2 & 2 \\ 14 & 5 & 10 & 3 & 18 \\ 4 & -11 & 2 & 1 & -8 \\ 9 & -7 & 8 & 2 & 5 \end{Vmatrix}.$

539. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

540. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & -1 & 4 & 9 \\ 17 & 2 & -2 & 17 & 82 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 12 & 27 \\ 2 & 2 & -1 & 10 & 0 \end{Vmatrix}.$

541. $\begin{Vmatrix} 4 & 3 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}.$

542. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

543. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$

544. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$

545. $\begin{Vmatrix} 7 & 10 & 15 & 25 & 20 \\ 15 & 22 & 18 & 30 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 14 \end{Vmatrix}.$

546. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix}.$

547. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

548. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$

549. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{Vmatrix}.$

550. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

551. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

570. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

571. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

572. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

573. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

574. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \end{Vmatrix}.$

575. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

576. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}.$

577. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{Vmatrix}.$

578. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 10 & 1 & 3 & 6 & -7 \end{Vmatrix}.$

579. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

580. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{Vmatrix}.$

581. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{Vmatrix}.$

582. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$

583. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 & -5 & 5 \end{Vmatrix}.$

584. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \end{Vmatrix}.$

585. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

586. $\begin{Vmatrix} -3 & 3 & 12 & 6 & -9 \\ -3 & 3 & 12 & 6 & -9 \\ 2 & -2 & -8 & -4 & 6 \end{Vmatrix}.$

587. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{Vmatrix}.$

588. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{Vmatrix}.$

589. $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

590. $\begin{Vmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

591. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

592. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{Vmatrix}.$

593. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$

594. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$

595. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

596. $$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \end{Vmatrix}.$$

597. $$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{Vmatrix}.$$

598. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

599. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Matrices d'ordre n

600. $$\begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{Vmatrix}.$$

601. $$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

602. $$\begin{Vmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{Vmatrix}.$$

603. $$\begin{Vmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{Vmatrix}.$$

604. $$\begin{Vmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{Vmatrix}.$$

605. $$\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}.$$

606. $$\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1^2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n^2 & & 0 \end{Vmatrix}.$$

607. $$\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1\lambda_n \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n\lambda_1 & & 0 \end{Vmatrix}.$$

608. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

609. $$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

610. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

611. $$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

612. $$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{Vmatrix}.$$

613. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

614. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

615. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{Vmatrix}.$$

616. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

617. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

618. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

619. $$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

620. $$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \hdotsfor{4} \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

621. $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

622. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

623. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

624. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

625. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \hdotsfor{6} \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

626. $$\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \hdotsfor{6} \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{Vmatrix}.$$

627. $$\begin{Vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \hdotsfor{5} \\ y & y & y & \dots & x \end{Vmatrix}.$$

628. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

629. $$\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-\lambda \end{Vmatrix}.$$

630. $$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{Vmatrix}.$$

631. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{Vmatrix}.$$

632. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \hdotsfor{7} \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

633. $$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \hdotsfor{5} \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

634. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

635. $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

636. $$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

637. $$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

638. $\begin{Vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{Vmatrix}.$

639. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

640. $\begin{Vmatrix} n-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -n+1 & n-3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n+2 & n-5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -n+3 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -n+1 \end{Vmatrix}.$

641. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{Vmatrix}.$

642. $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{Vmatrix}.$

643. $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{Vmatrix}.$

644. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix}.$

645. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{Vmatrix}.$

Matrices décomposées en blocs

647. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right\Vert.$ 648. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right\Vert.$ 649. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right\Vert.$

650. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right\Vert.$ 651. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right\Vert.$ 652. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -4 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right\Vert.$

653. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 7 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right\Vert.$ 654. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\Vert.$ 655. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right\Vert.$

656. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & -6 & -10 \\ 20 & 36 & -10 & -18 \end{array}\right\Vert.$ 657. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & 20 & 36 \\ -6 & -10 & -10 & -18 \end{array}\right\Vert.$ 658. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right\Vert.$

659. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right\Vert.$ 660. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right\Vert.$ 661. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 6 & 8 \\ -10 & 11 & 7 & 9 \end{array}\right\Vert.$

662. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 11 & 14 & 8 & 13 \\ 17 & 23 & 5 & 7 \end{array}\right\Vert.$ 663. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \end{array}\right\Vert.$ 664. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & 10 & 6 & 10 \end{array}\right\Vert.$

665. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -6 & 4 & 13 & 22 \\ -5 & 23 & 17 & 27 \end{array}\right\Vert.$ 666. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -10 & -6 & -1 & -8 \\ -15 & -11 & 3 & 1 \end{array}\right\Vert.$ 667. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 13 & -8 & 15 & 20 \\ -25 & 30 & 16 & 20 \end{array}\right\Vert.$

668. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right\Vert.$ 669. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right\Vert.$ 670. $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right\Vert.$

671. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 15 & -8 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -8 & -12 \end{array} \right\|.$ 672. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -8 & -14 & 12 & 26 \\ -8 & -18 & 12 & 22 \end{array} \right\|.$ 673. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right\|.$

674. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right\|.$ 675. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$ 676. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right\|.$

677. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\|.$ 678. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array} \right\|.$ 679. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 9/2 & 2 & 3 \\ 9/2 & 7 & 3 & 3 \end{array} \right\|.$

680. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{array} \right\|.$ 681. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 7/2 & 6 \\ 7/2 & 6 & 1 & 3 \end{array} \right\|.$ 682. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 11/3 & 11/3 & 13/3 \\ 11/3 & 13/3 & 13/3 & 3 \end{array} \right\|.$

683. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right\|.$ 684. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 19 & 30 & 8 & 13 \\ 17 & 41 & 11 & 17 \end{array} \right\|.$ 685. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 155 & 68 & 66 & 29 \\ 167 & 75 & 89 & 39 \end{array} \right\|.$

686. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 41 & 17 & 17 & 7 \\ 41 & 17 & 17 & 7 \end{array} \right\|.$ 687. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -7 & -10 & 0 & -1 \\ 19 & 27 & 1 & 5 \end{array} \right\|.$ 688. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -23 & 10 & 20 & 9 \\ 39 & 17 & 11 & 5 \end{array} \right\|.$

689. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array} \right\|.$ 690. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{array} \right\|.$ 691. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 5 & 7 \\ \hline -2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right\|.$

692. $\left\| \begin{array}{cc|cc} -3 & -5 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ \hline -4 & -7 & -5 & -3 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \end{array} \right\|.$ 693. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$ 694. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right\|.$

695. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ \hline 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{array} \right\|.$ 696. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ \hline 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{array} \right\|.$ 697. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\|.$

698. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ \hline -4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \end{array} \right\|.$ 699. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & -3 & 3/2 & 5/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & -2 & -1 \\ 3/2 & 5/2 & 7 & 8 \end{array} \right\|.$

700. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1/2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 5/2 \\ \hline -1/2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5/2 & 3 & 8 \end{array} \right\|.$ 701. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array} \right\|.$ 702. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -4 \end{array} \right\|.$

703. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{array} \right\|.$ 704. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right\|.$ 705. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -7/2 \\ \hline -7/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 7/2 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$

706. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

707. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right\|.$$

708. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

709. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

710. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -5 & 5 \\ -7 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right\|.$$

711. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 7 & 12 & 19 \\ 15 & 24 & 27 & 42 \end{array}\right\|.$$

712. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 2 & 2 \\ -15 & 18 & 2 & 2 \\ \hline -5 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

713. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right\|.$$

714. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 11 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right\|.$$

715. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 & -7 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\|.$$

716. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right\|.$$

717. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array}\right\|.$$

718. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array}\right\|.$$

719. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 89 & 89 & -33 & -33 \\ 0 & 89 & 0 & -33 \\ \hline -34 & -34 & 13 & 13 \\ 0 & -34 & 0 & 13 \end{array}\right\|.$$

720. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right\|.$$

721. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & 6 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right\|.$$

722. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\|.$$

723. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

724. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 \\ 4 & 5 & 6 & 14 & 15 & 16 & 24 & 25 & 26 \\ 7 & 8 & 9 & 17 & 18 & 19 & 27 & 28 & 29 \end{array}\right\|.$$

725. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

726. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\|.$$

727. $$\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right\|.$$

728. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{array} \right\|.$$

729. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right\|.$$

730. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 14/3 & 14/3 & 14/3 & 10/3 & 4 & 16/3 & 4 & 8/3 \\ 14/3 & 10/3 & 4 & 10/3 & 4 & 14/3 & 4 & 14/3 & 10/3 \\ 16/3 & 4 & 8/3 & 4 & 14/3 & 10/3 & 8/3 & 10/3 & 6 \end{array} \right\|.$$

731. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

732. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & 3 & -10 & 0 & 10 & 9 & 0 & -9 \\ 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 & 0 \end{array} \right\|.$$

733. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 10/3 & 19/3 & 10/3 & 3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 \\ 10/3 & 3 & 19/3 & 3 & 5 & 7 & 19/3 & 7 & 4 \\ 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 7 & 4 & 19/3 & 4 & 1 \end{array} \right\|.$$

734. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 14/3 & 16/3 & 14/3 & 10/3 & 6 & 16/3 & 6 & 8/3 \\ 14/3 & 10/3 & 6 & 10/3 & 4 & 14/3 & 6 & 14/3 & 10/3 \\ 16/3 & 6 & 8/3 & 6 & 14/3 & 10/3 & 8/3 & 10/3 & 6 \end{array} \right\|.$$

735. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -6 & -25 & 31 & 12 & 50 & -62 & -6 & -25 & 31 \\ 3 & 12 & -15 & -6 & 24 & 30 & 3 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & -6 & -2 & 10 & 12 & 1 & 5 & -6 \end{array} \right\|.$$

736. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} -2 & -7 & 7 & 4 & 14 & -14 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 8 & 10 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right\|.$$

737. $$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array} \right\|.$$

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:

Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Dans la même collection

COURS DE GÉOMETRIE ANALYTIQUE ET D'ALGÈBRE LINÉAIRE

par D. Beklémichev

Cet ouvrage a son origine dans les cours faits par l'auteur, candidat ès sciences physico-mathématiques, à l'Institut physico-technique de Moscou.

Dans les premiers chapitres, la géométrie analytique est présentée sous une forme à la fois concise et complète, ce qui est fait dans le but de préparer le lecteur à l'assimilation de l'algèbre linéaire. Une partie de cet ouvrage traite de sujets qui font traditionnellement l'objet du cours d'algèbre linéaire: théorie des matrices et des systèmes d'equations linéaires, espaces euclidiens et vectoriels, formes quadratiques, espaces affines et tenseurs. Les autres chapitres reprennent un cours spécial destiné à préparer les étudiants à la maîtrise des méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes scientifiques et techniques.

S'adresse aux étudiants des Ecoles techniques supérieures ayant un programme poussé de mathématiques ainsi qu'aux ingénieurs et chercheurs.

Dans la même collection

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par V. Iline et E. Pozniak

Outre les problèmes exposés traditionnellement, ce livre aborde de nombreuses questions trouvant leur application en physique et en mécanique rationnelle, notamment: les coordonnées barycentriques, le rôle des angles d'Euler dans les changements de coordonnées, la représentation d'une transformation linéaire arbitraire par le produit d'une translation et d'une rotation dans l'espace, les propriétés optiques des coniques, l'algèbre vectorielle à partir de la notion de dépendance linéaire, etc.
Cet ouvrage contient de plus un grand nombre d'exercices et une annexe initiant à l'axiomatique de Hilbert, à la méthode des coordonnées et à la géométrie non euclidienne. La seconde édition de cet ouvrage a été couronnée d'un prix d'Etat pour l'année 1980.
Cet ouvrage est un manuel de géométrie analytique pour les mathématiciens appliqués et les physiciens.

Dans la même collection

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ALGÈBRE LINÉAIRE

par. I. Proskouriakov

Rédigé par 1. Proskouriakov, candidat ès sciences physiques et mathématiques, ce livre contient environ 2000 problèmes d'algèbre linéaire, de théorie des groupes, des anneaux, des corps commutatifs et des tenseurs. Tous les problèmes sont groupés en sections suivantes: déterminants, systèmes d'équations linéaires, matrices et formes quadratiques, espaces vectoriels et opérateurs linéaires. Des réponses exhaustives ou des indications concernant la voie à suivre sont données pour la plupart des problèmes.
Destiné aux étudiants se spécialisant dans les mathématiques et la physique.

Dans la même collection

RECUEIL D'EXERCICES D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE

par. D. Faddéev et I. Sominski

Ce recueil est composé par D. Faddéev, membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., avec la collaboration de I. Sominski, mathématicien de l'Université de Léningrad.

Il comporte un grand nombre d'exercices destinés à développer les automatismes de calcul et à illustrer le matériel théorique, ainsi que des problèmes dont la résolution implique un certain degré d'ingéniosité et un esprit d'initiative.

Les problèmes sont accompagnés de réponses, les solutions les plus difficiles sont expliquées en détail à l'aide d'indications adéquates. Ce recueil, très pédagogique, est très populaire en U.R.S.S. et constitue un complément indispensable au Cours d'algèbre supérieure du professeur Kurosh publié en français par les Éditions Mir.

S'adresse aux étudiants des facultés de physique et de mathématiques ainsi qu'à tous ceux qui désirent élever le niveau de leur formation mathématique.